

講義ノート

8-バーテックスモデルとXYZモデル

東北大・工 桂 重 俊

(1982年7月13日受理)

はじめに

1971年にBaxterは2次元の8-vertexモデルの自由エネルギーを転送行列の方法で求めた。このモデルは特殊な場合としてIsingモデル, dimerモデル, iceモデル, KDPモデル, Fモデル等を含む一般的なモデルである。またBaxterはこの転送行列の固有ベクトルがHeisenbergモデルの一般化である1次元XYZモデルのハミルトニアンの固有ベクトルになっていることを示し、これからその基底エネルギーを求めた。

Baxterの論文は"a masterpiece of 19th-century mathematical analysis"とも言われているが、むしろ"a masterpiece of 20th-century mathematical physics"と言うべきであろう。Phys. Rev. Lett.の論文^{3,4)}は勿論、Ann. Phys.の論文^{1,2)}も省略されている部分が多く、孤峰として聳えたまま登山をする人は少なかった。しかし最近量子逆散乱法が脚光をあびるに至って、8-vertexモデルあるいは1次元XYZモデルがその例題としてしばしば誌面を賑わすようになった。Takhadzhani-Faddeevの解説⁵⁾を参照にしながら、10年前読もうと思って途中でやめた論文をもう一度読もうと思いたった所以である。今度東京工業大学において「スピン系の統計力学」と題する集中講義を行なったが、8-vertexモデルの話も加えることとし、これを機会にそのノートをまとめた。

本稿を草するに当ってE. Barouch, 和達三樹, および同研究室の方々, 広池和夫, 守田徹, 鈴木増雄, 宮下精二, 小口武彦の諸氏^{6,7)}から多くの御教示を頂いたことを記して厚く謝意を表する。

§1. 16-vertexモデル, 8-vertexモデル, 6-vertexモデル

2次元の正方格子を考えて各格子点間を結ぶbondに上向, 下向, または左向, 右向, のいづれかの矢をつける。各格子点とこれに入る4本のbondを見るとこの格子点には16個の状態がある。この各状態に $\epsilon_1, \epsilon_2 \dots \epsilon_{16}$ のエネルギーを割付けたモデルが16-vertexモデルである。この16個の配置のうち1つの格子点に奇数本のbondが入る状態が禁止されるとす

* KATSURA, Shigetosi

桂 重俊

と $(\epsilon_9, \epsilon_{10} \cdots \epsilon_{16} = \infty)$ 可能な状態として 8 個の状態が許される。これが広義の 8-vertex モデルである。一つの格子点に対して 4 つの bond を反転したものと、もとのものの energy が等しいとする。 $(\epsilon_1 = \epsilon_2, \epsilon_3 = \epsilon_4, \epsilon_5 = \epsilon_6, \epsilon_7 = \epsilon_8)$ (これは zerofield の条件である。) これが狭義の 8-vertex モデル (Baxter モデル) である。この内 4 本とも vertex に向ったもの、4 本とも vertex から出るものを除くと $(\epsilon_7 = \epsilon_8 = \infty)$ 可能な状態は 6 個となる。これが 6-vertex モデルである。そのうち KDP モデルといわれるものは Takahasi, Lieb による強誘電体のモデルである*。本稿では狭義の 8 vertex モデルを単に 8-vertex モデルという。

8-vertex モデルの一つの配置が与えられたとき各格子点は $\epsilon_1, \cdots \epsilon_8$ の何れかの状態をとる。系全体で ϵ_j のエネルギーをもつ vertex の数を N_j とすれば系の状態和は

$$Z_{MN} = \sum \exp \left[-\beta \sum_{j=1}^8 N_j \epsilon_j \right] \quad (1.1)$$

で与えられ、1 格子点当りの自由エネルギー f は

$$-\beta f = \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{MN} \log Z_{MN} \quad (1.2)$$

で与えられる。ここに M, N は結晶の縦および横の格子点の数である。

各状態の Boltzmann 因子を

$$v_j = e^{-\beta \epsilon_j} \quad (1.3)$$

$$v_1 = v_2 \quad v_3 = v_4 \quad v_5 = v_6 \quad v_7 = v_8$$

とし

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2}(v_5 + v_7) & v_2 &= \frac{1}{2}(v_5 - v_7) \\ w_3 &= \frac{1}{2}(v_1 - v_3) & v_4 &= \frac{1}{2}(v_1 + v_3) \end{aligned} \quad (1.4)$$

とおく。

この系の状態和 Z は w_1, w_2, w_3, w_4 の関数であるが $(1, 2, 3, 4)$ の任意の置換 (i, j, k, l) に対して $Z(w_1, w_2, w_3, w_4) = Z(\pm w_i, \pm w_j, \pm w_k, \pm w_l)$ が成立つ (Fan and Wu 1970)。

3 節以下でこの系の状態和を転送行列を用いて求めることを考えるが、その前に先ず Ising モデルとの関連を考えておこう。

1) R. J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972) 193-228.

2) R. J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972) 323-337.

* Slater の求めた Curie 点が exact であることを Takahasi が証明し、Lieb が exact な状態和を与えた。

- 3) R. J. Baxter, Phys. Rev. Lett. 26 (1971) 832-833.
- 4) R. J. Baxter, Phys. Rev. Lett. 26 (1971) 834.
- 5) L. A. Takhadzhan and L. D. Fadeev, Uspekhi Mat. Nauk 34 (1979) 13-63; Russian Math. Surveys 34 (1979) 11-68.
- 6) 和達三樹, 十河清, 打波守, 阿久津泰弘, private communication.
- 7) 広池和夫, 守田徹, private communication.

§2. 8-vertex model と Ising model

Ising model において一つのスピン配置が与えられたとき各 unit cell の中心を結ぶ裏格子を作る。この裏格子においてある bond を考え、その両側の表格子のスピンが異符号のとき実線、同符号であるとき点線で結ぶ。各実線に上または右向きの矢、点線に下または左向きの矢をつけるとこの裏格子は一つの 8-vertex model の configuration を与える。

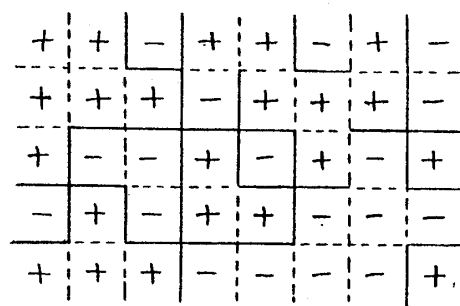


Fig. 1

裏格子の各 vertex にその vertex をとりかこむ表

子の 4 つのスピンで作るクラスターの nearest neighbor bond 4 本によるエネルギーの半分と second neighbor bond 2 本によるエネルギーをわりつけばこの Ising model とこの 8-vertex model は同等となる。水平方向, 垂直方向の energy を J, J' 右斜方向, 左斜方向の energy を J'', J''' としたときの vertex weight は Fig. 2 のようになる。(first neighbor のエネルギーを半分にしたのはとなりの vertex によって 2 重に数えられるからである。)逆に一つの 8-vertex model の arrow configuration が与えられれば Ising model のスピン configuration が定まる。但しすべてのスピンを同時に反転したのも同じ 8-vertex model の configuration に対応するので 2 重の縮退がある。

この 8-vertex model は Baxter のといたモデルのカテゴリー ($v_1 = v_2, v_3 = v_4, v_5 = v_6, v_7 = v_8$) に入らないが nearest neighbor の相互作用 $J = J' = 0$ とするとこの条件をみたす。 $J = J' = 0$ とした表格子は nn が J'', J''' である 2 つの独立な Ising 模型の重ね合わせである。8-vertex model の転移温度は

$$w_1 = \frac{1}{2}(v_5 + v_7), w_2 = \frac{1}{2}(v_5 - v_7), w_3 = \frac{1}{2}(v_1 - v_3), w_4 = \frac{1}{2}(v_1 + v_3)$$

桂 重俊

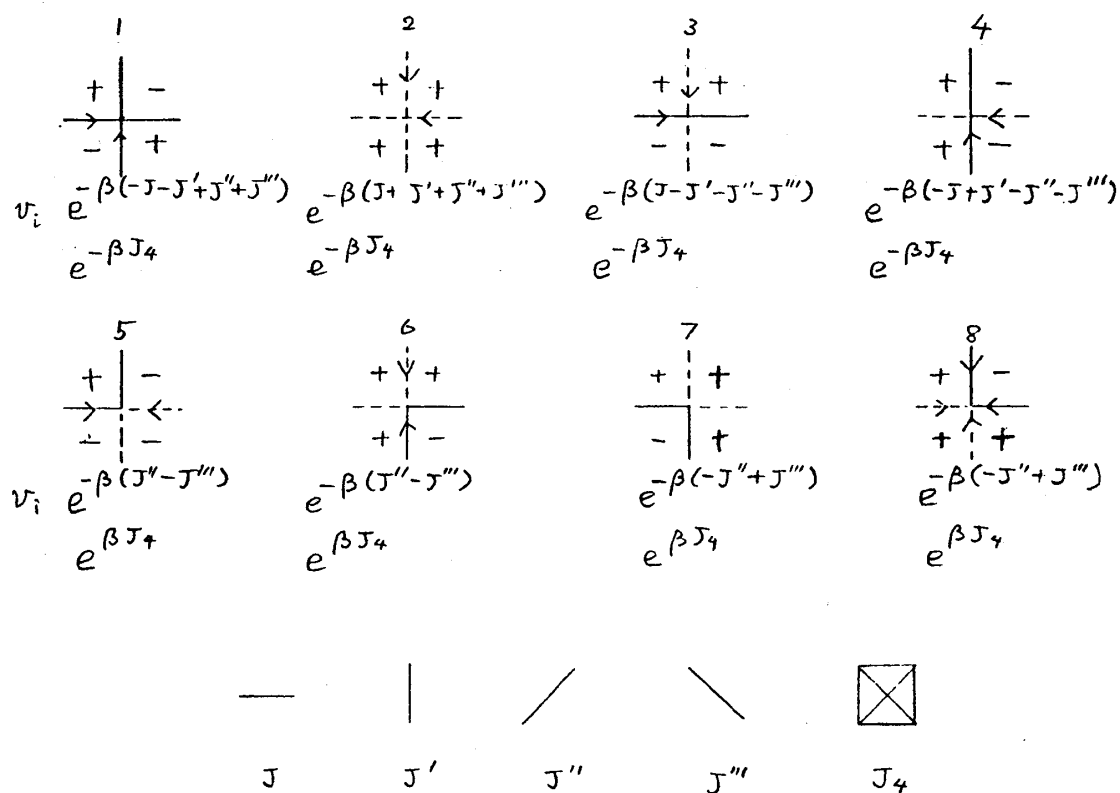


Fig. 2

とし、 w_i を大きさの順に並べかえて

$$w_1^* = \text{first}(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

$$w_2^* = \text{second}(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

$$w_3^* = \text{third}(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

$$w_4^* = \text{fourth}(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

としたとき $w_2^* = w_3^*$ で与えられる (証明後述)。上例で $J'' = J'''$ とすると $w_1 = \text{ch } 2K$, $w_2 = \text{sh } 2K$, $w_3 = 1$, $w_4 = 0$ となり $T > T_C$, $T < T_C$ の何れの場合も T_C は $\text{sh } 2K = 1$ で与えられる。これは Kramers-Wannier-Onsager の値である。なおもとの格子に 4 体力がある場合 Boltzmann 因子は $\exp(-\beta J_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)$ となるが 1 ~ 8 の配置に対してこの因子は Fig. 1 に示すようになり、このときも $v_1 = v_2$, $v_3 = v_4$, $v_5 = v_6$, $v_7 = v_8$ はみたされているから J'' , J''' をもつ 2 層の Ising モデルが 4 体力の相互作用でつながれているモデルも厳密にとける。

§3. 8-vertex model の転送行列

$N \times M$ の 8-vertex モデルを考える。各 bond について矢の向が上向のとき $\alpha = 1$ 。下向き

のとき $\alpha = -1$, 右向き のとき $r = 1$, 左向き のとき $r = -1$ とする。第 j 行と第 $j+1$ 行の間の bond の垂直な矢の任意の配置を

$$\{\alpha'\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\} \quad (3.1)$$

とする。

一つの格子点をめぐる配位はその点の下 の bond α , 上の bond α' , 左の bond r , 右の bond r' で表わされる。矢の向きは混同しやすいので以下入る矢を実線, 出る矢を点線で示す。(各の vertex についてのみ可能な記法で結晶全体についての記法ではない。)

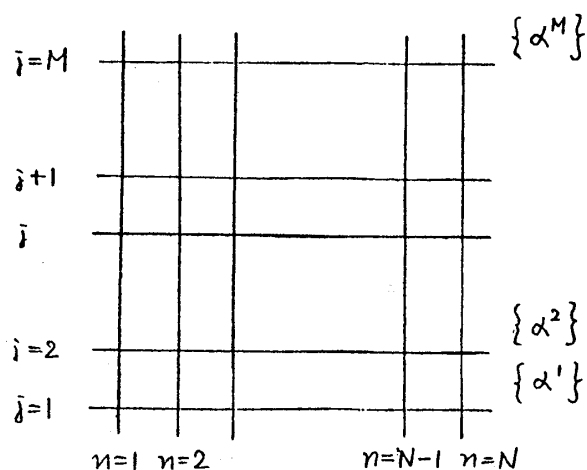


Fig. 3

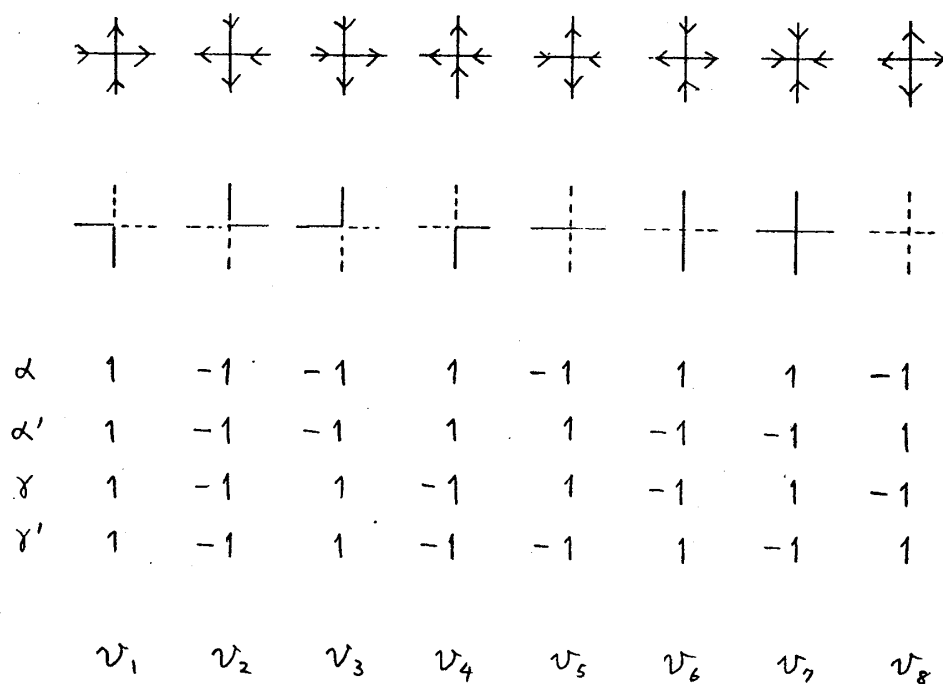


Fig. 4

ある vertex の状態の Boltzmann 因子を $\langle r\alpha | \mathcal{L} | r'\alpha' \rangle$ と記す。これは足が2組ある行列であるが, その足の順序を (3.2) のようにとると

桂 重俊

$$\mathcal{L} = \begin{array}{cccc} & & \gamma' & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ \gamma & \alpha & \alpha' & \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \end{array} \right] \end{array} \quad (3.2)$$

$$\begin{array}{cccc} & r' & 1 & 1 & -1 & -1 \\ r & \alpha & \alpha' & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \left[\begin{array}{cccc} v_1 & 0 & 0 & v_7 \\ 0 & v_3 & v_5 & 0 \\ 0 & v_6 & v_4 & 0 \\ v_8 & 0 & 0 & v_2 \end{array} \right] \end{array} \quad (3.3)$$

この $\mathcal{L}$ に vertex の横方向の位置 n を添字としてつけて

$$\langle r \alpha | \mathcal{L}_n | r' \alpha' \rangle = \sum_{j=1}^4 w_j \sigma_{rr'}^j \sigma_{n\alpha\alpha'}^j \quad (3.4)$$

すなわち

$$\mathcal{L}_n = \sum_{j=1}^4 w_j \sigma^j \otimes \sigma_n^j \quad (3.4')$$

であらわされる。 $\otimes$ は行列の直積, $\sigma^j (j=1, 2, 3)$ は pauli 行列, σ_4 は 2×2 の単位行列である*。

証

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & w_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + w_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ & + w_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$* \quad \sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle r \alpha | A \otimes B | r' \alpha' \rangle = \langle r | A | r' \rangle \langle \alpha | B | \alpha' \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_1 \\ w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -w_2 \\ w_2 \\ w_2 \\ -w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_3 \\ -w_3 \\ -w_3 \\ w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_4 \\ w_4 \\ w_4 \\ w_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_3+w_4 & 0 & 0 & w_1-w_2 \\ 0 & w_4-w_3 & w_1+w_2 & 0 \\ 0 & w_1+w_2 & w_4-w_3 & 0 \\ w_1-w_2 & 0 & 0 & w_3+w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 & v_7 \\ 0 & v_3 & v_5 & 0 \\ 0 & v_5 & v_3 & 0 \\ v_7 & 0 & 0 & v_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(3.3) 証終

(3.5)

(3.5) を 2 行 2 列づつまとめると

$$\begin{array}{ccc}
& \begin{array}{c} r' \\ \diagdown \\ r \end{array} & \begin{array}{cc} 1 & -1 \end{array} \\
\mathcal{L}_n = & \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} & \begin{bmatrix} w_4 \sigma_n^4 + w_3 \sigma_n^3 & w_1 \sigma_n^1 - i w_2 \sigma_n^2 \\ w_1 \sigma_n^1 + i w_2 \sigma_n^2 & w_4 \sigma_n^4 - w_3 \sigma_n^3 \end{bmatrix}
\end{array} \quad (3.6)$$

