

武野正三

$N > 2$ の時でも遠方における Singularity の様子が解析できる。図 1 は、 $N = 3$, $\det U_0 < 0$ のケースの数値例である。(9)で soliton 数を、 M_1, M_2 とするのは早計かも知れない。 $\det U_0 < 0$ で $M_2 = 2$ のケースを計算して 3 ケの 2×2 -Soliton を遠方で得た。

終りに (2) のエネルギー及び運動量密度、

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4} \text{Tr.} (U^2 + V^2), \quad \mathcal{D} = -\text{Tr.} (U^2 - V^2), \quad (11)$$

を 2×2 non-breather モードについて求める。 $\det U_0 < 0$ では、 $\mathcal{M} = 1, \mathcal{D} = 0$, $\det U_0 = 0$ では、 $\mathcal{M} = \mathcal{D} = 0$ を得る。

注釈

- *) その pole を $\bar{\lambda}_k$ とする。
- **) 求積の際に現れる積分定数を指す。

参 考 文 献

- 1) V. E. Zakharov and A. B. Shabat: Func. Anal. Appl. **14** (1980) 166.
- 2) V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: Soviet Physics JETP **47** (1978) 1017.
- 3) V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: Comm. Math. Phys. **74** (1980) 21.
- 4) A. Neveu and N. Papanicolaou: Comm. Math. Phys. **58** (1978) 31.
- 5) K. Pohlmeyer: Comm. Math. Phys. **46** (1976) 207.

スピン系, $SU(2)$ -ゲージ場, 軸対称重力場方程式
の関連性, ある種の厳密解と準粒子的励起

京工織大・工芸 武野正三

§ 1 Introduction

ソリトンの数理物理の面白さの一つは、広い意味でのソリトンを記述する非線型微分方程式が、微分幾何学、一般相対論、場の理論、プラズマ物理、流体力学、格子力学、磁性体の物理学、高分子物理、生体物理等に於て、同じ形で或は類似の形で現われることであろう。ソリト

スピン系, $SU(2)$ -ゲージ場, 軸対称重力場方程式の関連性が非線型物理学の基本的概念の一つであることを示すものであると云えるであろう。ここでは, 古典的ハイゼンベルグスピン系, 軸対称重力場方程式, $SU(2)$ -ゲージ場の方程式について, このことにつき若干の考察を試みたい。これ等の問題についてはいくつかの論文があるがここでは平山等のもの¹⁾と, 筆者のもの²⁾をあげるにとどめておく。

§ 2 古典的ハイゼンベルグスピン系と軸対称重力場

(i) スピン系

よく知られているように, ハイゼンベルグスピン系は次の Hamiltonian で表わされる。

$$H = - \sum_{n,m} J(n, m) \vec{S}_n \cdot \vec{S}_m \quad (1)$$

スピンを古典的スピンとみなすと, その成分 S_n^α ($\alpha = x, y, z$) は二つの回転角 θ, φ により

$$S_n^x = \sin \theta_n \cos \varphi_n, \quad S_n^y = \sin \theta_n \sin \varphi_n, \quad S_n^z = \cos \theta_n, \quad |\vec{S}| = 1 \quad (2)$$

となる。このスピン系のエネルギー extremum の状態は

$$\partial H / \partial \theta_n = 0, \quad \partial H / \partial \varphi_n = 0 \quad (3)$$

により与えられる。(3) は差分方程式を与えるが, 連続体近似に移ると, この差分方程式は次の微分方程式

$$2 \cos \theta \nabla \theta \cdot \nabla \varphi + \sin \theta \Delta \varphi = 0, \quad \Delta \theta - \sin \theta \cos \theta (\nabla \varphi)^2 = 0 \quad (4)$$

で表わされる。(4) は, また, 次の Hamiltonian density

$$h(\vec{r}) = (1/2) [(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2] \quad (5)$$

より導かれ, これは, 場の理論の方では $O(3)$ nonlinear σ model と呼ばれている。

(ii) 軸対称重力場方程式

Einstein の重力場方程式は数学的にも可成複雑な形をしているが, 軸対称重力場の場合, それは複素ポテンシャル ξ を導入することにより,

$$(\xi \xi^* - 1) \Delta \xi = 2 \xi^* (\nabla \xi)^2 \quad (6)$$

の形に reduce できることを Ernst が示している。³⁾ この所謂 Ernst potential ξ を

武野正三

$$\xi = \cot h(\theta/2) \exp(i\varphi) \quad (7)$$

と parametrize すれば, (6) は

$$2 \cosh \theta \nabla \theta \cdot \nabla \varphi + \sinh \theta \Delta \varphi = 0, \quad \Delta \theta - \sinh \theta \cosh \theta (\nabla \varphi)^2 = 0 \quad (8)$$

の形になり, これは (4) に於て, $\theta \rightarrow i\theta$ と取ったことに相当する。つまり, Ernst eq. は次の Hamiltonian density

$$h(\vec{r}) = (1/2) [(\nabla \theta)^2 + \sinh^2(\nabla \varphi)^2] \quad (9)$$

から導かれ, これは $O(2, 1)$ nonlinear σ model と呼ばれているものに相当する。(7) の parametrization は無意味なものではなく, $\varphi = 0$ の場合 (8) の与える式 $\Delta \theta = 0$ は Weyl metric に相当する解を与えるものである。

