

## 散逸と外力のある非線形シュレディンガー方程式 における低次元のカオス

名大・理 野 崎 一 洋, 戸 次 直 明

### §1 序 論

近年, “ソリトン” の概念が, 流体物理, プラズマは言うに及ばず, 素粒子, 固体中の素励起, 生体物理, ……等, 非常に多くの物理系に適用されて, その普遍的な有用性が認識されている. しかしながら, 可積分系であるソリトン系に, 外力と散逸とが加わった場合, この非可積分系はどのように振舞うであろうか? 現実の物理系を考えると, ソリトン系はこのような非可積分系で記述できる. 例えば, 光通信における非線形パルスの伝播なども, このような非可積分系のモデルと考えることができるであろう. ここでは, 外力と散逸とが加わった非線形シュレディンガー方程式をモデルにして, 外力の大きさを少しずつ大きくしていくと, 周期倍化現象を通して, 包絡ソリトンが時間的にカオス化することを, もとの系の遞減系で説明できることを示す.

### §2 遞減系

我々が興味をもつ方程式は,

$$i q_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = -i r q - i \varepsilon \exp(i \omega t), \quad (1)$$

である.

ここで,  $r$  は正の定数で散逸,  $\varepsilon$  は外力の大きさ,  $\omega$  は角周波数を表わす. 均質な場合 ( $q_{xx} = 0$ ) は, 式(1)は,

$$\begin{aligned} (2|c|^2 - \omega)c &= -i\varepsilon - i r c, \\ q &\equiv c \exp(i \omega t), \end{aligned} \quad (2)$$

となる. 小さな  $\varepsilon$  と  $r$  に対して, 式(2)より,

$$\left. \begin{aligned} c_1 &\sim i\varepsilon/\omega, \\ c_2 &\sim -i(\omega/2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

## 研究会報告

を得る.  $c_1$  は強制振動,  $c_2$  は共鳴振動を表わす. 一方,  $q_{xx} \neq 0$  の場合は, 共鳴振動のほうに変調不安定になり, 共鳴するソリトンが現われ, 強制振動のほうは安定である.  $\varepsilon$  と  $r$  が十分小さい場合, このソリトンの位相は, 第1次の摂動計算によって, ソリトンと非ソリトン部分(輻射部分)とが分離できて, 位相平面(ソリトンの位相と振巾の平面)上でロックされることが示される. しかし, 摂動の大きさ( $\varepsilon$ )を増やしていくと, もはや, ソリトンと非ソリトン部分は分離できず, 第1次の摂動理論は使えなくなる. そこで, 式(1)に第2次の摂動理論を適用し, ソリトンと輻射部分との相互作用を含む低次元系を得る:

$$\begin{aligned} \eta_t = & -2\pi |c|^2 \eta^2 \cos \chi - 2r\eta + 4\pi |c|^2 \eta \sin 2\chi \\ & + \frac{8f}{\pi} \eta |\tilde{\rho}c| \sin(2\chi - \tilde{\varphi}) + \frac{r}{2} f |\tilde{\rho}| \sin(\chi - \tilde{\varphi}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \chi_t = & \omega - 4\eta^2 - 4|c|^2 + 4\pi\eta |c| \sin \chi + 2|c|^2 \cos 2\chi \\ & + \frac{4f}{\pi} |\tilde{\rho}c| \cos(2\chi - \tilde{\varphi}) + \{(2-\pi)r/(2\pi\eta)\} f |\tilde{\rho}| \cos(\chi - \tilde{\varphi}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tilde{\rho}_t = i\omega\tilde{\rho} - r\tilde{\rho} + 8i\eta |c| e^{2i\chi} + i\pi r e^{i\chi}. \quad (6)$$

ただし,  $(\eta, \chi)$  はソリトンの振巾と位相に対応し,  $(\tilde{\rho}, \tilde{\varphi})$  は輻射部分の長波長モードの振巾と位相に対応し,  $f$  は重み定数である.