とかける。 σ_n の中に入っている足が $\alpha\alpha'$ である ($\langle \alpha | \sigma_n | \alpha' \rangle$)

ある行 (第 j 行) を考えてその行の各 vertex ($n=1, 2, \dots, N$) の配位に対する $\mathcal{L}$ を $\langle r \alpha_1 | \mathcal{L}_1 | r' \alpha'_1 \rangle, \langle r' \alpha_2 | \mathcal{L}_2 | r'' \alpha'_2 \rangle \dots \langle r^{(N-1)} \alpha_N | \mathcal{L}_N | r \alpha'_N \rangle$ とする。

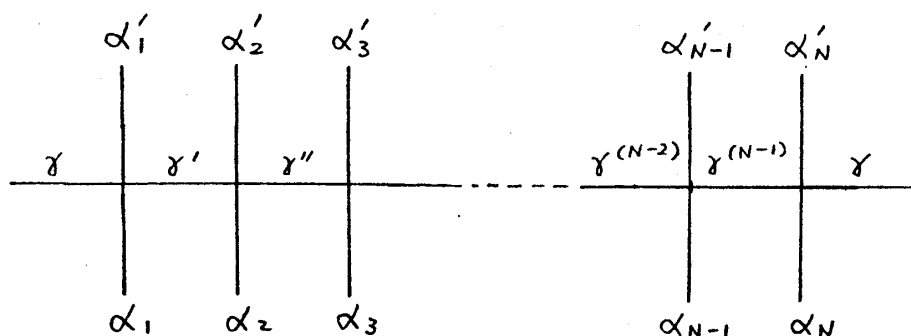


Fig. 5

横 bond はつながれているので $\mathcal{L}_n$ の ket の r と $\mathcal{L}_{n+1}$ の bra の r は同じである。

$$\mathcal{T}_N \equiv \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_N \quad (3.7)$$

により $\mathcal{T}_N$ を定義する。以下 N は紛れる恐れのないときは省略することもある。(3.10) の積は横 bond については内積をとり縦 bond については直積をとっているので $\mathcal{T}_N$ は $2^{N+1} \times 2^{N+1}$ 次元の行列である。

桂 重俊

$$\begin{aligned}
& \langle r\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N|\mathcal{T}_N|r^{(N)}\alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_N\rangle \\
&= \sum_{r'} \sum_{r''} \cdots \sum_{r^{(N-1)}} \langle r\alpha_1|\mathcal{L}_1|r'\alpha'_1\rangle \langle r'\alpha_2|\mathcal{L}_2|r''\alpha'_2\rangle \cdots \\
&\quad \times \langle r^{(N-1)}\alpha_N|\mathcal{L}_N|r^{(N)}\alpha'_N\rangle
\end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.8)に(3.4)を代入すると例えば $N=3$ では

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_3 &= \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3 \\
&= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \sum_{j_3} w_{j_1} w_{j_2} w_{j_3} \underbrace{\sigma^{j_1} \sigma^{j_2} \sigma^{j_3}}_{2\text{行}2\text{列}} \otimes \underbrace{\sigma_1^{j_1} \sigma_2^{j_2} \sigma_3^{j_3}}_{2^3\text{行}2^3\text{列}}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

となる。

$\mathcal{T}_N$ の r 部分のトレースを T_N とする。これは $2^N \times 2^N$ の行列である。

$$T_N = \text{tr } \mathcal{T}_N \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\langle \{\alpha\} | T_N | \{\alpha'\} \rangle &= \langle \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N | T_N | \alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_N \rangle \\
&= \sum_r \langle r\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N | \mathcal{T}_N | r\alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_N \rangle \\
&= \sum_r \sum_{r'} \cdots \sum_{r^{(N-1)}} \langle r\alpha_1|\mathcal{L}_1|r'\alpha'_1\rangle \langle r'\alpha_2|\mathcal{L}_2|r''\alpha'_2\rangle \cdots \langle r^{(N-1)}\alpha_N|\mathcal{L}_N|r^{(N)}\alpha'_N\rangle
\end{aligned} \tag{3.11}$$

第 $j-1$ 行から出て第 j 行へ入る縦 bond の組を $\{\alpha^j\}$ ，第 j 行から出て第 $j+1$ 行へ入る縦 bond の組を $\{\alpha^{j+1}\}$ とすると $\langle \{\alpha^j\} | T_N | \{\alpha^{j+1}\} \rangle$ は第 j 行の転送行列でこれを $j=1, 2, \dots, M$ についてかけて $\{\alpha\}$ についての和をとれば周期的条件の下における系の状態和 Z_{MN} となる。

$$\begin{aligned}
Z_{MN} &= \sum_{\{\alpha^1\}} \sum_{\{\alpha^2\}} \cdots \sum_{\{\alpha^M\}} \langle \{\alpha^1\} | T_N | \{\alpha^2\} \rangle \\
&\quad \times \langle \{\alpha^2\} | T_N | \{\alpha^3\} \rangle \cdots \langle \{\alpha^{M-1}\} | T_N | \{\alpha^M\} \rangle \\
&\quad \times \langle \{\alpha^1\} | T_N | \{\alpha^1\} \rangle
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$= \text{Sp } T_N^M \tag{3.13}$$

Sp は $\sum_{\{\alpha^1\}}$ を示し $2^N \times 2^N$ 次元空間のトレースである。

従って転送行列 T の最大固有値を $\Lambda_{\max}(N)$ とすれば、

$$-\beta f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log |\Lambda_{\max}(N)| \tag{3.14}$$

で与えられる。

w_1, w_2, w_3, w_4 をもつ $\mathcal{T}(\langle r\{\alpha\} | \mathcal{T} | r'\{\alpha'\} \rangle)$ と w'_1, w'_2, w'_3, w'_4 をもつ $\mathcal{T}'(\langle r\{\alpha\} | \mathcal{T}' | r'\{\alpha'\} \rangle)$ を考えてその縦 bond について内積，横 bond について直積をとったものを $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'$ と

記す。すなわち

$$\begin{aligned} & \langle r\delta\{\alpha\}|\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'|r'\delta'\{\beta\}\rangle \\ &= \sum_{\{\alpha'\}} \langle r\{\alpha\}|\mathcal{T}|r'\{\alpha'\}\rangle \langle \delta\{\alpha'\}|\mathcal{T}'|\delta'\{\beta\}\rangle \end{aligned} \quad (3.15)$$

いま横 bond の 2 組の足をもつ行列 $\mathcal{R}(\langle r\delta|\mathcal{R}|r'\delta'\rangle)$ と $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$ との内積 $\mathcal{R}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}')$ を

$$\begin{aligned} & \langle r\delta\{\alpha\}|\mathcal{R}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}')|r'\delta'\{\alpha'\}\rangle \\ &= \sum_{r''} \sum_{\delta''} \langle r\delta|\mathcal{R}|r''\delta''\rangle \langle r''\delta''\{\alpha\}|\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'|r'\delta'\{\beta\}\rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

によって定義する。同様に $(\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\mathcal{R}$ は

$$\begin{aligned} & \langle r\delta\{\alpha\}|(\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T})\mathcal{R}|r'\delta'\{\beta\}\rangle \\ &= \sum_{r''} \sum_{\delta''} \langle r\delta\{\alpha\}|\mathcal{T}'\otimes\mathcal{T}|r''\delta''\{\alpha'\}\rangle \langle r''\delta''|\mathcal{R}|r'\delta'\rangle \end{aligned} \quad (3.17)$$

である

(3.16)=(3.17)であれば

$$\begin{aligned} & \sum_{r''} \sum_{\delta''} \sum_{\{\alpha'\}} \langle r\delta|\mathcal{R}|r''\delta''\rangle \langle r''\{\alpha'\}|\mathcal{T}|r'\{\alpha'\}\rangle \langle \delta''\{\alpha'\}|\mathcal{T}'|\delta'\{\beta\}\rangle \\ &= \sum_{r''} \sum_{\delta''} \sum_{\{\alpha'\}} \langle r\{\alpha\}|\mathcal{T}'|r''\{\alpha'\}\rangle \langle \delta\{\alpha'\}|\mathcal{T}|\delta''\{\beta\}\rangle \langle r''\delta''|\mathcal{R}|r'\delta'\rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

$\sum_{r'} \sum_{\delta'} \langle r'\delta'|\mathcal{R}^{-1}|r'''\delta'''\rangle$ を (3.18) の両辺の右からかけると

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{r''} \sum_{\delta''} \sum_{\{\alpha'\}} \langle r\{\alpha\}|\mathcal{T}'|r''\{\alpha'\}\rangle \langle \delta\{\alpha'\}|\mathcal{T}|\delta''\{\beta\}\rangle \\ &\quad \times \langle r''|\mathcal{R}^{-1}|r'''\delta'''\rangle \\ &= \sum_{\{\alpha'\}} \langle r\{\alpha\}|\mathcal{T}'|r'''\{\alpha'\}\rangle \langle \delta\{\alpha'\}|\mathcal{T}|\delta'''\{\beta\}\rangle \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{r''} \sum_{\delta''} \sum_{\{\alpha'\}} \sum_{r'} \sum_{\delta'} \langle r\delta|\mathcal{R}|r''\delta''\rangle \langle r''\{\alpha'\}|\mathcal{T}|r'\{\alpha'\}\rangle \\ &\quad \times \langle \delta''\{\alpha'\}|\mathcal{T}'|\delta'\{\beta\}\rangle \langle r'\delta'|\mathcal{R}^{-1}|r'''\delta'''\rangle \end{aligned} \quad (3.20)$$

両辺の (r 部分について) trace をとると

$$\begin{aligned} \text{tr 右辺} &= \sum_r \sum_{\delta} \langle r\{\alpha\}|\mathcal{T}'|r\{\alpha'\}\rangle \langle \delta\{\alpha'\}|\mathcal{T}|\delta\{\beta\}\rangle \\ &= \sum_{\{\alpha'\}} \langle \{\alpha\}|T'|\{\alpha'\}\rangle \langle \{\alpha'\}|T|\{\beta\}\rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \text{tr 左辺} &= \sum_r \sum_{\delta} \sum_{r''} \sum_{\delta''} \sum_{\{\alpha'\}} \sum_{\delta'} \sum_{r'} \langle r\delta|\mathcal{R}|r''\delta''\rangle \langle r''\{\alpha'\}|\mathcal{T}|r'\{\alpha'\}\rangle \\ &\quad \times \langle \delta''\{\alpha'\}|\mathcal{T}'|\delta'\{\beta\}\rangle \langle r'\delta'|\mathcal{R}^{-1}|r\delta\rangle \end{aligned}$$

桂 重俊

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r''} \sum_{\delta'' \{\alpha\}} \sum_{r'} \sum_{\delta'} \langle r' | r'' \rangle \langle \delta' | \delta'' \rangle \langle r'' \{\alpha\} | \mathcal{T} | r' \{\alpha'\} \rangle \\
&\times \langle \delta'' \{\alpha\} | \mathcal{T}' | \delta' \{\beta\} \rangle \\
&= \sum_{r'} \sum_{\delta' \{\alpha\}} \langle r' \{\alpha\} | \mathcal{T} | r' \{\alpha'\} \rangle \langle \delta' \{\alpha'\} | \mathcal{T}' | \delta' \{\beta\} \rangle \\
&= \sum_{\{\alpha\}} \langle \{\alpha\} | T | \{\alpha'\} \rangle \langle \{\alpha'\} | T' | \{\beta\} \rangle
\end{aligned} \tag{3.22}$$

すなわち

$$\mathcal{R}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}') = (\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}) \mathcal{R} \tag{3.22}$$

であるような4行4列の行列 $\mathcal{R}$ が存在すれば

$$T T' = T' T \tag{3.23}$$

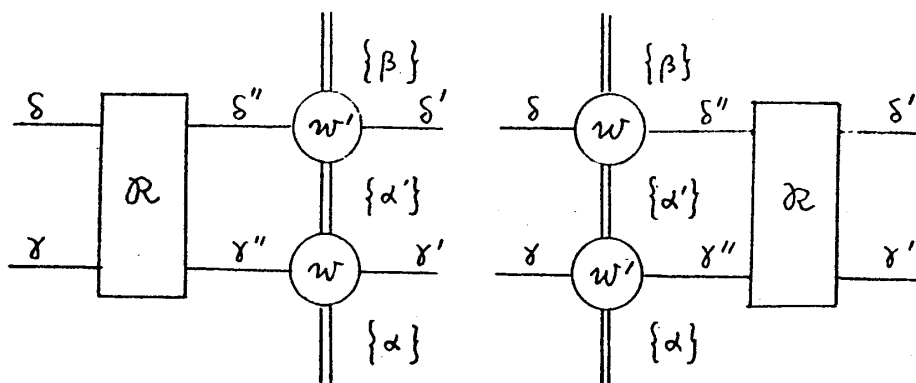
である。(3.16), (3.17)の直積, 内積の関係を schematic に図示すると Fig. 6 のようになる。縦 bond が2重線になっているのは横方向の和がとってあることを示す。(3.22)が成立つためには

$$\mathcal{R}(\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}'_n) = (\mathcal{L}'_n \otimes \mathcal{L}_n) \mathcal{R} \tag{3.24}$$

が成立てばよい。何故なら

$$\prod_{n=1}^N \mathcal{A}_n \otimes \prod_{n=1}^N \mathcal{B}_n = \prod_{n=1}^N \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{B}_n \tag{3.25}$$

であるから。(3.24)を Yang-Baxter の関係式といい量子逆散乱法の種々の問題にあらわれる重要な関係式である。与えられた系において w_j の組が与えられており, これにより $T_N(w_j)$ が定まるが, 仮想的な w'_j の組をもつ $T'_N(w'_j)$ を考えて $T_N(w_j)$ と $T'_N(w'_j)$ が可換になるよう補助量 $\mathcal{R}$ を定める。 $\mathcal{R}$ は後に定める w''_j の組の関数となり w_j, w'_j, w''_j は共通のパラメーターでパラメタライズされる。



(3.16)

(3.17)

Fig. 6

すなわち w_1, w_2, w_3, w_4 は l, η, λ の関数として w'_1, w'_2, w'_3, w'_4 は l, η, μ の関数として, $w''_1, w''_2, w''_3, w''_4$ は $l, \eta, \lambda - \mu$ の関数として定まる ((5.42), (5.45) 参照). $T_N(w_1, w_2, w_3, w_4) = T_N(\lambda)$ を 2 行 2 列の行列

$$T_N(\lambda) = \begin{bmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{bmatrix}$$

で表わしたとき ((6.11) 参照) $T_N(\lambda)$ と $T_N(\mu)$ の可換なことより $A_N(\lambda), B_N(\lambda), \dots$ と $A_N(\mu), B_N(\mu), \dots$ の交換関係が導かれる。 $\Psi = \prod_l B(\lambda_l) \Omega$ (Ω は真空) において Ψ が $T_N(\lambda)$ の固有ベクトルとなるように λ_l (の組) を定めると $T_N(\lambda)$ の固有値が求まるというのが次節以下のプログラムである。

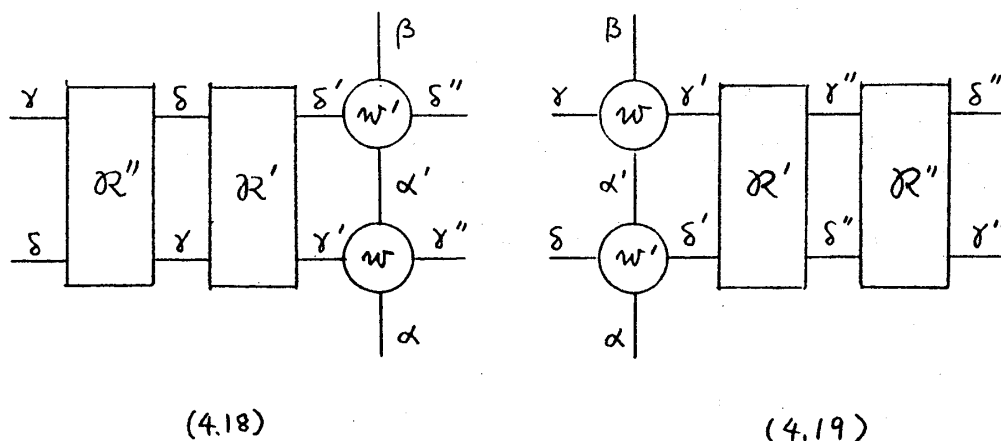


Fig. 7

§4. Baxterのparametrization

(3.24) をみたす $\mathcal{R}$ を求めよう。

$\mathcal{L}_n, \mathcal{L}'_n$ およびその直積の行列要素を書くと

$$\langle r' \alpha | \mathcal{L}_n | r'' \alpha' \rangle = \sum_j w_j \sigma_{r' r''}^j \sigma_{n \alpha \alpha'}^j \quad (4.1)$$

$$\langle \delta' \alpha' | \mathcal{L}'_n | \delta'' \beta \rangle = \sum_k w'_k \sigma_{\delta' \delta''}^k \sigma_{n \alpha' \beta}^k \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & \langle r' \delta' \alpha | \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}'_n | r'' \delta'' \beta \rangle \\ &= \sum_r \langle r' \alpha | \mathcal{L}_n | r'' \alpha' \rangle \langle \delta' \alpha' | \mathcal{L}'_n | \delta'' \beta \rangle \\ &= \sum_j \sum_k w_j w'_k \sigma_{r' r''}^j \sigma_{\delta' \delta''}^k (\sigma_n^j \sigma_n^k)_{\alpha \beta} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\langle \delta \alpha | \mathcal{L}'_n | \delta' \alpha' \rangle = \sum_k w'_k \sigma_{\delta \delta'}^k \sigma_{n \alpha \alpha'}^k \quad (4.4)$$