§ 3 $SU(2)$ ゲージ場方程式

Yang は, R ゲージと称せられるゲージを適当にとると, 4次元 Euclid 空間 (x_1, x_2, x_3, x_4) 上のゲージポテンシャルは, 次の微分方程式

$$f(f_{y\bar{y}} + f_{z\bar{z}}) - f_y f_{\bar{y}} - f_z f_{\bar{z}} + \sigma_y \bar{\sigma}_{\bar{y}} + \sigma_z \bar{\sigma}_{\bar{z}} = 0 \quad (10a)$$

$$(f^{-2} \sigma_y)_{\bar{y}} + (f^{-2} \sigma_z)_{\bar{z}} = 0, \quad (f^{-2} \bar{\sigma}_{\bar{y}})_y + (f^{-2} \bar{\sigma}_{\bar{z}})_z = 0 \quad (10b)$$

with

$$y = (1/\sqrt{2})(x_1 + i x_2), \quad \bar{y} = (1/\sqrt{2})(x_1 - i x_2),$$

$$z = (1/\sqrt{2})(x_3 - i x_4), \quad \bar{z} = (1/\sqrt{2})(x_3 + i x_4),$$

$$f_u \equiv \partial f / \partial u \quad (u = y, z) \text{ etc.}$$

で与えられることを示した。⁴⁾ $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ が実数の領域に限定し, 座標変換を適当にとると, (10) は

$$f \Delta f - (\nabla f)^2 + \nabla \sigma \cdot \nabla \sigma^* = 0, \quad \nabla \cdot (f^{-2} \nabla \sigma) = 0 \quad (11)$$

に reduce する。 f, σ, σ^* (σ^* は σ の complex conjugate) に対して parametrization

スピン系, SU(2)-ゲージ場, 軸対称重力場方程式の関連性

$$f = 1/(q^0 + q^3), \quad \sigma = (q^1 + i q^2)/(q^0 + q^3) \text{ and C. C.} \quad (12)$$

with

$$(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 - (q^0)^2 = -1 \quad (13)$$

を導入すると, (11)は

$$\Delta q^\mu - \langle \nabla q, \nabla q \rangle q^\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (14)$$

with

$$\langle \nabla q, \nabla q \rangle \equiv (\nabla q^1)^2 + (\nabla q^2)^2 + (\nabla q^3)^2 - (\nabla q^0)^2 \quad (15)$$

となり, Yang 方程式は $O(3, 1)$ nonlinear σ -model の式と同等であることがわかる。この空間の部分空間として, Heisenberg model を表わす $O(3)$ nonlinear σ model, Ernst 方程式に対応する $O(2, 1)$ nonlinear σ model が含まれることは容易に示すことができる。即ち (10) 式は更に一般的なものを含むことが明らかになった。

§ 4 厳密解と準粒子励起

(4), (6) 或は (8), (10) には色々の型の厳密解が存在する。(4), (10) の場合の instanton 解, (6) 或は (8) の場合の富松-佐藤解⁵⁾はそれ等の中で最も典型的なものの一つである。実際上は, 他にも種々の型の厳密解の存在を示すことができるが, ここでは, 其後の研究の成果の一つとして, Yang 方程式の場合にも生ずる四次元空間上の非線型方程式 (4), (8) のみに話を限定することにする。次の型の特解

$$\theta = \theta(x_1, x_2) \equiv \theta(x, y), \quad \varphi = v_{01} x_3 + v_{02} x y \quad (16)$$

$$(v_{01}, v_{02} : \text{const})$$

に着目すると, (4), (8)は,

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = v_0^2 \sin \theta \quad (17a)$$

$$v_0^2 = v_{01}^2 + v_{02}^2$$

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = v_0^2 \sinh^2 \theta \quad (17b)$$

武野正三

が得られる。通常が多-kink 解の外に、(17a), (17b)にはそれぞれ、次のような二次元空間に固有な解が存在する：

$$u = 4 \tan^{-1} \left[\frac{k \sinh(k'_{1x} x + k'_{2y} y)}{k' \sinh(k_{1x} x + k_{2y} y)} \right] \quad \text{for Eq. (4)} \quad (18a)$$

$$u = 4 \tanh^{-1} \left[\frac{k \sinh(k'_{1x} x + k'_{2y} y)}{k' \sinh(k_{1x} x + k_{2y} y)} \right] \quad \text{for Eq. (8)} \quad (18b)$$

with

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k}' = 0 \quad (19)$$

(18a), (18b) は原点の近傍に於ては渦的解, 原点より十分遠方に於ては kink 的解を持つ新しい型の解である。この解は, 一つの準粒子を示すものであるが, その物理的意味づけについては, 尚省察が必要である。

§ 5 Conclusion

ここでは, 三つの型の場の方程式が nonlinear σ -model と云う立場から統一的に眺められることを示し, 種々の厳密解の中で, 二次元空間に固有な新しい型の解の存在を, 普遍的非線型方程式である Sine-Gordon 及び Sinh-Gordon 方程式に付して示した。通常のソリトンは, 厳密には一次元空間に固有な非線型波である。今後の研究の方向の二つは, 高次元空間に固有な, 普遍的非線型モードを求めることであろう。その一つは, Vortex である。通常の Vortex の外に種々の型の Vortex が存在し得るものと思われる。そして, 此等の非線型モードは, 単に数理解物理学的範囲に止まらず, 自然界の諸々の現象あるいは性質の理解に資することになればと思っている。

References

- 1) M. Hirayama, H. C. Tze, J. Ishida and T. Kawabe, Phys. Letters **66(A)** (1978), 352.
- 2) S. Takeno, Prog. Theor. Phys. **65** (1981), 1844.
- 3) F. J. Ernst, Phys. Rev. **167** (1968), 1175.
- 4) C. N. Yang, Phys. Rev. Letters **38** (1977), 1377.
- 5) A. Tomimatsu and H. Sato, Phys. Rev. Letters **29** (1972), 1344; Prog. Theor. Phys. **50** (1973), 95.