

研究会報告

ッタリとあてはまっている。高い次元のソリトンでは、ふえた次元のぶんだけ自由度がふえるせいか、波の形も刻々かわりゆくし、また、そのうえにも、まだまだおもしろい多様な現象があらわれそうである。ここ 20 年の間に、空間 1 次元のソリトン理論は、ものすごく発達したわけだが、高い空間次元のソリトンについては、まだまだの感がある。多次元のソリトンの研究のふたは、いままさに、あけられたばかりではないだろうか？

参考文献

- 1) S. Maxon and J. Viecelli, Phys. Fluids **17** (1974) 1614.
- 2) F. Calogero and A. Degasperis, Lett. Nuovo Cimento **23** (1978) 150.
- 3) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 2380.
- 4) R. S. Johnson and S. Thompson, Phys. Lett. **66A** (1978) 279.
- 5) A. Nakamura, Phys. Lett. **88A** (1982) 55.
- 6) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 3713.
- 7) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 380.
- 8) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) No. 6 to appear.

拡張された Harry Dym 方程式

川 本 俊 治

与えられた非線形偏微分方程式が逆散乱法で解けるということと、その相似解がパンルベ (Painlevé) 方程式を満足するということの密接なつながりが指摘されて以来、¹⁾ いわゆる“パンルベ解析”が、与式の可積分性を調べる有力な手段となってきた。

そもそもこの解析は、相似解²⁾と 50 種のパンルベ型 2 階常微分方程式³⁾との関係の議論に始まり、その後 Weiss et al.⁴⁾によって、与式を常微分方程式に変換せずに偏微分方程式のままでパンルベの性質の有無を調べる手法へと発展させられた。最近では、多くのソリトン方程式がパンルベ解析されている。^{4, 5)} ここでいうパンルベの性質とは、パンルベ型方程式の解が持つ特異点の性質、という意味である。すなわち、一般に非線型方程式の解の特異点の位置は、その積分定数によって“動きうる (movable)”と考えられるが、パンルベ型方程式は、動きうる真性特異点や分岐点 (movable critical points) を持たない式として知られている。したがって、

与式の解の特異点が極 (poles) だけで構成されている時, その式はパンルベの性質を持っており, 可積分性と強く結びついている, とみることができる.

さて, 多くのソリトン方程式がパンルベ解析され, パンルベの性質を持つことが示されてきた. ところが例外として, たとえば非線形

$$\text{拡散方程式}^{5)} \quad r_\tau = r^2 r_{yy} \quad (1)$$

$$\text{と Harry Dym 方程式}^{6,7)} \quad r_\tau = r^3 r_{yyy} \quad (2)$$

は, どちらも可積分系であるにもかかわらずパンルベの性質を持たない式である, と報告されている.⁸⁾ 以下では, 式(1)と(2)が特別な座標と Cole-Hopf 変換により, それぞれ Burgers 方程式, modified KdV (mKdV) 方程式に変換されることを示し, さらに拡張された Harry Dym 方程式のパンルベ解析が示されている.

まず, 座標⁹⁾

$$x = \int^y \frac{1}{r(y, \tau)} dy, \quad t = \tau \quad (3)$$

を導入すると式(1)は熱伝導方程式 $r_t = r_{xx}$ になり, Cole-Hopf 変換

$$u(x, t) = r_x / r \quad (4)$$

によって Burgers 方程式

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + u_x)$$

となる. 式(2)については, 座標(3)と変換(4)により mKdV 方程式

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} u^3 + u_{xx} \right)$$

へ変換できる. 式(1), (2)さらに 4 階, 5 階偏微分方程式などが, Sawada-Kotera 方程式, Kaup-Kupershmidt 方程式とつながることもわかった.¹⁰⁾ 同様に, 拡張された Harry Dym 方程式

$$r_\tau = r^3 r_{yyy} + (1 + \beta) r^2 r_y r_{yy} \quad (5)$$

の場合は

$$u_t - \frac{3\beta}{2} u^2 u_x - \frac{(1 + \beta)}{2} (u^2)_{xx} - u_{xxx} = 0 \quad (6)$$

である. そこで級数展開

研究会報告

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j+\alpha}$$

を式(6)に代入し, $j=0$ の場合から $\alpha=-1$ が得られる. 式(6)の解を $\phi(x, t)=0$ のまわりでローラン級数展開した時に, ϕ のマイナスのべきが有限個であれば極と対応することから, $\alpha=-1$ はパンルベの性質として都合がよい. また最低次 ϕ^{j-4} の係数の漸化式は