桂 重俊

$$\begin{aligned}
& \langle \delta r \alpha | \mathcal{L}'_n \otimes \mathcal{L}_n | \delta' r' \beta \rangle \\
&= \sum_r \langle \delta \alpha | \mathcal{L}'_n | \delta' \alpha' \rangle \langle r \alpha' | \mathcal{L}_n | r' \beta \rangle \\
&= \sum_j \sum_k w_j w'_k \sigma_{rr'}^j \sigma_{\delta\delta'}^k (\sigma_n^k \sigma_n^j)_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

いま $\mathcal{R}'$ を (4.7) で定義すると

$$\langle r \delta | \mathcal{R}' | r' \delta' \rangle = \sum_l x_l \sigma_{rr'}^l \sigma_{\delta\delta'}^l \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
& \langle r \delta \alpha | \mathcal{R}' (\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}'_n) | r'' \delta'' \beta \rangle \\
&= \sum_{\chi} \sum_{\mu} \langle r \delta | \mathcal{R}' | r' \delta' \rangle \langle r' \delta' \alpha | \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}'_n | r'' \delta'' \beta \rangle \\
&= \sum_j \sum_k \sum_l w_j w'_k x_l (\sigma^l \sigma^j)_{rr'} (\sigma^l \sigma^k)_{\delta\delta'} (\sigma_n^j \sigma_n^k)_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\langle \delta' r' | \mathcal{R}' | \delta'' r'' \rangle = \sum_l x_l \sigma_{\delta'\delta''}^l \sigma_{r'r''}^l \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
& \langle \delta r' \alpha | (\mathcal{L}'_n \otimes \mathcal{L}_n) R' | \delta'' r'' \beta \rangle \\
&= \sum_{\chi} \sum_{\mu} \langle \delta r \alpha | \mathcal{L}'_n \otimes \mathcal{L}_n | \delta' r' \beta \rangle \langle \delta' r' | \mathcal{R}' | \delta'' r'' \rangle \\
&= \sum_j \sum_k \sum_l w_j w'_k x_l (\sigma^j \sigma^l)_{rr'} (\sigma^k \sigma^l)_{\delta\delta'} (\sigma_n^k \sigma_n^j)_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

次式で定義される $\mathcal{R}''$ を考える。

$$\mathcal{R}'' = \frac{1}{2} \sum_j \sigma^j \otimes \sigma^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$\langle r \delta | \mathcal{R}'' | r' \delta' \rangle = \frac{1}{2} \sum_j \sigma_{rr'}^j \sigma_{\delta\delta'}^j \tag{4.12}$$

これを

$$\langle r \delta | A \otimes B | r' \delta' \rangle = A_{rr'} B_{\delta\delta'} \tag{4.13}$$

の左または右から作用させると列または行の添字の順序を反対にする効果をもつ。

$$\begin{array}{cc|cccc}
& & r' & 1 & 1 & 2 & 2 \\
& & \delta' & 1 & 2 & 1 & 2 \\
r & r' & \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} & a_{12} b_{11} & a_{12} b_{12} \\ a_{11} b_{21} & a_{11} b_{22} & a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} & a_{22} b_{11} & a_{22} b_{12} \\ a_{21} b_{21} & a_{21} b_{22} & a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} r' & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & \delta \end{array} \backslash & \begin{array}{cccc} \delta' & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{22} \end{array} \right] \\ \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} & \\ \begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array} &
\end{array}
\end{array}
\quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r'} \sum_{\delta} \langle r\delta | A \otimes B | r'\delta' \rangle \langle r'\delta' | \mathcal{R}'' | r''\delta'' \rangle \\
& = \langle r\delta | A \otimes B | \delta'' r'' \rangle
\end{aligned}
\quad (4.15)$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{array} \right] \\
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} r' & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & \delta \end{array} \backslash & \begin{array}{cccc} \delta' & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{array} \right] \\ \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} & \\ \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array} &
\end{array}
\end{array}
\quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r'} \sum_{\delta} \langle r\delta | \mathcal{R}'' | r'\delta' \rangle \langle r'\delta' | A \otimes B | r''\delta'' \rangle \\
& = \langle \delta r | A \otimes B | r''\delta'' \rangle
\end{aligned}
\quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r'} \sum_{\delta} \langle r\delta | \mathcal{R}'' | r'\delta' \rangle \langle r'\delta'\alpha | \mathcal{R}'(\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}'_n) | r''\delta''\beta \rangle \\
& = \langle r\delta\alpha | \mathcal{R}''\mathcal{R}'(\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}'_n) | r''\delta''\beta \rangle \\
& = \sum \sum \sum w_j w'_k x_j (\sigma^l \sigma^j)_{rr'} (\sigma^l \sigma^k)_{\delta\delta'} (\sigma_n^j \sigma_n^k)_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu} \sum_{\lambda'} \langle \delta r\alpha | (\mathcal{L}'_n \otimes \mathcal{L}_n) \mathcal{R}' | \delta' r'\beta \rangle \langle \delta' r' | \mathcal{R}'' | \delta'' r'' \rangle \\
& = \langle \delta r\alpha | (\mathcal{L}'_n \otimes \mathcal{L}_n) \mathcal{R}'\mathcal{R}'' | r''\delta''\beta \rangle \\
& = \sum \sum \sum w_j w'_k x_l (\sigma^j \sigma^l)_{rr'} (\sigma^k \sigma^l)_{\delta\delta'} (\sigma_n^k \sigma_n^j)_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\quad (4.19)$$

桂 重俊

ゆえに

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}' \mathcal{R}'' = \mathcal{R}'' \mathcal{R}' = \frac{1}{2} \sum x_j \sigma^j \otimes \sigma^j \sum \sigma^l \otimes \sigma^l \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum \sum x_j \sigma_{rr'}^j \sigma_{r'r''}^l \sigma_{\delta\delta'}^j \sigma_{\delta'\delta''}^l \\
 &= \begin{bmatrix} x_4+x_3 & 0 & 0 & x_1-x_2 \\ 0 & x_4-x_3 & x_1+x_2 & 0 \\ 0 & x_1+x_2 & x_4-x_3 & 0 \\ x_1-x_2 & 0 & 0 & x_4+x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x_4+x_3 & 0 & 0 & x_1-x_2 \\ 0 & x_1+x_2 & x_4-x_3 & 0 \\ 0 & x_4-x_3 & x_1+x_2 & 0 \\ x_1-x_2 & 0 & 0 & x_4+x_3 \end{bmatrix} \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

を求める $\mathcal{R}$ の形とし, (4.18)=(4.19) となるよう x_j を定めよう。(4.18)と(4.19)を schematic に図示すると Fig. 7 のようになる。

§5. x_j のパラメータ表示

(4.18) - (4.19) = 0 となる条件を求める。 $\sum \sum \sum$ の中の各項をしらべる。

$j = k$ のとき

$$\begin{aligned}
 &(\sigma_n^k \sigma_n^j)_{\alpha\beta} = (\sigma_n^j \sigma_n^k)_{\alpha\beta} \\
 &\sum_l w_j w_j' (\sigma_n^j \sigma_n^j)_{\alpha\beta} x_i \\
 &\times [(\sigma^l \sigma^j)_{rr'} (\sigma^l \sigma^j)_{\delta\delta''} - (\sigma^j \sigma^l)_{rr''} (\sigma^j \sigma^l)_{\delta\delta''}] \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

$l, j \in (1, 2, 3)$ で $l \neq j$ ならば $\sigma^l \sigma^j = -\sigma^j \sigma^l$ で消える。 $l = 4$, $j \in (1, 2, 3, 4)$ および $j = 4$, $l \in (1, 2, 3, 4)$ のとき $\sigma^l \sigma^j = \sigma^j \sigma^l$ で消える。ゆえに $j = k$ の項はすべて消える。

$j \neq k$, $j, k \in (1, 2, 3)$ のとき

$$\begin{aligned}
 &\sum w_j w_k' (\sigma_n^j \sigma_n^k)_{\alpha\beta} x_l \\
 &\times [(\sigma^l \sigma^j)_{rr'} (\sigma^l \sigma^k)_{\delta\delta''} + (\sigma^j \sigma^l)_{rr''} (\sigma^k \sigma^l)_{\delta\delta''}] \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

$$l = j \neq k \quad (\sigma^l \sigma^j)_{rr''} = (\sigma^j \sigma^l)_{\delta\delta''}$$

$$(\sigma^l \sigma^k)_{rr''} = -(\sigma^k \sigma^l)_{\delta\delta''}$$

で消える。 $l = k \neq j$ の場合も同様である。 $l \neq k \neq j \neq l$ の場合は消えない。このとき [] 内は第1項の2倍となる。

$j \neq k$, $j = 4$ のとき

$$\begin{aligned} & \sum w_4 w'_k (\sigma_n^4 \sigma_n^l)_{\alpha\beta} x_l \\ & \times [\sigma_{rr''}^l (\sigma^l \sigma^k)_{\delta\delta''} - \sigma_{rr''}^k (\sigma^k \sigma^l)_{\delta\delta''}] \end{aligned} \quad (5.3)$$

$l = 4$ または $l = k$ のとき消える。 $k \neq l$, $k, l \in (1, 2, 3)$ のときは消えない。このとき [] 内は第1項の2倍となる。 $j \neq k$, $k = 4$ のときも同様。

残った項を書くと

$$\begin{aligned} & = 2 \{ w_1 w'_2 (i\sigma_n^3)_{\alpha\beta} [x_3 \sigma_{rr''}^2 \sigma_{\delta\delta''}^1 + x_4 \sigma_{rr''}^1 \sigma_{\delta\delta''}^2] \\ & + w_1 w'_3 (-i\sigma_n^2)_{\alpha\beta} [x_2 \sigma_{rr''}^3 \sigma_{\delta\delta''}^1 + x_4 \sigma_{rr''}^1 \sigma_{\delta\delta''}^3] \\ & + w_1 w'_4 \sigma_{n\alpha\beta}^1 [x_2 (-i\sigma_{rr''}^3) \sigma_{\delta\delta''}^2 + x_3 \sigma_{rr''}^2 \sigma_{\delta\delta''}^3] \\ & + w_2 w'_1 (-i\sigma_n^3)_{\alpha\beta} [x_3 \sigma_{rr''}^1 \sigma_{\delta\delta''}^2 + x_4 \sigma_{rr''}^2 \sigma_{\delta\delta''}^1] \\ & + w_2 w'_3 (i\sigma_n^1)_{\alpha\beta} [x_1 \sigma_{rr''}^3 \sigma_{\delta\delta''}^2 + x_4 \sigma_{rr''}^2 \sigma_{\delta\delta''}^3] \\ & + w_2 w'_4 (\sigma_n^2)_{\alpha\beta} [x_1 i\sigma_{rr''}^3 \sigma_{\delta\delta''}^1 + x_3 (-i\sigma_{rr''}^1) \sigma_{\delta\delta''}^3] \\ & + w_3 w'_1 (i\sigma_n^2)_{\alpha\beta} [x_2 \sigma_{rr''}^1 \sigma_{\delta\delta''}^3 + x_4 \sigma_{rr''}^3 \sigma_{\delta\delta''}^1] \\ & + w_3 w'_2 (-i\sigma_n^1)_{\alpha\beta} [x_1 \sigma_{rr''}^2 \sigma_{\delta\delta''}^3 + x_4 \sigma_{rr''}^3 \sigma_{\delta\delta''}^2] \\ & + w_3 w'_4 (\sigma_n^3)_{\alpha\beta} [x_1 (-i\sigma_{rr''}^2) \sigma_{\delta\delta''}^1 + x_2 i\sigma_{rr''}^1 \sigma_{\delta\delta''}^2] \\ & + w_4 w'_1 (\sigma_n^1)_{\alpha\beta} [x_2 \sigma_{rr''}^2 (-i\sigma^3)_{\delta\delta''} + x_3 \sigma_{rr''}^3 i\sigma_{\delta\delta''}^2] \\ & + w_4 w'_2 (\sigma_n^2)_{\alpha\beta} [x_1 \sigma_{rr''}^1 i\sigma_{\delta\delta''}^3 + x_3 \sigma_{rr''}^3 (-i\sigma^1)_{\delta\delta''}] \\ & + w_4 w'_3 (\sigma_n^3)_{\alpha\beta} [x_1 \sigma_{rr''}^1 (-i\sigma^2)_{\delta\delta''} + x_2 \sigma_{rr''}^2 i\sigma_{\delta\delta''}^1] \} \\ & = 2 \{ q_{n\alpha\beta}^3 i\sigma_{rr''}^2 \sigma_{\delta\delta''}^1 [w_1 w'_2 x_3 - w_2 w'_1 x_4 - w_3 w'_4 x_1 + w_4 w'_3 x_2] \\ & + \sigma_{n\alpha\beta}^3 \sigma_{rr''}^1 i\sigma_{\delta\delta''}^2 [-w_1 w'_2 x_4 - w_2 w'_1 x_3 + w_3 w'_4 x_2 - w_4 w'_3 x_1] \\ & + i\sigma_{n\alpha\beta}^2 \sigma_{rr''}^3 \sigma_{\delta\delta''}^1 [-w_1 w'_3 x_2 + w_2 w'_4 x_1 + w_3 w'_1 x_4 - w_4 w'_2 x_3] \} \end{aligned} \quad (5.4)$$

桂 重俊

$$\begin{aligned}
& + i\sigma_{n\alpha\beta}^2 \sigma_{rr}^1 \sigma_{\delta\delta}^3 [-w_1 w_3' x_4 - w_2 w_4' x_3 + w_3 w_1' x_2 + w_4 w_2' x_1] \\
& + \sigma_{n\alpha\beta}^1 \sigma_{rr}^3 i\sigma_{\delta\delta}^2 [-w_1 w_4' x_2 + w_2 w_3' x_1 - w_3 w_2' x_4 + w_4 w_1' x_3] \\
& + \sigma_{n\alpha\beta}^1 i\sigma_{rr}^2 \sigma_{\delta\delta}^3 [w_1 w_4' x_3 + w_2 w_3' x_4 - w_3 w_2' x_1 - w_4 w_1' x_2] \} \quad (5.4')
\end{aligned}$$

(5.4') が 0 である為には $[] = 0$. すなわち

$$w_n w_i' x_j - w_l w_n' x_k + w_k w_j' x_l - w_j w_k' x_n = 0 \quad (5.5)$$

が (l, k, j, n) が $(1, 2, 3, 4)$ のすべての置換について成立てばよい。以下 x_j を w_j'' と記す。

$$w_n w_l' w_j'' - w_l w_n' w_k'' + w_k w_j' w_l'' - w_j w_k' w_n'' = 0 \quad (5.6)$$

$w_n w_l' w_k''$ を $(n \ l \ j)$ と略記する。 $j \ k \ l \ n$ を $1 \ 2 \ 3 \ 4, 1 \ 2 \ 4 \ 3, 1 \ 3 \ 4 \ 2, 1 \ 3 \ 2 \ 4, 1 \ 4 \ 2 \ 3, 1 \ 4 \ 3 \ 2$ の 6 通りにとったとき上式は次の (5.7) - (5.12) のようになる。

w_i, w_j', w_l'' 等を $ij'k''$ 等と略記する。

$$1 \ 2 \ 4 \ 3 \quad 3 \ 4' \ 1'' - 4 \ 3' \ 2'' - 1 \ 2' \ 3'' + 2 \ 1' \ 4'' = 0 \quad (5.7)$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \quad 4 \ 3' \ 1'' - 3 \ 4' \ 2'' + 2 \ 1' \ 3'' - 1 \ 2' \ 4'' = 0 \quad (5.8)$$

$$1 \ 4 \ 3 \ 2 \quad 2 \ 3' \ 1'' - 1 \ 4' \ 2'' + 4 \ 1' \ 3'' - 3 \ 2' \ 4'' = 0 \quad (5.9)$$

$$1 \ 4 \ 2 \ 3 \quad 3 \ 2' \ 1'' + 4 \ 1' \ 2'' - 1 \ 4' \ 3'' - 2 \ 3' \ 4'' = 0 \quad (5.10)$$

$$1 \ 3 \ 4 \ 2 \quad 2 \ 4' \ 1'' - 1 \ 3' \ 2'' - 4 \ 2' \ 3'' + 3 \ 1' \ 4'' = 0 \quad (5.11)$$

$$1 \ 3 \ 2 \ 4 \quad 4 \ 2' \ 1'' + 3 \ 1' \ 2'' - 2 \ 4' \ 3'' - 1 \ 3' \ 4'' = 0 \quad (5.12)$$

(5.7) と (5.8), (5.9) と (5.10), (5.11) と (5.12) が組になっている。 w' と w'' について対称である (例えば (5.7) で w' と w'' を交換すると (5.11) になる) が w と w' については対称でないことに注意しておく。(5.7) から (5.10) までは w'' についての方程式とみて $\equiv 0$ でない解をもつ条件として, その行列式 $= 0$ を計算すると (4つのえらび方を勝手にとると (5.18) の結果が得られないことがある)

$$D = \begin{vmatrix} 3 \ 4' & -4 \ 3' & -1 \ 2' & 2 \ 1' \\ 4 \ 3' & -3 \ 4' & 2 \ 1' & -1 \ 2' \\ 2 \ 3' & -1 \ 4' & 4 \ 1' & -3 \ 2' \\ 3 \ 2' & 4 \ 1' & -1 \ 4' & -2 \ 3' \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 34' \begin{vmatrix} -34' & 21' & -12' \\ -14' & 41' & -32' \\ 41' & -14' & -23' \end{vmatrix} + 43' \begin{vmatrix} 43' & 21' & -12' \\ 23' & 41' & -32' \\ 32' & -14' & -23' \end{vmatrix} \\
&- 12' \begin{vmatrix} 43' & -34' & -12' \\ 23' & -14' & -32' \\ 32' & 41' & -23' \end{vmatrix} - 21' \begin{vmatrix} 43' & -34' & 21' \\ 23' & -14' & 41' \\ 32' & 41' & -14' \end{vmatrix} \\
&= -3^2 4'^2 \begin{vmatrix} 41' & -32' \\ -14' & -23' \end{vmatrix} - 1' 234' \begin{vmatrix} -14' & -32' \\ 41' & -23' \end{vmatrix} - 12' 34' \begin{vmatrix} -14' & 41' \\ 41' & -14' \end{vmatrix} \\
&+ 3'^2 4^2 \begin{vmatrix} 41' & -32' \\ -14' & -23' \end{vmatrix} - 1' 23' 4 \begin{vmatrix} 23' & -32' \\ 32' & -23' \end{vmatrix} - 12' 3' 4 \begin{vmatrix} 23' & 41' \\ 32' & -14' \end{vmatrix} \\
&- 12' 3' 4 \begin{vmatrix} -14' & -32' \\ 41' & -23' \end{vmatrix} - 12' 34' \begin{vmatrix} 23' & -32' \\ 32' & -23' \end{vmatrix} + 1^2 2'^2 \begin{vmatrix} 23' & -14' \\ 32' & 41' \end{vmatrix} \\
&- 1' 23' 4 \begin{vmatrix} -14' & 41' \\ 41' & -14' \end{vmatrix} - 1' 234' \begin{vmatrix} 23' & 41' \\ 32' & -14' \end{vmatrix} - 1'^2 2^2 \begin{vmatrix} 23' & -14' \\ 32' & 41' \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

