

清水敏寛・市村 純

- 3) J. L. Kaplan and J. A. Yorke; Lecture Notes in Math. 730 (1979) 228.
- 4) T. Uezu and Y. Aizawa, to appear in Prog. Theor. Phys. (1982).
- 5) T. Uezu, in preparation.

カオスを示す簡単なモデルの漸近解について

国士館大・工 清水 敏 寛
早大・理工 市村 純

少数自由度系の示すカオスで重要な点は次の二点である。位相空間の中のフローを考えた時にまず① 2つ又はそれ以上のパスに軌道が分離されその後で合流して混ぜられる。② このプロセスが無限に繰り返される。この結果としてアトラクターには自己相似な構造が現われる。このメカニズムをより微視的な立場から調べるために、摂動論を使って解くことのできる簡単なモデルを提案した。

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) - \varepsilon a \dot{x}(t) + bx(t)(x(t)^2 - 1 + m(t)) &= 0, \\ \dot{m}(t) - \varepsilon [cm(t) - fx(t)^2 - r\dot{x}(t)^2 / (1 - m(t))^2] &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

このモデルで a, b, c, f, r は正のパラメータであり、 ε は微小パラメータである。 $r=0$ の場合には、このモデルはローレンツ方程式で時間反転したものと一致する。式(1)を非線型スケールを用いて解いた。まず2つの時間スケール τ と ω を導入する。

$$\tau = \varepsilon t, \quad \frac{d\omega}{dt} = \phi(\tau) \quad (2)$$

ここで $\phi(\tau)$ は以下で self-consistent に決める関数である。 x と m は ε で展開可能であるとする。

$$x = x_0(\tau, \omega) + \varepsilon x_1(\tau, \omega) + \dots, \quad m = m_0(\tau, \omega) + \varepsilon m_1(\tau, \omega) + \dots \quad (3)$$

(2)と(3)を(1)に代入し、 ε の各オーダーを比較すると、まず0次は

$$\phi \frac{\partial}{\partial \omega} m_0 = 0, \quad \phi^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} x_0 + bx_0(x_0^2 - 1 + m_0) = 0$$

この2番目の式は次の様にかきかえられる。

カオスを示す簡単なモデルの漸近解について

$$\frac{1}{2} \phi^2 \left(\frac{\partial x_0}{\partial \omega} \right)^2 + \frac{b}{4} x_0^4 - \frac{b}{2} (1-m_0) x_0^2 = E_0(\tau) \tag{4}$$

したがって2個のミニマムをもつ4次のポテンシャル中の運動で表現できる。 $E_0 \geq 0$ の時には2つのミニマムをまたぐ運動が可能で、 $E_0 < 0$ の場合には、運動は右又は左のポテンシャルの谷に制限される。 E_0 の正負によって x_0 は次の様にヤコビの楕円関数であらわされる。

$$\begin{aligned} \text{case (i)} \quad x_0 &= A(\tau) \text{cn}(K(\nu(\tau))\omega, \nu(\tau)) & (E_0 \geq 0) \\ \text{case (ii)} \quad x_0 &= B(\tau) \text{dn}(K(\nu(\tau))\omega, \nu(\tau)) & (E_0 < 0) \end{aligned} \tag{5}$$

ここで E_0, A, B, ϕ, ν の間には次の関係があるので独立な変形は2つだけである。

$$\begin{aligned} \text{case (i)} \quad E_0 &= \frac{b(1-\nu^2)\nu^2}{(2\nu^2-1)^2} (1-m_0)^2, \quad A = \pm \sqrt{\frac{2\nu^2}{2\nu^2-1}} (1-m_0), \quad \phi = \frac{1}{K(\nu)} \sqrt{\frac{b(1-m_0)}{2\nu^2-1}}, \\ \text{case (ii)} \quad E_0 &= \frac{b(\nu^2-1)}{(2-\nu^2)^2} (1-m_0)^2, \quad B = \pm \sqrt{\frac{2(1-m_0)}{2-\nu^2}}, \quad \phi = \frac{1}{K(\nu)} \sqrt{\frac{b(1-m_0)}{2-\nu^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

