

ソリトン方程式と特殊関数

広大・工 戸 田 良 吾

§ 1. 序

ソリトン方程式と特殊関数との関係については既に

- (i) 岡本和夫氏による Painleve 方程式と特殊関数
- (ii) 中村明氏による, Explode-Decay mode solution, 特に 2 次元戸田方程式の Bessel 関数解
- (iii) 亀高惟倫氏による戸田方程式の特殊関数解

などがある。我々の目的は既存の特殊関数以外の新しい性質をもつ特殊関数を構成することである。§ 2 で特殊関数の行列式による表現を利用した一般化の可能性を示唆する。§ 3 では差分方程式の解から得られる特殊関数についてのべる。

§ 2. 特殊関数の行列式表現

亀高氏にならって次の戸田方程式を考える。

$$\tau_{n+1} \tau_{n-1} = \left(\frac{d^2 \tau_n}{d t^2} \right) \tau_n - \left(\frac{d \tau_n}{d t} \right)^2. \quad (1)$$

この式は通常の戸田方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{d t} r_n = r_n (s_n - s_{n+1}) \\ \frac{d}{d t} s_n = r_{n-1} - r_n \end{cases}$$

を変数変換

$$r_n = \frac{d^2}{d t^2} \log \tau_n$$

とにおいて 2 次形式化したものである。

境界条件として、一つの端が自由端 ($\tau_0 = 1$) になっている場合を考えると、(1) 式の解は次の Wronskian で与えられる。(岡本清郷氏よりの私信)

戸田良吾

$$\tau_n = \begin{vmatrix} \tau & \tau' & \dots & \tau^{(n-1)} \\ \tau' & \tau'' & & \cdot \\ & \vdots & \cdot & \cdot \\ \tau^{(n-1)} & \dots & \tau^{(2n-2)} & \end{vmatrix}, \quad \left(' \equiv \frac{d}{dt} \right). \quad (2)$$

したがって、亀高氏が求めた(1)式の解である特殊関数 Legendre, Gegenbauer, Laguerre, Hermite, ... 等の特殊関数は、全部(2)の対称な Wronskian で表現される。所が最近 Z. Popowicz は 2次元戸田方程式

$$\tau_{n+1} \tau_{n-1} = \tau_{n,xy} \tau_n - \tau_{n,x} \tau_{n,y} \quad (3)$$

で、一つの自由端 ($\tau_0 = 1$) をもつ解が次の Wronskian で表現出来ることを示している。

$$\tau_n = \begin{vmatrix} \tau & \tau_x & \dots & \tau_{(n-1)x} \\ \tau_y & \tau_{xy} & & \cdot \\ & \vdots & \cdot & \cdot \\ \tau_{(n-1)y} & \dots & \tau_{(n-1)x} & \tau_{(n-1)y} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

(4)の表現が(3)式を満たすことは行列式における Sylvester の定理の特殊化 ($r = n - 2$) によって容易に証明される。

(4)の Wronskian は(2)式の一般化になっているので、この表現による特殊関数の一般化の可能性はある。

§ 3 特殊関数の差分化

ソリトン方程式が差分化可能である事はよく知られているので、ソリトン方程式の解である特殊関数も差分化可能であると期待される。我々がよく知っている Legendre の多項式 $P_l(x)$ を差分化したものとして、選点直交多項式(又は Gram の多項式)がある。

結果だけを述べると、次の特殊関数についての差分化に成功した。

- (i) Bessel 関数 (spherical Bessel を含む)
- (ii) Legendre 陪関数 $P_l^m(\cos \theta)$, angle θ を不連続にする。
- (iii) Jacobi の多項式, これも angle θ を不連続にしたもの。

現在の所、これらの差分化された多項式はソリトン理論とは独立に得られたものであるが、将来はソリトン理論の「わく内」で構成出来るものと予想される。

高次元ソリトン (ばくはつーげんすいソリトン)

大阪外大・物理 中村 明

§ 1 高次元ソリトンとばくはつーげんすいソリトン

ある種のいわゆる“完全積分の可能なシステム”といわれる非線形システムでのなみのうんどうが、ソリトンとよばれる、基本的な、なみによって非常に、きれいに記述されることが、わかってきた。しかしいままでは、システムは空間1次元がおおかった。空間2, 3次元ではまだまだわからないことがおおい。

高次元のなかでも、いちばんかんたんそうな空間2次元についてかんがえる。わたしは、この数年のころみにより、少なくとも空間2次元では、いままでよく、しられていた、ふつうのソリトン(一定のなみのかたちをたもちつつ、はしってゆく、ようななみ)だけでなく、かたちが、ふくらんだり、しぼんだりするなみ“ばくはつーげんすいソリトン”が存在することを、あきらかにしてきた。2次元の具体例として、みつかっているものにつぎがある。

- 1) cylindrical KdV, ¹⁾
- 2) 2次元 KdV (\equiv KP), ²⁾
- 3) 2次元 Toda, ³⁾
- 4) 2次元 (cubic) nonlinear Schroedinger, ⁴⁾
- 5) 2次元 (coupled) " , ⁵⁾

ここで1)~3)までは、ばくはつーげんすいソリトンは、いつもベッセル関数や、その親類であるエアリー関数で、かかれる。4)は、ふつうのいみでの、いわゆる完全積分の可能なシステムでは、ないとかんがえられるので、すこし例外的にかんがえないとダメであろう。

5)だけが完全積分可能な1), 2), 3), 5)のなかで、ただひとつ指数関数で、かかれた、ばくはつーげんすいソリトンをもつ。

そこで、でてくるオモシロイ問題として、つぎが、かんがえられる。はたして5)にもベッセル関数で、あらわされる、ばくはつーげんすいソリトンが存在しないのだろうか? これに