第2, 11項の和, 第6, 7項の和は消える。第9, 12項, 第1, 4項, 第3, 8項, 第5, 10項の和をまとめて,

$$\begin{aligned}
D &= (1^2 2'^2 - 1'^2 2^2) (1' 23' 4 + 12' 34') \\
&\quad - (3^2 4'^2 - 3'^2 4^2) (-1' 23' 4 - 12' 34') \\
&\quad - 12' 34' (1^2 4'^2 - 1'^2 4^2 - 2^2 3'^2 + 2'^2 3^2) \\
&\quad - 1' 23' 4 (-2^2 3'^2 + 2'^2 3^2 + 1^2 4'^2 - 1'^2 4^2) \\
&= (1' 23' 4 + 12' 34') (1^2 2'^2 - 1'^2 2^2 + 3^2 4'^2 - 3'^2 4^2 \\
&\quad - 1^2 4'^2 + 1'^2 4^2 + 2^2 3'^2 - 2'^2 3^2) \\
&= (1' 23' 4 + 12' 34') [(1^2 - 3^2)(2'^2 - 4'^2) - (1'^2 - 3'^2)(2^2 - 4^2)] \quad (5.13)
\end{aligned}$$

(5.13) = 0 より

$$\frac{w_1^2 - w_3^2}{w_2^2 - w_4^2} = \frac{w_1'^2 - w_3'^2}{w_2'^2 - w_4'^2}$$

(jkl n) の置換をとって

桂 重俊

$$\frac{w_j^2 - w_k^2}{w_l^2 - w_n^2} = \frac{w_j'^2 - w_k'^2}{w_l'^2 - w_n'^2} \quad (5.18)$$

が成立つ。(5.18)が成立つためには

$$\begin{aligned} w_j^2 &= p(u - u_j) \\ w_j'^2 &= p'(u' - u_j) \end{aligned} \quad (5.19)$$

が成立てばよい。(5.6)より

$$\frac{w_j''^2 - w_k''^2}{w_l''^2 - w_n''^2} = \frac{w_j^2 - w_k^2}{w_l^2 - w_n^2}$$

も成立つから

$$w_j''^2 = p''(u'' - u_j) \quad (5.20)$$

も成立つ。

(5.7)+(5.8)に(5.19)と(5.20)をいれたものを F とおく*。

$$\begin{aligned} F &= [(u - u_4)^{1/2} (u' - u_3)^{1/2} + (u - u_3)^{1/2} (u' - u_4)^{1/2}] \\ &\quad \times [(u'' - u_1)^{1/2} - (u'' - u_2)^{1/2}] \\ &\quad + [(u - u_2)^{1/2} (u' - u_1)^{1/2} + (u - u_1)^{1/2} (u' - u_2)^{1/2}] \\ &\quad \times [(u'' - u_3)^{1/2} - (u'' - u_4)^{1/2}] \end{aligned} \quad (5.21)$$

これを

$$F = (43' - 34')(1'' - 2'') + (21' - 12')(3'' - 4'') \quad (5.21')$$

と略記する((5.7)-(5.11)と記号は同じだが内容は異なる。)

$$2 \frac{\partial}{\partial u} (u - u_4)^{1/2} (u' - u_3)^{1/2} = (u - u_4)^{-1/2} (u' - u_3)^{1/2}$$

の右辺を $\frac{3'}{4}$ と略記する。(5.21')を u で偏微分すると

$$2 \frac{\partial F}{\partial u} = \left(\frac{3'}{4} + \frac{4'}{3}\right)(1'' - 2'') + \left(\frac{1'}{2} - \frac{2'}{1}\right)(3'' - 4'')$$

* 以下(5.23)まで守田徹氏の方法による。

$$=(3''-4'')\left[\frac{33'+44'}{34}\frac{12'-21'}{43'+34'}+\frac{11'-22'}{21}\right]$$

同様に

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial F}{\partial u'} &= \left(\frac{4}{3'}+\frac{3}{4'}\right)(1''-2'')+\left(\frac{2}{1'}-\frac{1}{2'}\right)(3''-4'') \\ &= (3''-4'')\left[\frac{33'+44'}{3'4'}\frac{12'-21'}{43'+34'}+\frac{22'-11'}{1'2'}\right] \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}/\frac{\partial F}{\partial u'} &= \frac{1'2'3'4'}{1234} \\ &\times \frac{(33'+44')(12'-1'2)12+(11'-22')34(43'+34')}{(33'+44')(12'-1'2)1'2'+(11'-22')3'4'(43'+34')} \\ &= \frac{1'2'3'4'}{1234} \\ &\times \frac{(33'+44')(1^222'-11'2^2)+(11'-22')(33'4^2+3^244')}{(33'+44')(11'2'^2-1'^222')+(22'-11')(3'^244'+33'4'^2)} \\ &= \frac{1'2'3'4'}{1234} \\ &\times \frac{22'33'(1^2-4^2)-33'11'(2^2-4^2)+44'22'(1^2-3^2)+44'11'(3^2-2^2)}{22'33'(4'^2-1'^2)-33'11'(4'^2-2'^2)+44'22'(3'^2-1'^2)+44'11'(2'^2-3'^2)} \\ 1^2-4^2 &= (u-u_1)-(u-u_4)=(u_4-u_1) \\ 1'^2-4'^2 &= (u'-u_1)-(u'-u_4)=(u_4-u_1) \end{aligned}$$

等であるから

$$\frac{\partial F}{\partial u}/\frac{\partial F}{\partial u'} = -\frac{1'2'3'4'}{1234} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial u''}{\partial u} = -\frac{\partial F/\partial u}{\partial F/\partial u''}$$

$$\frac{\partial u''}{\partial u'} = -\frac{\partial F/\partial u'}{\partial F/\partial u''}$$

であるから

$$\frac{1}{g(u)}\frac{\partial u''}{\partial u} + \frac{1}{g(u')}\frac{\partial u''}{\partial u'} = 0 \quad (5.23)$$

桂 重俊

が成立つ。ここに

$$g(u) = \text{const} [(u-u_j)(u-u_k)(u-u_l)(u-u_n)]^{-1/2} \quad (5.23')$$

である。

$$\frac{dv}{du} = g(u), \quad \frac{dv'}{du'} = g(u') \quad (5.24)$$

であるような新しい変数 v, v' を導入すると

$$v = \int \frac{du}{[(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)(u-u_4)]^{1/2}} \quad (5.25)$$

$u > u_4 > u_3 > u_2 > u_1$ とするとこの積分は第1種楕円積分で表わされる。(森口他, 数学公式 I, p. 147)

$$v = \frac{2}{[(u_4-u_2)(u_3-u_1)]^{1/2}} F(\varphi, l) \quad (5.26)$$

ここに

$$\varphi = \sin^{-1} \left[\frac{(u_3-u_1)(u-u_4)}{(u_4-u_1)(u-u_3)} \right]^{1/2} \quad (5.27)$$

$$l = \left[\frac{(u_3-u_2)(u_4-u_1)}{(u_4-u_2)(u_3-u_1)} \right]^{1/2} \quad (5.28)$$

$$\text{sn}(v, l) = \sin \varphi = \sin \text{am}(v, l)$$

であるから

$$\text{sn}^2(v, l) = \sin^2 \varphi = \frac{(u_3-u_1)(u-u_4)}{(u_4-u_1)(u-u_3)}$$

これから u を求めると

$$\begin{aligned} & (u_4u - u_4u_3 - u_1u + u_1u_3) \text{sn}^2(v, l) \\ &= (u_3u - u_3u_4 - u_1u + u_1u_4) \\ & u = \frac{u_4(u_3-u_1) - u_3(u_4-u_1) \text{sn}^2(v, l)}{(u_3-u_1) - (u_4-u_1) \text{sn}^2(v, l)} \end{aligned} \quad (5.29)$$

ここで

$$\text{sn}^2(\zeta, l) = \frac{u_1-u_3}{u_1-u_4} \quad (5.30)$$

となるようなパラメタ ζ を導入すると

$$u = \frac{u_4 \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell) - u_3 \operatorname{sn}^2(v, \ell)}{\operatorname{sn}^2(\zeta, \ell) - \operatorname{sn}^2(v, \ell)} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} w_1^2 : w_2^2 : w_3^2 : w_4^2 &= (u - u_1) : (u - u_2) : (u - u_3) : (u - u_4) \\ &= [(u_4 - u_1) \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell) - (u_3 - u_1) \operatorname{sn}^2(v, \ell)] \\ &\quad : [(u_4 - u_2) \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell) - (u_3 - u_2) \operatorname{sn}^2(v, \ell)] \\ &\quad : [(u_4 - u_3) \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell)] \\ &\quad : [-(u_3 - u_4) \operatorname{sn}^2(v, \ell)] \\ &= \left[\frac{u_4 - u_1}{u_4 - u_3} - \frac{u_3 - u_1 \operatorname{sn}^2(v, \ell)}{u_4 - u_3 \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell)} \right] \\ &\quad : \left[\frac{u_4 - u_2}{u_4 - u_3} - \frac{u_3 - u_2 \operatorname{sn}^2(v, \ell)}{u_4 - u_3 \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell)} \right] \\ &\quad : 1 : \frac{\operatorname{sn}^2(v, \ell)}{\operatorname{sn}^2(\zeta, \ell)} \end{aligned} \quad (5.32)$$

右辺第1項

$$\begin{aligned} &= \frac{(u_4 - u_1) \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell) - (u_3 - u_1) \operatorname{sn}^2(v, \ell)}{(u_4 - u_3) \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell)} \\ &= \frac{\operatorname{sn}^2(\zeta, \ell) - \frac{u_3 - u_1}{u_4 - u_1} \operatorname{sn}^2(v, \ell)}{\frac{-u_3 + u_1 + u_4 - u_1}{u_4 - u_1} \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell)} \\ &= \frac{\operatorname{sn}^2(\zeta, \ell) [1 - \operatorname{sn}^2(v, \ell)]}{-\operatorname{sn}^4(\zeta, \ell) + \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell)} \\ &= \frac{1 - \operatorname{sn}^2(v, \ell)}{1 - \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell)} = \frac{\operatorname{cn}^2(v, \ell)}{\operatorname{cn}^2(\zeta, \ell)} \end{aligned} \quad (5.33)$$

右辺第2項

$$\begin{aligned} &= \frac{(u_4 - u_2) \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell) - (u_3 - u_2) \operatorname{sn}^2(v, \ell)}{(u_4 - u_3) \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell)} \\ &= \frac{(u_4 - u_2) \operatorname{sn}^2(\zeta, \ell) - (u_3 - u_2) \operatorname{sn}^2(v, \ell)}{\operatorname{sn}^2(\zeta, \ell) [(u_4 - u_2) - (u_3 - u_2)]} \end{aligned}$$

桂 重俊

$$\begin{aligned}
& \frac{(u_4 - u_2) \frac{u_3 - u_1}{u_4 - u_1} - (u_3 - u_2) \operatorname{sn}^2(v, l)}{(u_4 - u_2) \frac{u_3 - u_1}{u_4 - u_1} - (u_3 - u_2) \operatorname{sn}^2(\zeta, l)} \\
&= \frac{1 - \frac{u_3 - u_2}{u_4 - u_2} \frac{u_4 - u_1}{u_3 - u_1} \operatorname{sn}^2(v, l)}{1 - \frac{u_3 - u_2}{u_4 - u_2} \frac{u_4 - u_1}{u_3 - u_1} \operatorname{sn}^2(\zeta, l)} \\
&= \frac{1 - l^2 \operatorname{sn}^2(v, l)}{1 - l^2 \operatorname{sn}^2(\zeta, l)} = \frac{\operatorname{dn}^2(v, l)}{\operatorname{dn}^2(\zeta, l)} \quad (5.34)
\end{aligned}$$

故に

$$w_1 : w_2 : w_3 : w_4 = \frac{\operatorname{cn}(v, l)}{\operatorname{cn}(\zeta, l)} : \frac{\operatorname{dn}(v, l)}{\operatorname{dn}(\zeta, l)} : 1 : \frac{\operatorname{sn}(v, l)}{\operatorname{sn}(\zeta, l)} \quad (5.35)$$

これを 8-vertex model の Baxter のパラメタ表示という。6-vertex model の場合には 3 角関数であらわされる。\$l\$ と \$\zeta\$ は \$u_1, u_2, u_3, u_4\$ により, \$v\$ は \$u\$ にもよっている。ゆえに同じ \$l\$ と \$\zeta\$ をもち, 異なる \$v\$ をもつ任意の二つの transfer matrices は可換である。この関係は \$w_j\$ に制限をつけるものではない。\$w_j\$ が与えられたときパラメータ \$l, \zeta, v\$ は次式により定まる。

$$l^2 = \frac{(w_1^2 - w_4^2)(w_2^2 - w_3^2)}{(w_1^2 - w_3^2)(w_2^2 - w_4^2)} \quad (5.36)$$

$$\operatorname{sn}^2(\zeta, l) = \frac{w_1^2 - w_3^2}{w_1^2 - w_4^2} \quad (5.37)$$

$$\operatorname{sn}(v, l) = \frac{w_4}{w_3} \operatorname{sn}(\zeta, l) \quad (5.38)$$

(5.35) と同様に

$$w'_1 : w'_2 : w'_3 : w'_4 = \frac{\operatorname{cn}(v', l)}{\operatorname{cn}(\zeta, l)} : \frac{\operatorname{dn}(v', l)}{\operatorname{dn}(\zeta, l)} : 1 : \frac{\operatorname{sn}(v', l)}{\operatorname{sn}(\zeta, l)} \quad (5.39)$$

が得られる。\$l, \zeta\$ は \$w_j\$ をきめるパラメーターと共通で \$v\$ が異なる。(5.35) と (5.39) を (5.6) に入れると \$w''_j\$ の比が

$$\begin{aligned}
& w''_1 : w''_2 : w''_3 : w''_4 \\
&= \frac{\operatorname{cn}(v - v' + \zeta, l)}{\operatorname{cn}(\zeta, l)} : \frac{\operatorname{dn}(v - v' + \zeta, l)}{\operatorname{dn}(\zeta, l)} : 1 : \frac{\operatorname{sn}(v - v' + \zeta, l)}{\operatorname{sn}(\zeta, l)} \quad (5.40)
\end{aligned}$$

と求まる。(証明は Appendix にある)

(5.35), (5.40), に対して次の Landen 変換

$$k = \frac{1-l}{1+l} \quad \eta = \frac{i\zeta}{1+k} \quad \lambda = \frac{iv}{1+k} \quad \mu = \frac{iv'}{1+k} \quad (5.41)$$

を行うと

$$\begin{aligned} & (w_4 + w_3) : (w_4 - w_3) : (w_1 + w_2) : (w_1 - w_2) \\ &= \operatorname{sn}(\lambda + \eta, k) : \operatorname{sn}(\lambda - \eta, k) : \operatorname{sn}(2\eta, k) \\ & : k \operatorname{sn}(2\eta, k) \operatorname{sn}(\lambda - \eta, k) \operatorname{sn}(\lambda + \eta, k) \end{aligned} \quad (5.42)$$

w' の組に対して λ の代りに μ の入った (5.42) と同型の関係式が成立つ。 w'' の組については

$$\begin{aligned} & (w_4'' + w_3'') : (w_4'' - w_3'') : (w_1'' + w_2'') : (w_1'' - w_2'') \\ &= \operatorname{sn}(\lambda - \mu + 2\eta, k) : \operatorname{sn}(\lambda - \mu, k) : \operatorname{sn}(2\eta, k) \\ & : k \operatorname{sn}(2\eta, k) \operatorname{sn}(\lambda - \mu, k) \operatorname{sn}(\lambda - \mu + 2\eta, k) \end{aligned} \quad (5.43)$$

が得られる (証略) このパラメータ表示を用いると (k は省略して記す)

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} a(\lambda, \mu) &= \operatorname{sn}(\lambda - \mu + 2\eta) \\ b(\lambda, \mu) &= \operatorname{sn} 2\eta \\ c(\lambda, \mu) &= \operatorname{sn}(\lambda - \mu) \\ d(\lambda, \mu) &= k \operatorname{sn} 2\eta \operatorname{sn}(\lambda - \mu) \operatorname{sn}(\lambda - \mu + 2\eta) \end{aligned} \quad (5.45)$$

となる。

(5.25) 以下で $u > u_4 > u_3 > u_2 > u_1$ と仮定したことは

$$0 \leq w_4 < w_3 < w_2 < w_1 \quad (5.46)$$

を仮定することと同じである。この領域を basic domain という。状態和 $Z(w_1, w_2, w_3, w_4)$ は (1, 2, 3, 4) のすべての置換 (j, k, l, n) について

$$Z(w_1, w_2, w_3, w_4) = Z(\pm w_j, \pm w_k, \pm w_l, \pm w_n) \quad (5.47)$$

の対称性をもつので (5.46) の領域だけ求めればよいのである。(5.47) の証明は省略するが (3.15) より得られる

桂 重俊

$$\begin{aligned}
\sigma^1 \mathcal{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4) \sigma^1 &= \mathcal{L}_n(w_1, -w_2, -w_3, w_4) \\
\sigma^2 \mathcal{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4) \sigma^2 &= \mathcal{L}_n(-w_1, w_2, -w_3, w_4) \\
\sigma^3 \mathcal{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4) \sigma^3 &= \mathcal{L}_n(-w_1, -w_2, w_3, w_4)
\end{aligned} \tag{5.48}$$