ϵ の1次の式に(5)式を代入し、永年項を除く条件から、 $\nu(\tau)$ と $m_0(\tau)$ の時間発展についての式が得られる¹⁾。それらの式を解くことによって、摂動論の0次の解は決定される。従って元の3次元 $(x, p = \dot{x}, m)$ の問題は (ν, m_0) 上の2次元の問題に帰着できた。

表1 解の分枝

	$r > 2.26$	$2.26 > r > 1.74$	$1.72 > r$
(E_0, m_0) 平面	安定固定点	$E_0 > 0$ の領域の安定なリミットサイクル	E_0 の正負にまたがる安定なリミットサイクル
$(x, p = \dot{x}, m)$ 空間	周期軌道	トーラス	ストレンジアトラクター

パラメータを次の様を選び ($a = 1.0625, b = 0.0625, c = 0.25, f = 1.75, \epsilon = 0.001$), r を分枝パラメータととって ν と m_0 の方程式、あるいはそれと同等な E_0 と m_0 の式を解いた。その結果は表1, 図1に示されている。

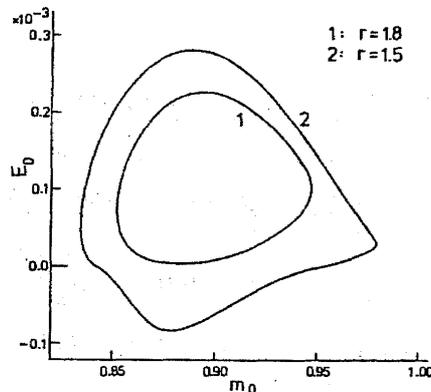


図1 リミットサイクル

金子邦彦

特に表1で $r < 1.72$ の場合には1周期の間に E_0 が正から負へ、又負から正にかわる。 $E_0 > 0$ の領域では運動は2つの谷をまたいでいるが、 E_0 が負になると右又は左の谷に落ちこみ振動する。再び E_0 が正になると谷からぬけ出して2つの谷をまたぐ振動を始める。このプロセスを繰り返す。右の谷に落ちるか左の谷に落ちるかは解の(i)と(ii)の接続によって一意的に決定される。従って運動は決定論的である。しかし解の x_0 中の ω は ϕ を積分したものであるから解は運動の履歴に依存している。この事実が決定論的にもかわらずどちらの谷に落ちるか

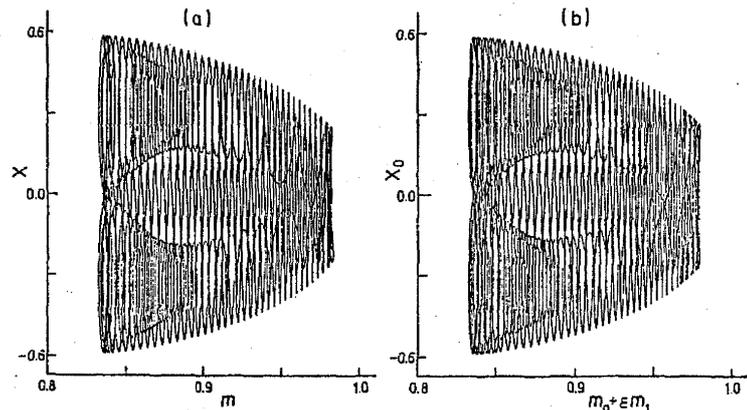


図2. アトラクター (a) シミュレーション (b) 理論

ちるかの予想を困難にしている理由である。3次元空間の軌道を $x-m$ 平面に射影したものを図2に示した。理論とシミュレーションの結果はよく一致している。

参考文献

- 1 T. Shimizu and A. Ichimura, in press (Phys. Lett. A).

“トーラス” 周波数ロッキング “カオス”
における “周期加現象”

東大・理 金子邦彦

§ 1. 2次元マップによる周期加現象の発見

トーラスからロッキングを経てカオスに至る例は、流体実験等で数多くみられる。その際のメカニズム、規則性を調べよう。まず、2次元マップを用いる。たとえば、マップ

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - Ax_n^2 + D(y_n - x_n) \\ y_{n+1} = 1 - Ay_n^2 + D(x_n - y_n) \end{cases} \quad (1)$$

(結合ロジスティック・モデル; $D=0.1$ とする。) このマップは、 $1.34 < A < 1.355$ で、