$$\begin{aligned} & \{ u_{j-3, t} + (j-3) u_{j-2} \phi_t \} \\ & - \frac{3}{2} \beta \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-k-1} u_k u_l u_{j-k-l-1, x} + \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^{j-k} (j-k-l-1) u_k u_l u_{j-k-l} \phi_x \right\} \\ & - (1+\beta) \left\{ \sum_{k=0}^{j-2} u_{k, x} u_{j-k-2, x} + 2 \sum_{k=0}^{j-1} (j-k-2) u_{k, x} u_{j-k-1} \phi_x \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=0}^j (k-1)(j-k-1) u_k u_{j-k} \phi_x^2 \right\} \\ & - (1+\beta) \left\{ \sum_{k=0}^{j-2} u_k u_{j-k-2, xx} + 2 \sum_{k=0}^{j-1} (j-k-2) u_k u_{j-k-1, x} \phi_x \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=0}^j (j-k-2)(j-k-1) u_k u_{j-k} \phi_x^2 + \sum_{k=0}^{j-1} (j-k-2) u_k u_{j-k-1} \phi_{xx} \right\} \\ & - \{ u_{j-3, xxx} + 3(j-3) u_{j-2, xx} \phi_x + 3(j-2)(j-3) u_{j-1, x} \phi_x^2 \\ & \quad + 3(j-3) u_{j-2, x} \phi_{xx} + (j-1)(j-2)(j-3) u_j \phi_x^3 \\ & \quad + 3(j-2)(j-3) u_{j-1} \phi_x \phi_{xx} + (j-3) u_{j-2} \phi_{xxx} \} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

である. $u_0=2\phi_x$ を使って u_j を含む項を集めると, 共鳴(resonances)は $j=-1, 3, 2(1-\beta)$ で生じることがわかる. $2(1-\beta)$ が正整数でなければならないことに注意して, 関数 $\{\phi, u_3, u_{2(1-\beta)}\}$ が任意であるかを調べてみよう. 漸化式(7)から, $j=-1$: ϕ が任意関数, $j=0$: $u_0=2\phi_x$, $j=1$: $\beta=1/2$ で u_1 は任意関数, $j=2$: $\beta=0$ で u_2 は任意関数となるが ϕ は任意でなくなる. $j=3$: β によらず u_3 は任意関数, $j=4$: $\beta=-1$ で u_4 は任意関数, $j=5$: $\beta=-3/2$ で u_5 は任意関数となるが ϕ は u_3 に依存する. ……以上から, $\beta=-1, 1/2$ の時, 式(6)の解は3個の任意関数を持っている. なるほど, $\beta=-1$ は mKdV 方程式に対応し, $\beta=1/2$ では式(6)は変換 $t \rightarrow -t, u \rightarrow 2u$ および $u = (\ln f)_x$ によって高次 Burgers 方程式 $f_t + f_{xxx} = 0$ に帰着する. 結局, 拡張された Harry Dym 方程式(5)は, 式(6)のパンルベ解析を通して $\beta=-1, 1/2$ の時にパンルベの性質を持つことがわかった.

座標(3)に対して貴重な suggestions をいただいた広島大の広田先生, そして日頃御指導いただ

く阪府大ソリトン研究グループの諸先生に深謝申し上げる。

参考文献

- 1) M. J. Ablowitz and H. Segur, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1103.
- 2) M. Tajiri and S. Kawamoto, J. Phys. Soc. Jpn. **51** (1982) 1678.
- 3) H. T. Davis, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations* (Dover, New York, 1962) p. 495.
- 4) J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale, J. Math. Phys. **24** (1983) 522.
- 5) W. H. Steeb, M. Kloeke, B. M. Spieker and D. Gensing, Prog. Theor. Phys. **73** (1985) 344.
- 6) M. D. Kruskal, Lecture Notes in Physics **38** (1975) 310.
- 7) M. Wadati, K. Konno and Y. H. Ichikawa, J. Phys. Soc. Jpn. **47** (1979) 1698.
- 8) J. Weiss, J. Math. Phys. **24** (1983) 1405.
- 9) Y. Ishimori, J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 2471.
- 10) S. Kawamoto, to be published in J. Phys. Soc. Jpn.

電離波における包絡ソリトンの観測

名工大 大江 一行

1. はじめに

電離波は数 Torr 程度の直流グロー放電陽光柱に発生する波動である。この場合、プラズマは電離度が $10^{-4} \sim 10^{-5}$ の弱電離プラズマである。従って、一般のプラズマ波とは異り、電離に伴って発生する波動で、電離波（又は電離波動）と呼ばれている。希ガスの陽光柱に励振される波の線形の性質はよく研究されていて、典型的には後進波特性をもつ強分散波である。今回は電離波の包絡ソリトンの観測結果を報告する。

2. 実験とその結果

長さ 150 cm, 内径 1 cm のガラス製の放電管を用い、気体は He を使用した。放電管の陰極から約 10 cm の所にグリッドを設け波を励振した。波の検出は放電管の外部から光の変動により行った。Fig. 1 には、浅い振巾変調の加えられた連続波を励振するとき、グリッドからの距離 x が大きくなるにつれて変調度が深くなることが示されている。 $x = 115$ cm 以上では、包絡線