を用いて行うことができる。

温度によって w_j の大小関係は変りうるので与えられた w_1, w_2, w_3, w_4 が (5.46) をみたしていないときには w_j の名前または符号をつけかえてから以下に進めばよい。温度をかえたときある温度で $w_2 = w_3$ となり、その温度の上、下でもとの w_2, w_3 の大きさの順序が反転する温度が臨界温度 T_C を与える。

§6. 6-vertex model

以下 Baxter の parametrization を 6-vertex model の場合に適用し、 $T(\lambda)$ の固有値および固有ベクトルを求める。このとき

$$\begin{aligned}
v_7 &= v_8 = 0 \\
w_1 &= w_2 \\
l^2 &= 1 \quad l = 1 \\
k &= 0 \quad \eta = i\zeta \quad \lambda = iv \\
\operatorname{sn}(u, 0) &= \sin u, \quad \operatorname{sn}(u, 1) = \operatorname{th} u. \\
\operatorname{cn}(u, 0) &= \cos u, \quad \operatorname{dn}(u, 0) = 1 \\
\operatorname{cn}(u, 1) &= (1 - \operatorname{th}^2 u)^{1/2}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

である。KDP モデル、F モデル、Sutherland モデル、Wu モデルは zero field 6-vertex モデルの特別の場合である。

(5.42) は

$$\begin{aligned}
&(w_4 + w_3) : (w_4 - w_3) : (w_1 + w_2) : (w_1 - w_2) \\
&= \sin(\lambda + \eta) : \sin(\lambda - \eta) : \sin 2\eta : 0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

w' に対しては (6.2) の λ の代りに μ の入った式が成立つ。

$$\begin{aligned}
&(w_4'' + w_3'') : (w_4'' - w_3'') : (w_1'' + w_2'') : (w_1'' - w_2'') \\
&= \sin(\lambda - \mu + 2\eta) : \sin(\lambda - \mu) : \sin 2\eta : 0
\end{aligned} \tag{6.3}$$

となる。また、

	1	2	3	4	5	6	7	8
KDP	0	0	ε	ε	ε	ε	∞	∞
F	ε	ε	ε	ε	0	0	∞	∞
Sutherland	$-\frac{\delta}{2}$	$-\frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{2}$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	∞	∞
Wu	0	∞	ε	ε	ε	ε	∞	∞

Fig. 8

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$b = b(\lambda, \mu) = \frac{\sin 2\eta}{\sin(\lambda - \mu + 2\eta)} \quad (6.5)$$

$$c = c(\lambda, \mu) = \frac{\sin(\lambda - \mu)}{\sin(\lambda - \mu + 2\eta)} \quad (6.6)$$

$$\frac{b(\lambda, \mu)}{c(\lambda, \mu)} = -\frac{b(\mu, \lambda)}{c(\mu, \lambda)} \quad (6.7)$$

であることに注意しておく。

$$\mathcal{L}_n(\lambda) = \begin{bmatrix} w_4 \sigma_n^4 + w_3 \sigma_n^3 & w_1 (\sigma_n^1 - i \sigma_n^2) \\ w_1 (\sigma_n^2 + i \sigma_n^3) & w_4 \sigma_n^4 - w_3 \sigma_n^3 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ r_n & \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_4 + w_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_4 - w_3 & w_1 + w_2 & 0 \\ 0 & w_1 + w_2 & w_4 - w_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_4 + w_3 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\alpha_n = \begin{bmatrix} w_4 + w_3 & 0 \\ 0 & w_4 - w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\lambda + \eta) & 0 \\ 0 & \sin(\lambda - \eta) \end{bmatrix}$$

桂 重俊

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_1 + w_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sin 2\eta & 0 \end{bmatrix} \\
r_n &= \begin{bmatrix} 0 & w_1 + w_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin 2\eta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\delta_n &= \begin{bmatrix} w_4 - w_3 & 0 \\ 0 & w_4 + w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\lambda - \eta) & 0 \\ 0 & \sin(\lambda + \eta) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

である。

また

$$\mathcal{T}_N(\lambda) \equiv \prod_{n=1}^N \mathcal{L}_n(\lambda) \tag{6.11}$$

$$= \begin{bmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{bmatrix} \tag{6.11'}$$

$$T_N(\lambda) = \text{tr } \mathcal{T}_N(\lambda) = A_N(\lambda) + D_N(\lambda) \tag{6.12}$$

である。 $A_N(\lambda) \cdots D_N(\lambda)$ は $2^N \times 2^N$ の行列である。以下 N は省略する。 $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$ は前節までより

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu)(\mathcal{T}(\lambda) \otimes \mathcal{T}(\mu)) = (\mathcal{T}(\mu) \otimes \mathcal{T}(\lambda)) \mathcal{R}(\lambda, \mu) \tag{6.13}$$

をみたすように定められている。(6.13)を計算すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\lambda) \otimes \mathcal{T}(\mu) &= \begin{bmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} A(\mu) & B(\mu) \\ C(\mu) & D(\mu) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A(\lambda)A(\mu) & A(\lambda)B(\mu) & B(\lambda)A(\mu) & B(\lambda)B(\mu) \\ A(\lambda)C(\mu) & A(\lambda)D(\mu) & B(\lambda)C(\mu) & B(\lambda)D(\mu) \\ C(\lambda)A(\mu) & C(\lambda)B(\mu) & D(\lambda)A(\mu) & D(\lambda)B(\mu) \\ C(\lambda)C(\mu) & C(\lambda)D(\mu) & D(\lambda)C(\mu) & D(\lambda)D(\mu) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu)(\mathcal{T}(\lambda) \otimes \mathcal{T}(\mu))$$

$$= \begin{bmatrix} A(\lambda)A(\mu) & A(\lambda)B(\mu) \\ bA(\lambda)C(\mu) + cC(\lambda)A(\mu) & bA(\lambda)D(\mu) + cC(\lambda)B(\mu) \\ cA(\lambda)C(\mu) + bC(\lambda)A(\mu) & cA(\lambda)D(\mu) + bC(\lambda)B(\mu) \\ C(\lambda)C(\mu) & C(\lambda)D(\mu) \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc} B(\lambda)A(\mu) & B(\lambda)B(\mu) \\ bB(\lambda)C(\mu) + cD(\lambda)A(\mu) & bB(\lambda)D(\mu) + cD(\lambda)B(\mu) \\ cB(\lambda)C(\mu) + bD(\lambda)A(\mu) & cB(\lambda)B(\mu) + bD(\lambda)B(\mu) \\ D(\lambda)C(\mu) & D(\lambda)D(\mu) \end{array} \right] \quad (6.15)$$

$$(\mathcal{T}(\mu) \otimes \mathcal{T}(\lambda)) \mathcal{R}(\lambda, \mu)$$

$$= \left[\begin{array}{cc} A(\mu)A(\lambda) & bA(\mu)B(\lambda) + cB(\mu)A(\lambda) \\ A(\mu)C(\lambda) & bA(\mu)D(\lambda) + cB(\mu)C(\lambda) \\ C(\mu)A(\lambda) & bC(\mu)B(\lambda) + cD(\mu)A(\lambda) \\ C(\mu)C(\lambda) & bC(\mu)D(\lambda) + cD(\mu)C(\lambda) \end{array} \right] \quad (6.16)$$

$$\left[\begin{array}{cc} cA(\mu)B(\lambda) + bB(\mu)A(\lambda) & B(\mu)B(\lambda) \\ cA(\mu)D(\lambda) + bB(\mu)C(\lambda) & B(\mu)D(\lambda) \\ cC(\mu)B(\lambda) + bD(\mu)A(\lambda) & D(\mu)B(\lambda) \\ cC(\mu)D(\lambda) + bD(\mu)C(\lambda) & D(\mu)D(\lambda) \end{array} \right]$$

(6.15)と(6.16)の各要素が等しいことより

$$\begin{aligned} [A(\lambda), A(\mu)] &= 0 \\ [B(\lambda), B(\mu)] &= 0 \\ [C(\lambda), C(\mu)] &= 0 \\ [D(\lambda), D(\mu)] &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$B(\lambda)A(\mu) = b(\lambda, \mu)B(\mu)A(\lambda) + c(\lambda, \mu)A(\mu)B(\lambda) \quad (6.18)$$

$$B(\mu)D(\lambda) = b(\lambda, \mu)B(\lambda)A(\mu) + c(\lambda, \mu)D(\lambda)B(\mu) \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} c(\lambda, \mu)[C(\lambda), B(\mu)] &= b(\lambda, \mu)(A(\mu)D(\lambda) - A(\lambda)D(\mu)) \\ c(\lambda, \mu)[D(\lambda), A(\mu)] &= b(\lambda, \mu)(B(\mu)C(\lambda) - B(\lambda)C(\mu)) \end{aligned} \quad (6.20)$$

である*。

(6.9), (6.10) より

$$e_n^+ \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_n^- = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

とすると

$$\begin{aligned} \alpha_n(\lambda) e_n^+ &= \alpha(\lambda) e_n^+ \\ \delta_n(\lambda) e_n^+ &= \delta(\lambda) e_n^+ \end{aligned} \quad (6.22)^{**}$$

桂 重俊

$$\begin{aligned} r_n e_n^+ &= 0 \\ \alpha(\lambda) &= \sin(\lambda + \eta) \quad \delta(\lambda) = \sin(\lambda - \eta) \end{aligned} \quad (6.23)$$

となる。 e_n^+ を local vacuum という。これは $\mathcal{L}_n(\lambda)$ の左下の項を消す。

$$\mathcal{Q} \equiv e_1^+ \otimes e_2^+ \otimes \cdots \otimes e_N^+ \quad (6.24)$$

とすると $\mathcal{Q}$ は $A(\lambda)$, $D(\lambda)$ の固有ベクトルである。

$$A(\lambda)\mathcal{Q} = \alpha^N(\lambda)\mathcal{Q} \quad (6.25)$$

$$D(\lambda)\mathcal{Q} = \delta^N(\lambda)\mathcal{Q} \quad (6.26)$$

$$C(\lambda)\mathcal{Q} = 0 \quad (6.27)$$

前頁脚註

* 次の形の方が使いやすい形である。

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{C(\mu, \lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{b(\mu, \lambda)}{C(\mu, \lambda)} B(\lambda)A(\mu) \quad (6.18')$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{C(\lambda, \mu)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{b(\lambda, \mu)}{C(\lambda, \mu)} B(\lambda)D(\mu) \quad (6.19')$$

$\beta_n e_n^+ = (w_1 + w_2) e_n^- = \sin 2\eta e_n^-$ で β_n は S_n^- に類似の演算子である。 $B(\lambda)$ は $N=3$ のとき explicit に $\mathcal{T}_3$ を作ると

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3 &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ r_1 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ r_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ r_3 & \delta_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ r_1 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 r_3 & \alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \delta_3 \\ r_2 \alpha_3 + \delta_2 r_3 & r_2 \beta_3 + \delta_2 \delta_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \beta_2 r_3 + \beta_1 r_2 \alpha_3 + \beta_1 \delta_2 r_3 & \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 \delta_3 + \beta_1 r_2 \beta_3 + \beta_1 \delta_2 \delta_3 \\ r_1 \alpha_2 \alpha_3 + r_1 \beta_2 r_3 + \delta_1 r_2 \alpha_3 + \delta_1 \delta_2 r_3 & r_1 \alpha_2 \beta_3 + r_1 \beta_2 \delta_3 + \delta_1 r_2 \beta_3 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに r_n が一つでもあると $\mathcal{Q}$ に作用したとき消えるから

$$A\mathcal{Q} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \mathcal{Q} = \alpha^3 \mathcal{Q}$$

$$D\mathcal{Q} = \delta_1 \delta_2 \delta_3 \mathcal{Q} = \delta^3 \mathcal{Q}$$

$$C\mathcal{Q} = 0$$

$$\begin{aligned} B\mathcal{Q} &= (\alpha_1 \alpha_2 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 \delta_3 + \beta_1 \delta_2 \delta_3) \mathcal{Q} \\ &= \sin 2\eta [\alpha^2 e_1^+ e_2^+ e_3^- + \alpha \delta e_1^+ e_2^- e_3^+ + \delta^2 e_1^- e_2^+ e_3^+] \end{aligned}$$

B は 1 d Heisenberg モデルでいえば 1 ケのスピンを反転した状態の一次結合を作る演算子である。

$T(\lambda)$ の固有ベクトル Φ を次の形におく。

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m) = \prod_{l=1}^m B(\lambda_l) \mathcal{Q} \quad m = 0, 1, 2 \cdots N \quad (6.28)$$

λ_l は 1 d Heisenberg モデルの場合の運動量に相当し, l はその量子数である。 $T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ を作用させると

$$\begin{aligned} & [A(\lambda) + D(\lambda)] \prod_{l=1}^m B(\lambda_l) \mathcal{Q} \\ &= \left\{ \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda)} B(\lambda_1) A(\lambda) - \frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)} B(\lambda) A(\lambda_1) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{c(\lambda, \lambda_1)} B(\lambda_1) D(\lambda) - \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)} B(\lambda) D(\lambda_1) \right\} \prod_{l=2}^m B(\lambda_l) \mathcal{Q} \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda)} B(\lambda_1) \left\{ \frac{1}{c(\lambda_2, \lambda)} B(\lambda_2) A(\lambda) - \frac{b(\lambda_2, \lambda)}{c(\lambda_2, \lambda)} B(\lambda) A(\lambda_2) \right\} \\ &- \frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)} B(\lambda) \left\{ \frac{1}{c(\lambda_2, \lambda_1)} B(\lambda_2) A(\lambda_1) - \frac{b(\lambda_2, \lambda_1)}{c(\lambda_2, \lambda_1)} B(\lambda_1) A(\lambda_2) \right\} \\ &+ \frac{1}{c(\lambda, \lambda_1)} B(\lambda_1) \left\{ \frac{1}{c(\lambda, \lambda_2)} B(\lambda_2) D(\lambda) - \frac{b(\lambda, \lambda_2)}{c(\lambda, \lambda_2)} B(\lambda) D(\lambda_2) \right\} \\ &- \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)} B(\lambda) \left\{ \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda_2)} B(\lambda_2) D(\lambda_1) - \frac{b(\lambda_1, \lambda_2)}{c(\lambda_1, \lambda_2)} B(\lambda_1) D(\lambda_2) \right\} \\ &\times \prod_{l=3}^m B(\lambda_l) \mathcal{Q} \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda)} \frac{1}{c(\lambda_2, \lambda)} B(\lambda_1) B(\lambda_2) A(\lambda) B(\lambda_3) \right. \\ &- \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda)} \frac{b(\lambda_2, \lambda)}{c(\lambda_2, \lambda)} B(\lambda_1) B(\lambda) A(\lambda_2) B(\lambda_3) \\ &- \frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)} \frac{1}{c(\lambda_2, \lambda_1)} B(\lambda) B(\lambda_2) A(\lambda_1) B(\lambda_3) \\ &+ \frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)} \frac{b(\lambda_2, \lambda_1)}{c(\lambda_2, \lambda_1)} B(\lambda) B(\lambda_1) A(\lambda_2) B(\lambda_3) \\ &+ \left. \frac{1}{c(\lambda, \lambda_1)} \frac{1}{c(\lambda, \lambda_2)} B(\lambda_1) B(\lambda_2) D(\lambda) B(\lambda_3) \right\} \end{aligned}$$

桂 重俊

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{c(\lambda, \lambda_1)} \frac{b(\lambda, \lambda_2)}{c(\lambda, \lambda_2)} B(\lambda_1) B(\lambda) D(\lambda_2) B(\lambda_3) \\
& - \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)} \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda_2)} B(\lambda) B(\lambda_2) D(\lambda_1) B(\lambda_3) \\
& + \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)} \frac{b(\lambda_1, \lambda_2)}{c(\lambda_1, \lambda_2)} B(\lambda) B(\lambda_1) D(\lambda_2) B(\lambda_3) \left\} \prod_{l=4}^m B(\lambda_l) \mathcal{Q} \quad (6.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \left\{ \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda)} \frac{1}{c(\lambda_2, \lambda)} B(\lambda_1) B(\lambda_2) \left[\frac{1}{c(\lambda_3, \lambda)} B(\lambda_3) A(\lambda) - \frac{b(\lambda_3, \lambda)}{c(\lambda_3, \lambda)} B(\lambda) A(\lambda_3) \right] \right. \\
& - \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda)} \frac{b(\lambda_2, \lambda)}{c(\lambda_2, \lambda)} B(\lambda_1) B(\lambda) \left[\frac{1}{c(\lambda_3, \lambda_2)} B(\lambda_3) A(\lambda_2) - \frac{b(\lambda_3, \lambda_2)}{c(\lambda_3, \lambda_2)} B(\lambda_2) A(\lambda_3) \right] \\
& - \frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)} \frac{1}{c(\lambda_2, \lambda_1)} B(\lambda) B(\lambda_2) \left[\frac{1}{c(\lambda_3, \lambda_1)} B(\lambda_3) A(\lambda_1) - \frac{b(\lambda_3, \lambda_1)}{c(\lambda_3, \lambda_1)} B(\lambda_1) A(\lambda_3) \right] \\
& + \frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)} \frac{b(\lambda_2, \lambda_1)}{c(\lambda_2, \lambda_1)} B(\lambda) B(\lambda_1) \left[\frac{1}{c(\lambda_3, \lambda_2)} B(\lambda_3) A(\lambda_2) - \frac{b(\lambda_3, \lambda_2)}{c(\lambda_3, \lambda_2)} B(\lambda_2) A(\lambda_3) \right] \\
& + \frac{1}{c(\lambda, \lambda_1)} \frac{1}{c(\lambda, \lambda_2)} B(\lambda_1) B(\lambda_2) \left[\frac{1}{c(\lambda, \lambda_3)} B(\lambda_3) D(\lambda) - \frac{b(\lambda, \lambda_3)}{c(\lambda, \lambda_3)} B(\lambda) D(\lambda_3) \right] \\
& - \frac{1}{c(\lambda, \lambda_1)} \frac{b(\lambda, \lambda_2)}{c(\lambda, \lambda_2)} B(\lambda_1) B(\lambda) \left[\frac{1}{c(\lambda_2, \lambda_3)} B(\lambda_3) D(\lambda_2) - \frac{b(\lambda_2, \lambda_3)}{c(\lambda_2, \lambda_3)} B(\lambda_2) D(\lambda_3) \right] \\
& - \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)} \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda_2)} B(\lambda) B(\lambda_2) \left[\frac{1}{c(\lambda_1, \lambda_3)} B(\lambda_3) D(\lambda_1) - \frac{b(\lambda_1, \lambda_3)}{c(\lambda_1, \lambda_3)} B(\lambda_1) D(\lambda_3) \right] \\
& + \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)} \frac{b(\lambda_1, \lambda_2)}{c(\lambda_1, \lambda_2)} B(\lambda) B(\lambda_1) \left[\frac{1}{c(\lambda_2, \lambda_3)} B(\lambda_3) D(\lambda_2) - \frac{b(\lambda_2, \lambda_3)}{c(\lambda_2, \lambda_3)} B(\lambda_2) D(\lambda_3) \right] \left. \right\} \\
& \times \prod_{l=4}^m B(\lambda_l) \mathcal{Q} \quad (6.32)
\end{aligned}$$