## §3 数値計算

逡減系(4)~(6)の有効性を調べるため, 数値計算を実行し, もとの無限自由度の系(1)と比較した. その結果,  $\varepsilon$  をパラメータにして(他は固定),  $\varepsilon$  の閾値( $\varepsilon_s$ )までは, 周期倍化現象を通してソリトンがカオス化する系列がもとの系のものとよく一致していることがわかった. したがって, この周期倍化現象は, ソリトンと輻射部分の長波長モードとの非線形相互作用によるものであることが確かめられた.  $\varepsilon$  が  $\varepsilon_s$  よりも大きくなると, 非線形相互作用により多くの短波長モードも励起されて, 逡減系だけで系(1)は説明できなくなる.

## §4 結論

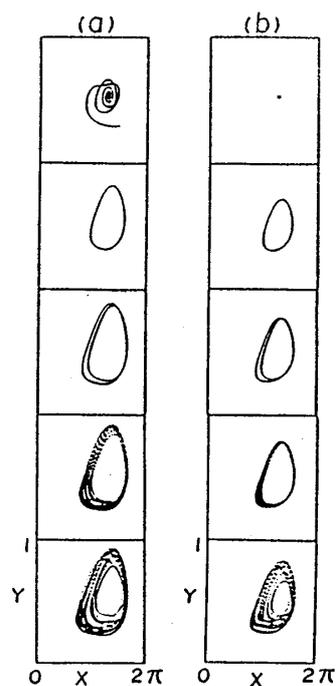
外力の大きさのパラメータがある閾値まで( $2\sqrt{\omega}r/\pi < \varepsilon \lesssim \varepsilon_s$ )は, 逡減系だけで, 系(1)の示す周期倍化現象の系列を良く再現できる(図参照). この周期倍化現象は, ソリトンと輻射部分の長波長モードとの非線形相互作用によって生じることが示された. 小さなノイズ状態からさえ, 変調不安定性によって, 空間的にコヒーレントで時間的にカオティックな包絡ソリトンに

ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題

至ることもわかった. 又,  $\varepsilon \geq \varepsilon_c$  の場合, 遁滅系では説明できないけれども, 系(1)は, 1次元写像で表わされること, 周期3のリミットサイクルが存在することも示される. ここでは, 散逸の係数  $r$  と外力の周波数  $\omega$  を固定して, 外力の大きさ  $\varepsilon$  をパラメータとして, 周期倍化現象を通してカオスに至る系列を示したけれども, 例えば,  $\omega$  をパラメータにする場合, カオスのルーティン是一般には, 周期倍化現象を介するとは限らない. これらのことは今後の問題であろう.

TABLE I. A sequence of bifurcations for  $\omega=1$  and  $\gamma=0.1$ .

$\varepsilon$	Attractors
0.6	Forced oscillation (F.O.)
-0.105	Fixed point (phase-locked soliton) & F.O.
-0.140	Period 1 & F.O.
0.145	Period 2 & F.O.
0.147	Period 4 & F.O.
0.148	Period 8 & F.O.
0.152	Chaotic attractor 1 (1-D map) & F.O.
-0.156	Chaotic attractor 2 (no 1-D maps) & F.O.
-0.156	Period 3 & F.O.
0.157	Chaotic attractor 2 & F.O.
-0.177	F.O. (no chaotic attractors)
-0.26	Irregular creations and annihilations of solitons & F.O.
-0.26	Onset of stimulated O.T.S.I. (complicated chaotic states)



## 反応拡散系における衝突波動

大阪教育大 古賀真史

### §1 はじめに

非線形反応拡散系において, 生じた波動(パルス解, フロント解, 平面波解など)間の衝突の主要な特徴は, 波動が消滅してしまう事である.(但し例外も報告されている.) Belousov-Zhabotinsky 反応系では, 同心円波, らせん波などの波動が衝突して消える現象が見られる. この様な衝突現象の理想的なものは, 平面波間の衝突であろう. 即ち, 左領域の平面波と右領域の平面波が衝突し, 次から次へと波が消える衝突領域を構成する. 本来, 波が消える現象は transient な過程と思われるが, 平面波間の衝突においては, ある種の定常衝突過程をなすと考