これを繰返すと 2^m 個の項が出る。その第 1 項は

$$\begin{aligned}
& \left[\prod_{l=1}^m \frac{1}{c(\lambda_l, \lambda)} B(\lambda_l) \right] A(\lambda) \mathcal{Q} \\
& = \left[\prod_{l=1}^m \frac{1}{c(\lambda_l, \lambda)} B(\lambda_l) \right] \alpha^{N(\lambda)} \mathcal{Q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^N(\lambda) \left[\prod_{\ell=1}^m \frac{1}{c(\lambda_\ell, \lambda)} \right] \prod_{\ell=1}^m B(\lambda_\ell) \Omega \\
&= \alpha^N(\lambda) \left[\prod_{\ell=1}^m \frac{1}{c(\lambda_\ell, \lambda)} \right] \Phi(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m)
\end{aligned} \tag{6.33}$$

第 $(2^{m-1}+1)$ 項は

$$\delta^N(\lambda) \left[\prod_{\ell=1}^m \frac{1}{c(\lambda, \lambda_\ell)} \right] \Phi(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m) \tag{6.34}$$

となる。故に残りの項が消えるように λ_ℓ が定められれば固有値 A は

$$A(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m) = \alpha^N(\lambda) \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{c(\lambda_\ell, \lambda)} + \delta^N(\lambda) \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{c(\lambda, \lambda_\ell)} \tag{6.35}$$

となり $\Phi(\lambda_1, \cdots \lambda_m)$ は固有ベクトルである。

残りの項の内 λ_1 が λ の代りに入った項 A_1 は

$$\begin{aligned}
&A_1(\lambda; \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m) \\
&= -\frac{b(\lambda_1, \lambda)}{c(\lambda_1, \lambda)} \alpha^N(\lambda_1) \prod_{\ell=2}^m \frac{1}{c(\lambda_\ell, \lambda_1)} - \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)} \delta^N(\lambda_1) \prod_{\ell=2}^m \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda_\ell)} \\
&= \frac{b(\lambda, \lambda_1)}{c(\lambda, \lambda_1)} \left(\alpha^N(\lambda_1) \prod_{\ell=2}^m \frac{1}{c(\lambda_\ell, \lambda_1)} - \delta^N(\lambda_1) \prod_{\ell=2}^m \frac{1}{c(\lambda_1, \lambda_\ell)} \right)
\end{aligned} \tag{6.36}$$

である。 $B(\lambda)$ と $B(\mu)$ は可換であるから λ_j が λ の代りに入った項は

$$\begin{aligned}
&A_j(\lambda; \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m) \\
&= \frac{b(\lambda, \lambda_j)}{c(\lambda, \lambda_j)} \left(\alpha^N(\lambda_j) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^m \frac{1}{c(\lambda_\ell, \lambda_j)} - \delta^N(\lambda_j) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^m \frac{1}{c(\lambda_j, \lambda_\ell)} \right)
\end{aligned} \tag{6.37}$$

となる。故に

$$A_j(\lambda; \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots m \tag{6.38}$$

すなわち

$$\frac{\alpha^N(\lambda_j)}{\delta^N(\lambda_j)} = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^m \frac{c(\lambda_\ell, \lambda_j)}{c(\lambda_j, \lambda_\ell)} \tag{6.39}$$

であるように λ_j が求められたとき、 $A(\lambda; \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m)$ は固有値、 $\prod B(\lambda_\ell) \Omega$ は固有ベクトルである。

(6.35) および (6.37) はあらわに書くと

桂 重俊

$$\begin{aligned}
& A(\lambda; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \\
&= \sin^N(\lambda + \eta) \prod_{\ell=1}^m \frac{\sin(\lambda_\ell - \lambda + 2\eta)}{\sin(\lambda_j - \lambda)} \\
&+ \sin^N(\lambda - \eta) \prod_{\ell=1}^m \frac{\sin(\lambda - \lambda_\ell + 2\eta)}{\sin(\lambda - \lambda_\ell)} \quad (6.40)
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
& \sin^N(\lambda_j + \eta) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^m \frac{\sin(\lambda_j - \lambda_\ell - 2\eta)}{\sin(\lambda_j - \lambda_\ell)} \\
&= \sin^N(\lambda_j - \eta) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^m \frac{\sin(\lambda_j - \lambda_\ell + 2\eta)}{\sin(\lambda_j - \lambda_\ell)} \quad (6.41)
\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{\sin^N(\lambda_j + \eta)}{\sin^N(\lambda_j - \eta)} = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^m \frac{\sin(\lambda_j - \lambda_\ell + 2\eta)}{\sin(\lambda_j - \lambda_\ell - 2\eta)} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (6.42)$$

となる。(6.40)は1d Heisenberg モデルの解法に用いられた Bethe Ansatz の拡張になって居り、ここでは Yang-Baxter 関係式から自然に導かれた。

§7. 積分方程式の導出とその解法

8-vertex モデルのとき (6.35) および (6.37) に相当する式は

$$\begin{aligned}
& A(\lambda; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \\
&= h^N(\lambda + \eta) \prod_{\ell=1}^m \frac{h(\lambda_\ell - \lambda + 2\eta)}{h(\lambda_j - \lambda)} + h^N(\lambda - \eta) \prod_{\ell=1}^m \frac{h(\lambda - \lambda_\ell + 2\eta)}{h(\lambda - \lambda_\ell)} \quad (7.1)
\end{aligned}$$

$$\frac{h^N(\lambda_j + \eta)}{h^N(\lambda_j - \eta)} = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^m \frac{h(\lambda_j - \lambda_\ell + 2\eta)}{h(\lambda_j - \lambda_\ell - 2\eta)} \quad (7.2)$$

となる。ここに

$$h(\lambda) \equiv \Theta(0) H(\lambda) \Theta(\lambda) \quad (7.3)^*$$

である。(証略)

* $\Theta(\lambda + 2K) = \Theta(\lambda)$, $H(\lambda + 2K) = -H(\lambda)$, より $h(\lambda + 2K) = -h(\lambda)$, $\varphi(\lambda + 2K) = \varphi(\lambda)$, $\phi(\lambda + 2K) = \phi(\lambda)$ である。従って積分方程式が Fourier 級数でとける。

最大固有値に相当する固有関数に対しては $m = \frac{N}{2}$ であることが分る(証略)(1 d AF Heisenberg モデルのとき基底状態は半数のスピンが反転していることに対応)(7.2)の log をとると

$$\varphi(\lambda_j) = \frac{2\pi\ell_j}{N} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^m \Phi(\lambda_j - \lambda_\ell) \quad (7.4)$$

ℓ_j は整数で

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{i} \log \frac{h(\lambda + \eta)}{h(\lambda - \eta)} \quad (7.5)$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{i} \log \frac{h(\lambda + 2\eta)}{h(\lambda - 2\eta)}$$

$A_{\max}$ に対しては

$$\ell_{j+1} - \ell_j = -1 \quad (j = 1, 2, \dots, m-1, m = N/2)$$

が対応する(証略)。 $N \rightarrow \infty$ としたとき λ_j が $-K$ から K の間の分布関数を $\rho(\lambda)$ とすると ($K = K_k$ は母数 k に対する第一種完全楕円積分)

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n f(\lambda_j) = \int_{-K}^K f(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (7.7)$$

すなわち $\rho(\lambda)$ は次の積分方程式をみたす。

$$\varphi'(\lambda) = -2\pi\rho(\lambda) + \int_{-K}^K \Phi'(\lambda - \mu) \rho(\mu) d\mu \quad (7.8)$$

この積分方程式を Fourier 級数でとく。

$$\rho_m = \frac{1}{2K} \int_{-K}^K \rho(\lambda) e^{-i\pi m \lambda / K} d\lambda \quad (7.9)$$

$$\varphi_m = \frac{1}{2K} \int_{-K}^K \varphi'(\lambda) e^{-i\pi m \lambda / K} d\lambda \quad (7.10)$$

$$\Phi = \frac{1}{2K} \int_{-K}^K \Phi'(\lambda) e^{-i\pi m \lambda / K} d\lambda \quad (7.11)$$

(7.9), (7.10), (7.11) を (7.8) に入れて

$$\varphi_m = -2\pi\rho_m + 2K\rho_m\Phi_m \quad (7.12)$$

すなわち

$$\rho_m = \frac{\varphi_m}{2K\Phi_m - 2\pi} \quad (7.13)$$

桂 重俊

楕円関数の Fourier 係数は分っているので

$$\varphi_m = \begin{cases} -\pi/K & m=0 \\ \frac{\pi \operatorname{sh}(\frac{\pi m(2i\eta + K')}{2K})}{K \operatorname{sh}(\frac{\pi m K'}{2K})} & m \neq 0 \end{cases} \quad (7.14)$$

$$\phi_m = \begin{cases} -\pi/K & m=0 \\ \frac{\pi \operatorname{sh}(\frac{\pi m(4i\eta + K')}{2K})}{K \operatorname{sh}(\frac{\pi m K'}{2K})} & m \neq 0 \end{cases} \quad (7.15)$$

ゆえに

$$\rho_m = \frac{1}{4K \operatorname{ch}(\frac{\pi i m \eta}{K})} \quad (7.16)$$

これから

$$\rho(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i m \lambda / K}}{4K \operatorname{ch}(\pi i m \eta / K)} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{dn}(\lambda, \tilde{k}) \quad (7.17)$$

$A_{\max}$ に対して (7.1) の第 2 項は $O(e^{-cN})$ のオーダーであることがいえるから,

$$\begin{aligned} -\beta f &= \frac{1}{N} \log A_{\max} = \log h(\lambda + \eta) \\ &+ \frac{1}{i} \int_{-K}^K \varphi(\lambda - \alpha - \eta) \rho(\alpha) d\alpha \\ &= \log(w_1 + w_2) \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi m(K' + 2i\eta)}{2K}}{\operatorname{sh} \frac{\pi m K'}{K} \operatorname{ch} \frac{\pi m i \eta}{K}} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi m i \eta}{K} - \operatorname{ch} \frac{\pi m i \lambda}{K} \right) \end{aligned} \quad (7.19)$$

これが 8-vertex model の自由エネルギーである。

すなわち vertex weight (2.3) が与えられたとき, (2.4) で w_j を求め大きさと符号に応じて番号のつけかえを行ってから, (5.36)–(5.38) によって l, ζ, v を求め (5.41) によって k, η, λ を求める。 η, λ は純虚数になる。 k に対する完全楕円積分で $K = K_k$ と $K' = K'_k$ を求め, この K, K', λ, η を (7.19) に入れたものが求める自由エネルギーである。温度をかえて w_2 と w_3

の大小が反転すると w_j の番号のつけかえを要するためもとのパラメーターで見ると自由エネルギーの表式がかわる。この点が臨界温度 T_C である。 $w_2 \rightarrow w_3$ で ($l \rightarrow 0, K_l \rightarrow \pi/2, K'_l \rightarrow \infty, k \rightarrow 1$) 自由エネルギーの特異性部分は m を整数として $\pi/\mu \neq 2m$ ならば

$$(\beta f)_{\text{sing}} \simeq |T - T_C|^{\pi/\mu}$$

$\pi/\mu = 2m$ ならば

$$(\beta f)_{\text{sing}} \simeq (T - T_C)^{2m} \log |T - T_C|$$

であることが示されている。(証略) ここで

$$\mu = \frac{\pi \zeta}{K_l}$$

である。これは臨界指数がパラメーターの値に連続的に依存する例が存在することを示したものである。

§8. 8-vertex モデルと 1 次元 XYZ モデル

(3.4) により

$$\langle r_n \alpha_n | \mathcal{L}_n(v) | r_{n+1} \alpha'_n \rangle = \sum_{j=1}^4 w_j(v) \sigma_{r_n r_{n+1}}^j \sigma_{\alpha_n \alpha'_n}^j \quad (8.1)$$

$$\mathcal{L}_n = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} r_{n+1} & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} r_n & \alpha_n & \alpha'_n \end{array} & \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} w_4 + w_3 & 0 & 0 & w_1 - w_2 \\ 0 & w_4 - w_3 & w_1 + w_2 & 0 \\ 0 & w_1 + w_2 & w_4 - w_3 & 0 \\ w_1 - w_2 & 0 & 0 & w_4 + w_3 \end{array} \right] \end{array} \quad (8.2)$$

である。いま

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2} (w_1 - w_2 - w_3 + w_4) \\ p_2 &= \frac{1}{2} (-w_1 + w_2 - w_3 + w_4) \\ p_3 &= \frac{1}{2} (-w_1 - w_2 + w_3 + w_4) \\ p_4 &= \frac{1}{2} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \end{aligned} \quad (8.3)$$

桂 重俊

により p_1, p_2, p_3, p_4 を導入すると

$$\begin{aligned}
 w_4 + w_3 &= p_4 + p_3 \\
 w_1 + w_2 &= p_4 - p_3 \\
 w_4 - w_3 &= p_1 + p_2 \\
 w_1 - w_2 &= p_1 - p_2
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

であるから

$$\mathcal{L}_n = \begin{matrix} & r_{n+1} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ r_n & \alpha_n & \alpha'_n & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_4 + p_3 & 0 & 0 & p_1 - p_2 \\ 0 & p_1 + p_2 & p_4 - p_3 & 0 \\ 0 & p_4 - p_3 & p_1 + p_2 & 0 \\ p_1 + p_2 & 0 & 0 & p_4 + p_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{8.5}$$

(8.5)を(8.1)(8.2)とくらべると w_j を p_j にかえ, α'_n と r_{n+1} をいれかえたものになっている。したがって

$$\langle r_n \alpha_n | \mathcal{L}_n(v) | r_{n+1} \alpha'_n \rangle = \sum_{j=1}^4 p_j \sigma_{r_n \alpha_n}^j \sigma_{\alpha_n r_{n+1}}^j \tag{8.6}$$

w_j として(5.35)の parametrization を用いる。

$$w_1 = \frac{\text{cn}(v, \ell)}{\text{cn}(\zeta, \ell)}, \quad w_2 = \frac{\text{dn}(v, \ell)}{\text{dn}(\zeta, \ell)}, \quad w_3 = 1, \quad w_4 = \frac{\text{sn}(v, \ell)}{\text{sn}(\zeta, \ell)} \tag{8.7}$$

ここで ζ を定数, v を変数と考える。 $v = \zeta$ のときは $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $p_4 = 2$ であるから

$$\langle r_n \alpha_n | \mathcal{L}_n(\zeta) | r_{n+1} \alpha'_n \rangle = 2 \delta(r_n, \alpha'_n) \delta(\alpha_n, r_{n+1}) \tag{8.8}$$

となる。 $(\delta(\alpha, \alpha')$ は Kronecker のデルタ)

$$T_N = \text{tr } \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \cdots \mathcal{L}_N \tag{8.9}$$

であるから $v = \zeta$ のとき

$$\begin{aligned}
 & \langle \{\alpha\} | T_N(\zeta) | \{\alpha'\} \rangle \\
 &= 2^N \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_N} \delta(r_1, \alpha'_1) \delta(\alpha_1, r_2) \delta(r_2, \alpha'_2) \delta(\alpha_2, r_3) \cdots \delta(r_N, \alpha'_N) \delta(\alpha_N, r_1) \\
 &= 2^N \delta(\alpha_1, \alpha'_2) \delta(\alpha_2, \alpha'_3) \cdots \delta(\alpha_N, \alpha'_1)
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

すなわち $2^{-N}T_N(\zeta)$ は cyclic operator である。 $T_N(\zeta)$ の逆行列を $T_N^{-1}(\zeta)$ とすると

$$\begin{aligned} & \langle \{\alpha\} | T_N^{-1}(\zeta) | \{\alpha'\} \rangle \\ &= 2^{-N} \delta(\alpha_1, \alpha'_N) \delta(\alpha_2, \alpha'_1) \cdots \delta(\alpha_J, \alpha'_{J-1}) \delta(\alpha_{J+1}, \alpha'_J) \delta(\alpha_{J+2}, \alpha'_{J+1}) \cdots \delta(\alpha_N, \alpha'_{N-1}) \quad (8.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \because \sum_{\{\alpha''\}} \langle \{\alpha\} | T_N | \{\alpha''\} \rangle \langle \{\alpha''\} | T_N^{-1} | \{\alpha'\} \rangle \\ &= \delta(\alpha_1, \alpha'_1) \delta(\alpha_2, \alpha'_2) \cdots \delta(\alpha_N, \alpha'_N) = \langle \{\alpha\} | \{\alpha'\} \rangle \end{aligned}$$

$T_N^{-1} T_N$ も同様。

いま

$$\left[\frac{d}{dv} \log T_N(v) \right]_{v=\zeta} = T_N^{-1}(\zeta) \left[\frac{d}{dv} T_N(v) \right]_{v=\zeta} \quad (8.12)$$

を計算する。まず

$$\begin{aligned} & \langle \{\alpha\} | \left[\frac{d}{dv} T_N(v) \right]_{v=\zeta} | \{\alpha'\} \rangle \\ &= 2^{N-1} \sum_{J=1}^N \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_N} \delta(r_1, \alpha'_1) \delta(\alpha_1, r_2) \delta(r_2, \alpha'_2) \delta(\alpha_2, r_3) \cdots \delta(r_{J-1}, \alpha'_{J-1}) \delta(\alpha_{J-1}, r_J) \\ & \times \langle r_J \alpha_J | \left[\frac{d}{dv} \mathcal{L}_J(v) \right]_{v=\zeta} | r_{J+1} \alpha'_J \rangle \delta(r_{J+1}, \alpha'_{J+1}) \delta(\alpha_{J+1}, r_{J+2}) \cdots \\ & \times \delta(r_N, \alpha'_N) \delta(\alpha_N, r_1) \\ &= 2^{N-1} \sum_{J=1}^N \delta(\alpha'_1, \alpha_N) \delta(\alpha'_2, \alpha_1) \cdots \delta(\alpha'_{J-1}, \alpha_{J-2}) \\ & \times \langle \alpha_{J-1} \alpha_J | \left[\frac{d}{dv} \mathcal{L}_J(v) \right]_{v=\zeta} | \alpha'_{J+1} \alpha'_J \rangle \delta(\alpha'_{J+2}, \alpha_{J+1}) \cdots \delta(\alpha'_N, \alpha_{N-1}) \quad (8.13) \end{aligned}$$

(8.12) はゆえに

$$\begin{aligned} & \langle \{\alpha\} | (8.12) | \{\alpha'\} \rangle \\ &= \sum_{\{\alpha''\}} \langle \{\alpha\} | T_N^{-1}(\zeta) | \{\alpha''\} \rangle \langle \{\alpha''\} | \left[\frac{d}{dv} T_N(v) \right]_{v=\zeta} | \{\alpha'\} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_J \sum_{\{\alpha''\}} \delta(\alpha_1, \alpha''_N) \delta(\alpha_2, \alpha''_1) \cdots \delta(\alpha_J, \alpha''_{J-1}) \delta(\alpha_{J+1}, \alpha''_J) \cdots \delta(\alpha_N, \alpha''_{N-1}) \\ & \times \delta(\alpha'_1, \alpha''_N) \delta(\alpha'_2, \alpha''_1) \cdots \delta(\alpha'_{J-1}, \alpha''_{J-2}) \langle \alpha''_{J-1} \alpha''_J | \left[\frac{d}{dv} \mathcal{L}_J(v) \right]_{v=\zeta} | \alpha'_{J+1} \alpha'_J \rangle \\ & \times \delta(\alpha'_{J+2}, \alpha''_{J+1}) \cdots \delta(\alpha''_N, \alpha''_{N-1}) \end{aligned}$$

桂 重俊

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \delta(\alpha_1, \alpha'_1) \delta(\alpha_2, \alpha'_2) \cdots \delta(\alpha_{j-1}, \alpha'_{j-1}) \langle \alpha_j \alpha_{j+1} | \left[\frac{d}{dv} \mathcal{L}_J(v) \right]_{v=\zeta} | \alpha'_{j+1} \alpha'_j \rangle \\
&\times \delta(\alpha_{j+1}, \alpha'_{j+1}) \cdots \delta(\alpha_N, \alpha'_N)
\end{aligned} \tag{8.14}$$

と書ける。(8.6)より

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha_j \alpha_{j+1} | \mathcal{L}'_J(\zeta) | \alpha'_{j+1} \alpha'_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^4 p'_j \sigma^j_{\alpha_j \alpha'_j} \sigma^j_{\alpha_{j+1} \alpha'_{j+1}} \\
&= p'_1 \sigma^1 \otimes \sigma^1 + p'_2 \sigma^2 \otimes \sigma^2 + p'_3 \sigma^3 \otimes \sigma^3 + p'_4 \sigma^4 \otimes \sigma^4
\end{aligned} \tag{8.15}$$

である。従って $\left[\frac{d}{dv} \log T(v) \right]_{v=\zeta}$ は交換相互作用が3成分 J_x, J_y, J_z をもつ Heisenberg model すなわち XYZモデルのハミルトニアンである。

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{d}{dv} \log T(v) \right]_{v=\zeta} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (p'_1 \sigma^1_j \sigma^1_{j+1} + p'_2 \sigma^2_j \sigma^2_{j+1} + p'_3 \sigma^3_j \sigma^3_{j+1}) + \frac{1}{2} p'_4 E
\end{aligned} \tag{8.16}$$

(E は $2^N \times 2^N$ の単位行列)

ここに

$$p'_3 = \left[\frac{dp_j}{dv} \right]_{v=\zeta} \quad \mathcal{L}'_J(\zeta) = \left[\frac{d}{dv} \mathcal{L}_J(v) \right]_{v=\zeta} \tag{8.17}$$

である。

(8.7)より

$$w'_1 = \frac{-\operatorname{sn} \zeta \operatorname{dn} \zeta}{\operatorname{cn} \zeta} \quad w'_2 = \frac{-k^2 \operatorname{sn} \zeta \operatorname{cn} \zeta}{\operatorname{dn} \zeta} \quad w'_3 = 0 \quad w'_4 = \frac{\operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta}{\operatorname{sn} \zeta} \tag{8.18}$$

であるから

$$\begin{aligned}
p'_1 &= \frac{-\operatorname{sn} \zeta \operatorname{dn} \zeta}{\operatorname{cn} \zeta} + \frac{k^2 \operatorname{sn} \zeta \operatorname{cn} \zeta}{\operatorname{dn} \zeta} + \frac{\operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta}{\operatorname{sn} \zeta} \\
&= \frac{-\operatorname{sn}^2 \zeta \operatorname{dn}^2 \zeta + k^2 \operatorname{sn}^2 \zeta \operatorname{cn}^2 \zeta + \operatorname{cn}^2 \zeta \operatorname{dn}^2 \zeta}{\operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta \operatorname{sn} \zeta} \\
&= \frac{\operatorname{cn}^2 \zeta - \operatorname{sn}^2 \zeta \operatorname{dn}^2 \zeta}{2 \operatorname{sn} \zeta \operatorname{cn} \zeta \operatorname{dn} \zeta} \\
&= \frac{\operatorname{cn} 2\zeta}{\operatorname{sn} 2\zeta}
\end{aligned} \tag{8.19}$$

同時に

$$\begin{aligned} p'_2 &= \frac{\operatorname{dn} 2\zeta}{\operatorname{sn} 2\zeta} \\ p'_3 &= \frac{1}{\operatorname{sn} 2\zeta} \\ p'_4 &= \frac{\operatorname{cn} 2\zeta + \operatorname{dn} 2\zeta - 1}{\operatorname{sn} 2\zeta} \end{aligned} \quad (8.20)$$

従って

$$J_x : J_y : J_z = \operatorname{cn} 2\zeta : \operatorname{dn} 2\zeta : 1 \quad (8.21)$$

となるように l と ζ を選んだとき

$$\mathcal{H} = -J_z \operatorname{sn} 2\zeta \left[\frac{d}{dv} \log T(v) - \frac{1}{2} N p'_4 \right] \quad (8.22)$$

となる。 $\log T(v)$ の固有関数は $T(v)$ の固有関数と同じであるのでその最大固有値に対応する固有関数から 1 次元 XYZ モデルの基底エネルギーを求めることが出来る。

§9. Villain モデルと Miyashita モデル

Fig. 9 において実線を強磁性ボンド K , 点線を反強磁性ボンド $-K$ とすると, これは regular だが frustration のあるモデルでこれを Villain モデル¹⁾という。 σ_0 を中心とする $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ のクラスターを考えて σ_0 で和をとると

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_0} \exp[K \sigma_0 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)] &= \operatorname{ch} K (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \\ &= \frac{A}{2} \exp [K_1 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_4 + \sigma_4 \sigma_1) \\ &\quad + K_2 (\sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_4) + K_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4] \end{aligned} \quad (9.1)$$

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = (1, 1, 1, 1), (-1, 1, 1, 1), (-1, -1, 1, 1), (-1, 1, -1, 1)$ を両辺に入れて

$$\begin{aligned} A \exp(4K_1 + 2K_2 + K_4) &= \operatorname{ch} 4K \\ A \exp(-K_4) &= \operatorname{ch} 2K \\ A \exp(-2K_2 + K_4) &= 1 \\ A \exp(-4K_1 + 2K_2 + K_4) &= 1 \end{aligned} \quad (9.2)$$

これをといて A, K_1, K_2, K_4 は次のようになる。

桂 重俊

$$A = (\text{ch } 2K)^{1/2} (\text{ch } 4K)^{1/8} \quad (9.3)$$

$$K_1 = \frac{1}{8} \log \text{ch } 4K \quad (9.4)$$

$$K_2 = \frac{1}{8} \log \text{ch } 4K \quad (9.5)$$

$$K_4 = -\frac{1}{2} \log \text{ch } 2K + \frac{1}{8} \log \text{ch } 4K \quad (9.6)$$

σ'_0 を中心として $\sigma_1, \sigma_2, \sigma'_3, \sigma'_4$ のクラスターについて同様の操作を行うと

$$\begin{aligned} \sum \exp [K\sigma_0(\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4)] &= \text{ch } K(\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4) \\ &= \frac{A'}{2} \exp [K'_1(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4 + \sigma_4\sigma_1) + K'_2(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_4) \\ &\quad + K'_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] \end{aligned} \quad (9.7)$$

より $A = A', K'_1 = -K_1, K'_2 = K_2, K'_4 = K_4$ となる。

従って Villain model の状態和は Fig. 9 の○のスピ
ンについて和をとると, Fig. 10 の格子の状態和に
なるが一重線部分は $K_1 + K'_1 = 0$ で二重線部分が $2K_2$
と 4 体力 K_4 をもった Ising モデルの状態和になる。
これは Baxter model と等価で T_c が求まるが 0 にな
る。これは Forgacs の結果である。始めから Villain
model に Fig. 11 のように frustration をより強く出
すような 3rd neighbor interaction K'' を入れてお
けば K_2 が $K_2 + K''$ に代るだけでとけるといふ事情は

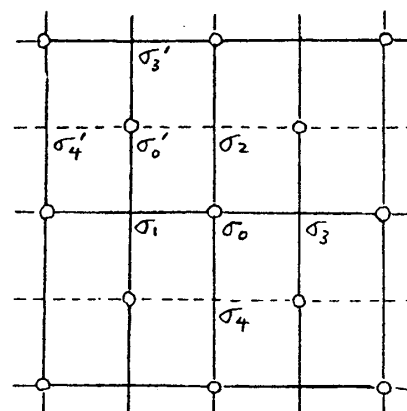


Fig. 9

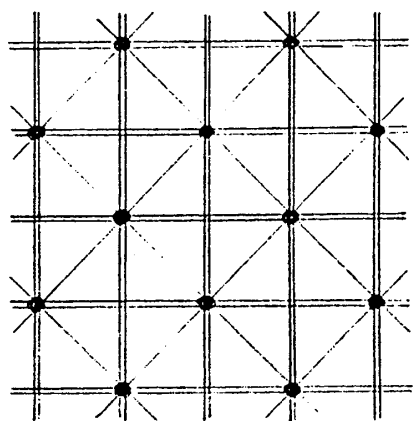


Fig. 10

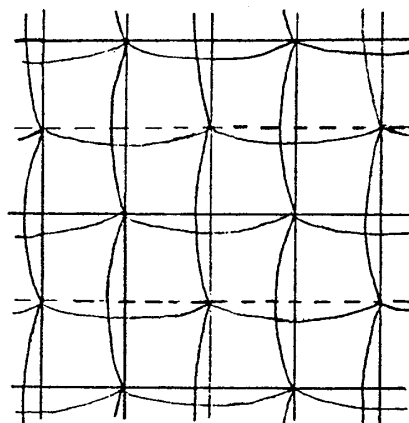


Fig. 11

変らない。Miyashita³⁾は Villain モデルに適当な K'' を入れると exact にとけてかつ転移温度が存在することを示した*。

§10 補 足

以上 8-vertex モデルの自由エネルギーを転送行列の方法で求める方法をのべた。関連する事項やあげなかった文献について二、三補足しておく。8-vertex と double layered Ising model の等価をのべたのは Wu¹⁾ と Kadanoff and Wegner²⁾ である。状態和の根の分布については Suzuki³⁾ がしらべている。3角 3-spin 相互作用の 3d 8-vertex model は diamond 格子について T_C が Thibaudier and Villain⁵⁾ により求められている。long range order については Baxter⁶⁾ 自身によって求められた。逆散乱法との関連については § 2 であげた Takhadzhani-Faddeev の他 Thacker⁷⁾ Wadati⁸⁾ の review がある。Baxter の free energy から Onsager の free energy を導いた論文はまだみていないが御存知の方は御知らせ下さい⁹⁾。

- 1) F. Y. Wu, Phys. Rev. B4 (1971) 2312–2314.
- 2) L. P. Kadanoff and F. Wegner, Phys. Rev. B4 (1971) 3989–3993.
- 3) M. Suzuki, J. Math. Phys. 12 (1971) 235–246.
- 4) R. J. Baxter, Aust. J. Phys. 27 (1974) 357–367, 369–381.
- 5) C. Thibaudier and J. Villain, J. Phys. A5 (1972) 3429–3437.
- 6) R. J. Baxter, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics* Vol. 5 109–141, ed. E. G. D. Cohen, (North Holland, 1980).
- 7) H. B. Thacker, Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 253–285.
- 8) 和達三樹, 日本物理学会誌 36 (1981) 786–793.
- 9) R. J. Baxter, M. F. Sykes and M. G. Watts, J. Phys. A8 (1975) 245–251 は級数展開で自由 energy の比較を行っている。

Appendix I (5.40) の証明**

(5.23), (5.24) より

* 1) J. Villian, J. Phys. C10 1717 (1977).
 2) G. Forgacs, Phys. Rev. 22 4473 (1980).
 3) S. Miyashita, 物性研研究会 (1982. 6 月)

** 広池和夫氏の方法による。

桂 重俊

$$\frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial u''}{\partial u} + \frac{\partial u'}{\partial v'} \frac{\partial u''}{\partial u'} = 0$$

すなわち

$$\frac{\partial u''}{\partial v} + \frac{\partial u''}{\partial v'} = 0 \quad (\text{AI. 1})$$

従って u'' は $v - v'$ のみの関数である。

$$\left(\because \frac{\partial u''}{\partial (v-v')} \left[\frac{\partial (v-v')}{\partial v} + \frac{\partial (v-v')}{\partial v'} \right] = 0 \right)$$

ゆえに u'' を $v - v''$ の関数として求めるには v' を 0 として $u''(v)$ を求めてから v を $v - v'$ とおけばよい。

$$\text{sn}(v', l) = \frac{w'_4}{w'_3} \text{sn}(\zeta, l) = \frac{w'_4}{w'_3} \left(\frac{w_1'^2 - w_2'^2}{w_1'^2 - w_4'^2} \right)^{1/2}$$

であるから $w'_4 = 0$ とおいた場合を考える。(5.7), (5.8), (5.9) より $w'_4 = 0$ とすると

$$-43' 2'' + 21' 4'' = 12' 3''$$

$$43' 1'' \quad -12' 4'' = -21' 3''$$

$$23' 1'' \quad -32' 4'' = -41' 3'' \quad (\text{AI. 2})$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -43' & 21' \\ 43' & 0 & -12' \\ 23' & 0 & -32' \end{vmatrix}$$

$$= 43' 3' 2' (-43 + 12) \quad (\text{第2列で展開}) \quad (\text{AI. 3})$$

$$w_1'' = \frac{w_3''}{A} \begin{vmatrix} 21' & -43' & 21' \\ -21' & 0 & -12' \\ -41' & 0 & -32' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{w_3''}{A} 43' 1' 2' (23 - 14) \quad (\text{AI. 4})$$

$$w_2'' = \frac{w_3''}{A} \begin{vmatrix} 0 & 12' & 21' \\ 43' & -21' & -12' \\ 23' & -41' & -32' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{w_3''}{A} \{-122' 3' (-43 + 12) + 21' 3' 1' (-4^2 + 2^2)\} \quad (\text{AI. 5})$$

(第2列で展開)

$$\begin{aligned}
 w_4'' &= \frac{w_3''}{4} \begin{vmatrix} 0 & -43' & 12' \\ 43' & 0 & -21' \\ 23' & 0 & -41' \end{vmatrix} \\
 &= \frac{w_3''}{4} 43' 1' 3' (-4^2 + 2^2)
 \end{aligned} \tag{AI. 6}$$

準備として sn , cn の加法定理の一つの表式を求めておく。

$$\text{sn}(u+v) = \frac{\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v + \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v} \tag{AI. 7}$$

を変形する。分子分母に $\text{sn}^2 u - \text{sn}^2 v$ をかけると

$$\begin{aligned}
 (\text{AI. 7}) &= \frac{(\text{sn}^2 u - \text{sn}^2 v)(\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v + \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u)}{\text{sn}^2 u - k^2 \text{sn}^4 u \text{sn}^2 v - \text{sn}^2 v + k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^4 v} \\
 &= \frac{(\text{sn}^2 u - \text{sn}^2 v)(\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v + \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u)}{\text{sn}^2 u - (1 - \text{dn}^2 u) \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v - \text{sn}^2 v + (1 - \text{dn}^2 v) \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v} \\
 &= (\text{sn}^2 u - \text{sn}^2 v)(\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v + \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u) \\
 &\quad \times [\text{sn}^2 u - \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v - \text{sn}^2 v + \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v + \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v \text{dn}^2 u \\
 &\quad - \text{dn}^2 v \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v]^{-1} \\
 &= (\text{sn}^2 u - \text{sn}^2 v)(\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v + \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u) \\
 &\quad \times [\text{sn}^2 u \text{cn}^2 v \text{dn}^2 v - \text{sn}^2 v \text{cn}^2 u \text{dn}^2 u + \text{sn}^2 v \text{dn}^2 u \\
 &\quad - \text{sn}^2 u \text{dn}^2 v + \text{sn}^2 u - \text{sn}^2 v]^{-1} \\
 &= \frac{\text{sn}^2 u - \text{sn}^2 v}{\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v - \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u}
 \end{aligned} \tag{AI. 8}$$

cn の加法定理

$$\text{cn}(u+v) = \frac{\text{cn } u \text{ cn } v - \text{sn } u \text{ sn } v \text{ dn } u \text{ dn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v} \tag{AI. 9}$$

を変形する。分子分母に $\text{sn}^2 u - \text{sn}^2 v$ をかけると sn の場合と同様にして

$$\begin{aligned}
 \text{cn}(u+v) &= \frac{(\text{cn } u \text{ cn } v - \text{sn } u \text{ sn } v \text{ dn } u \text{ dn } v)(\text{sn}^2 u - \text{sn}^2 v)}{\text{sn}^2 u \text{cn}^2 v \text{dn}^2 v - \text{sn}^2 v \text{cn}^2 u \text{dn}^2 u} \\
 &= [\text{sn}^2 u \text{cn } u \text{ cn } v - \text{cn } u \text{ cn } v \text{sn}^2 v \\
 &\quad - \text{sn}^3 u \text{sn } v \text{dn } u \text{ dn } v + \text{sn } u \text{sn}^3 v \text{dn } u \text{ dn } v] \\
 &\quad \times [(\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v - \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u) \\
 &\quad \times (\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v + \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u)]^{-1} \\
 &\quad \text{前式の分子} = \text{sn}^2 u \text{cn } u \text{ cn } v (1 - k^2 \text{sn}^2 v) \\
 &\quad + \text{sn } u (1 - \text{sn}^2 u) \text{dn } u \text{sn } v \text{dn } v
 \end{aligned}$$

桂 重俊

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v (1 - \operatorname{sn}^2 v) \operatorname{dn} v - \operatorname{cn} u (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn} v \\
& = \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn}^2 v + \operatorname{sn} u \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \\
& - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn}^2 v \operatorname{dn} v - \operatorname{cn} u \operatorname{dn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn} v \\
& = (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u) \\
& \times (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)
\end{aligned} \tag{AI. 10}$$

ゆえに

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} \tag{AI. 11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{w_4''}{w_3''} &= \frac{43' 1' 3' (2^2 - 4^2)}{43' 3' 2' (12 - 34)} \\
&= \frac{1'}{2'} \frac{2^2 - 4^2}{12 - 34} \\
&= \left(\frac{u' - u_1}{u' - u_2} \right)^{1/2} \frac{(u - u_2) - (u - u_4)}{(u - u_1)^{1/2} (u - u_2)^{1/2} - (u - u_3)^{1/2} (u - u_4)^{1/2}}
\end{aligned} \tag{AI. 12}$$

(5.35) をいれて

$$\begin{aligned}
& \frac{\operatorname{cn}(v', l)}{\operatorname{cn}(\zeta, l)} \left(\frac{\operatorname{dn}(v, l)}{\operatorname{dn}(\zeta, l)} \right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sn}(v, l)}{\operatorname{sn}(\zeta, l)} \right)^2 \\
& = \frac{\operatorname{dn}(v', l)}{\operatorname{dn}(\zeta, l)} \frac{\operatorname{cn}(v, l)}{\operatorname{cn}(\zeta, l)} \frac{\operatorname{dn}(v, l)}{\operatorname{dn}(\zeta, l)} - \frac{\operatorname{sn}(v, l)}{\operatorname{sn}(\zeta, l)} \\
& = \frac{\operatorname{cn}(v', l)}{\operatorname{cn}(\zeta, l)} \frac{\operatorname{dn}(\zeta, l)}{\operatorname{dn}(v', l)} \frac{[\operatorname{dn}(v, l)]^2 [\operatorname{sn}(\zeta, l)]^2 - [\operatorname{sn}(v, l)]^2 [\operatorname{dn}(\zeta, l)]^2}{[\operatorname{dn}(\zeta, l)]^2 [\operatorname{sn}(\zeta, l)]^2} \\
& \times \frac{\operatorname{cn}(\zeta, l) \operatorname{dn}(\zeta, l) \operatorname{sn}(\zeta, l)}{\operatorname{cn}(v, l) \operatorname{dn}(v, l) \operatorname{sn}(\zeta, l) - \operatorname{sn}(v, l) \operatorname{cn}(\zeta, l) \operatorname{dn}(\zeta, l)} \\
& = \frac{\operatorname{dn}^2(v, l) \operatorname{sn}^2(\zeta, l) - \operatorname{sn}^2(v, l) \operatorname{dn}^2(\zeta, l)}{[\operatorname{cn}(v, l) \operatorname{dn}(v, l) \operatorname{sn}(\zeta, l) - \operatorname{sn}(v, l) \operatorname{cn}(\zeta, l) \operatorname{dn}(\zeta, l)] \operatorname{sn}(\zeta, l)} \\
& = \frac{\operatorname{sn}^2(\zeta, l) - \operatorname{sn}^2(v, l)}{\operatorname{cn}(v, l) \operatorname{dn}(v, l) \operatorname{sn}(\zeta, l) - \operatorname{sn}(v, l) \operatorname{cn}(\zeta, l) \operatorname{dn}(\zeta, l)} \\
& \times \frac{1}{\operatorname{sn}(\zeta, l)}
\end{aligned} \tag{AI. 13}^*$$

$$* \quad l^2 \operatorname{sn}^2(\zeta, l) \operatorname{sn}^2(v, l)$$

$$= \operatorname{sn}^2(\zeta, l) (\operatorname{dn}^2(v, l) - 1) = \operatorname{sn}^2(v, l) (\operatorname{dn}^2(\zeta, l) - 1)$$

$$\operatorname{sn}^2(\zeta, l) \operatorname{dn}^2(v, l) - \operatorname{sn}^2(v, l) \operatorname{dn}^2(\zeta, l) = \operatorname{sn}^2(\zeta, l) - \operatorname{sn}^2(v, l)$$

(AI. 8)により

$$= \frac{\operatorname{sn}(v+\zeta, \ell)}{\operatorname{sn}(\zeta, \ell)} \quad (\text{AI. 14})$$

また

$$\begin{aligned} \frac{w_1''}{w_3''} &= \frac{43' 1' 2' (23-14)}{43' 3' 2' (12-34)} \\ &= \frac{1'}{3'} \frac{23-14}{12-34} \end{aligned} \quad (\text{AI. 15})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\operatorname{cn}(v', \ell)}{\operatorname{cn}(\zeta, \ell)} \frac{\frac{\operatorname{dn}(v, \ell)}{\operatorname{dn}(\zeta, \ell)} - \frac{\operatorname{cn}(v, \ell)}{\operatorname{cn}(\zeta, \ell)} \frac{\operatorname{sn}(v, \ell)}{\operatorname{sn}(\zeta, \ell)}}{\frac{\operatorname{cn}(v, \ell)}{\operatorname{cn}(\zeta, \ell)} \frac{\operatorname{dn}(v, \ell)}{\operatorname{dn}(\zeta, \ell)} - \frac{\operatorname{sn}(v, \ell)}{\operatorname{sn}(\zeta, \ell)}} \\ &= \frac{1}{\operatorname{cn}(\zeta, \ell)} \frac{\operatorname{dn}(v, \ell) \operatorname{cn}(\zeta, \ell) \operatorname{sn}(\zeta, \ell) - \operatorname{cn}(v, \ell) \operatorname{sn}(v, \ell) \operatorname{dn}(\zeta, \ell)}{\operatorname{cn}(v, \ell) \operatorname{dn}(v, \ell) \operatorname{sn}(\zeta, \ell) - \operatorname{sn}(v, \ell) \operatorname{cn}(\zeta, \ell) \operatorname{dn}(\zeta, \ell)} \end{aligned} \quad (\text{AI. 16})$$

(AI. 11)により

$$= \frac{\operatorname{cn}(v+\zeta, \ell)}{\operatorname{cn}(\zeta, \ell)} \quad (\text{AI. 17})$$

同様に (証略)

$$\frac{w_2''}{w_3''} = \frac{\operatorname{dn}(v+\zeta, \ell)}{\operatorname{dn}(\zeta, \ell)} \quad (\text{AI. 18})$$

(AI. 14), (AI. 17), (AI. 18) より v を $v-v'$ でおきかえると (5.40) が得られる。

Appendix II 楕円関数

楕円関数に関する必要な定義と公式をまとめておく。

$$\operatorname{Im} \tau > 0, \quad q = e^{\pi i \tau} \quad \text{として}$$

$$\vartheta_4(z, q) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi i n z}$$

$$\vartheta_1(z, q) \equiv \frac{1}{i} q^{1/4} e^{\pi i z} \vartheta_4\left(z + \frac{\tau}{2}, q\right)$$

$$\vartheta_2(z, q) \equiv q^{1/4} e^{\pi i z} \vartheta_4\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, q\right)$$

桂 重俊

$$\vartheta_3(z, q) \equiv \vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}, q\right) \quad (\text{AII. 1})$$

を楕円テータ関数という。

$$k \equiv \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)} \quad k' \equiv \frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3^2(0)} \quad (\text{AII. 2})$$

k を modulus という。

$$K_k \equiv \frac{1}{2} \pi \vartheta_3^2(0) \quad K'_k = -\frac{i\pi\tau}{2} \vartheta_3^2(0) \quad (\text{AII. 3})$$

K_k と K'_k はそれぞれ k と k' の第1種完全楕円積分で表わされる。

$$K_k = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad K'_k = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}} \quad (\text{AII. 4})$$

$$\begin{aligned} \text{sn}(u, k) &\equiv \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(u/2, K_k)}{\vartheta_4(u/2, K_k)} \\ \text{cn}(u, k) &\equiv \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(u/2, K_k)}{\vartheta_4(u/2, K_k)} \\ \text{dn}(u, k) &\equiv \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(u/2, K_k)}{\vartheta_4(u/2, K_k)} \end{aligned} \quad (\text{AII. 5})$$

を Jacobi の楕円関数という。

$\text{sn } u, \text{cn } u, \text{dn } u$ は2重周期関数であってその周期は

$$\begin{aligned} \text{sn } u &: 4K, 2iK' \\ \text{cn } u &: 4K, 2K + 2iK' \\ \text{dn } u &: 2K, 4iK' \end{aligned} \quad (\text{AII. 6})$$

である。 $\text{sn}(u, k)$ は第1種楕円積分

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (\text{AII. 7})$$

の逆関数

$$z = \text{sn}(u, k)$$

である。

次の関係式

$$\begin{cases} \text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1 \\ k^2 \text{sn}^2 u + \text{dn}^2 u = 1 \end{cases} \quad (\text{AII. 8})$$

および加法公式

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u+v) &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \\ \operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \\ \operatorname{dn}(u+v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}\end{aligned}\quad (\text{AII. 9})$$

が成立つ。

$k \rightarrow 0$ のとき $k' \rightarrow 1$, $K \rightarrow \pi/2$, $K' \rightarrow \infty$ $\operatorname{sn} u \rightarrow \sin u$, $\operatorname{cn} u \rightarrow \cos u$, $\operatorname{dn} u \rightarrow 1$ となる。

$$\begin{aligned}H(u) &\equiv \vartheta_1\left(\frac{u}{2K}, q\right) \\ \Theta(u) &\equiv \vartheta_4\left(\frac{u}{2K}, q\right)\end{aligned}\quad (\text{AII. 10})$$

を Jacobi の theta function という。

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)} \quad (\text{AII. 11})$$

が成立つ。

次の Fourier 級数が成立つ。

$$\begin{aligned}\log \frac{\vartheta_4(v+w)}{\vartheta_4(v-w)} &= 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n v \sin 2\pi n w}{n \sin \pi n \tau} \\ \log \frac{\vartheta_1(v+w)}{\vartheta_1(v-w)} &= -\pi i - 2\pi i v + 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n v \sin 2\pi n \left(w - \frac{\tau}{2}\right)}{n \sin \pi n \tau}\end{aligned}\quad (\text{AII. 12})$$

導関数

$$\begin{aligned}(\operatorname{sn} u)' &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\ (\operatorname{cn} u)' &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \\ (\operatorname{dn} u)' &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u\end{aligned}\quad (\text{AII. 13})$$

倍数公式

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}$$

桂 重俊

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}$$

$$\operatorname{dn} 2u = \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}$$

(AII. 14)

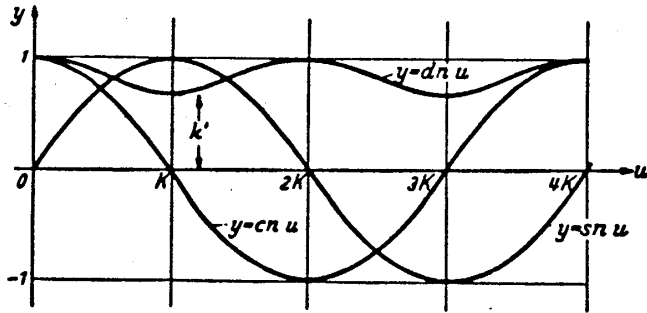


Fig. 10.

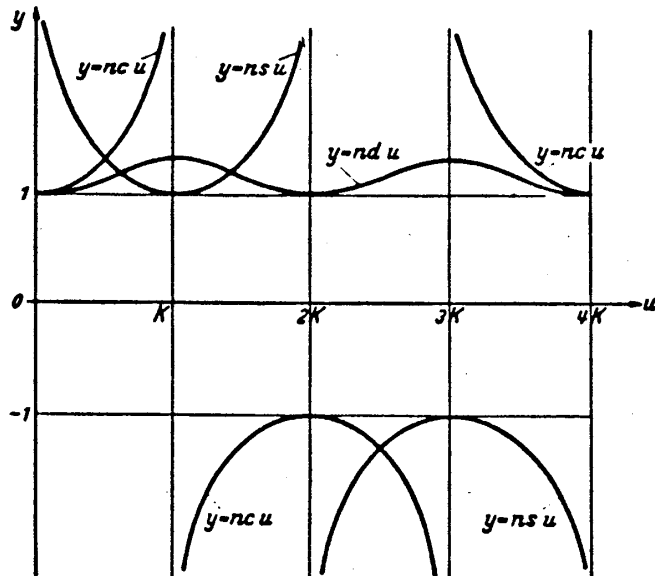


Fig. 11.

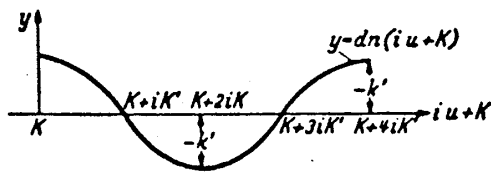


Fig. 12.

Fig.12 Jacobian Elliptic Functions.
Byrd and Friedman, Handbook
of Elliptic Integrals による。

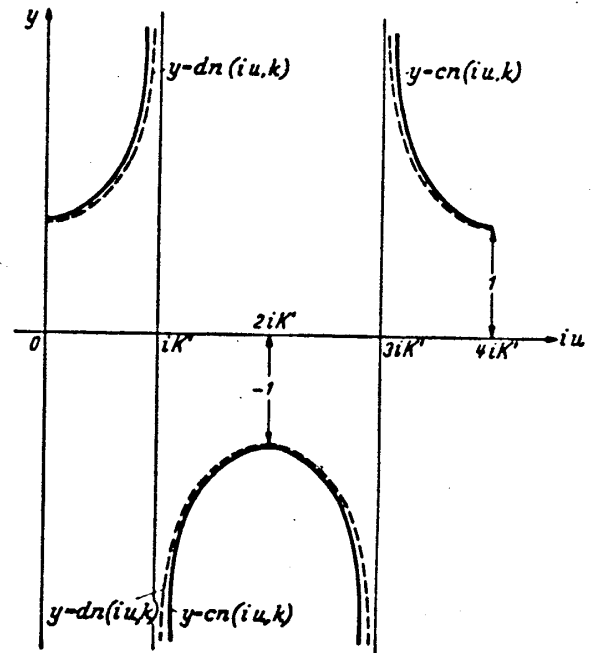


Fig. 13.

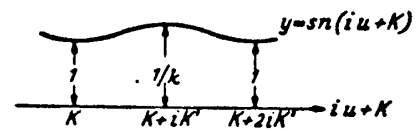


Fig. 14.

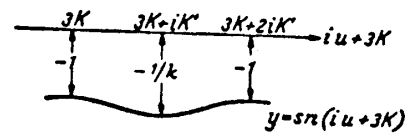


Fig. 15.

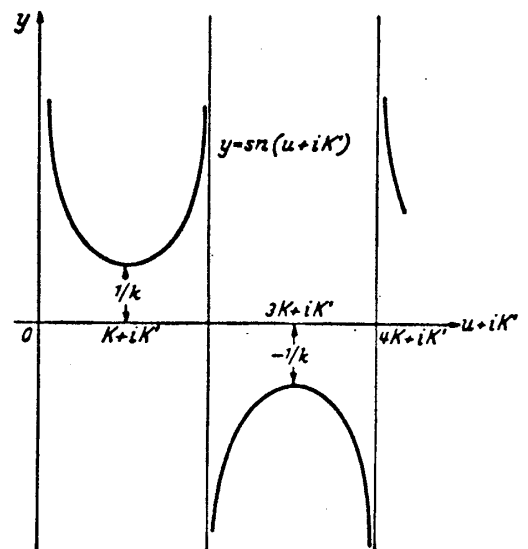


Fig. 16.