

カオスダイナミクスがもたらす マクロな不確定性と量子論理

日立製作所中央研究所 大 井 激

(1986 年 3 月 15 日受理)

要 旨

カオス力学系は、系の時間的发展とともに情報を生成する。このような系においては、観測時間 Δt と、観測によって確定できる状態空間の体積の大きさ $\Delta \Omega$ との間に、これら両者を同時に小さくはできない、という意味の、マクロな不確定性原理が成り立つ。この原理は、量子力学におけるミクロな不確定性原理に対応する。この対応関係からの類推により、カオス力学が支配する現象において量子論理が支配している可能性を示した。この知見は、カオスダイナミクスが支配する脳の情報処理において、通常のブール論理が成り立たず、確率法則が支配する非古典論理が成り立つであろう、という予想を支持する。

1 緒 言

カオス力学系の軌道の振舞は決定論的法則に従う。それにも拘わらずこれを長時間スケールで観測すると、確率論的に振舞う、すなわち予測不能であることがカオスのもう一つの特徴である。その結果、カオス振動子の発生する信号は不規則かつ乱雑になる。このような信号はしばしば、信号と見なされず、雑音として見過ごされてしまいがちである。確かに信号であることが判っているときでさえ、その乱雑さの故に個々のパルスは意味を持たず、高々信号列全体の持つある種の統計量のみが意味を持つと考えざるを得ない¹⁾。フォノン・ノイマンが 30 年前に神経繊維上の信号パルス列に見た情報伝達の様相はこのようなものであった。そして彼は、このような信号パルスにブール値の意味を与えた論理演算は生体では行なわれておらず、何か別の論理が支配しているであろうと推論した²⁾。最近の生理学および理論物理学の示すところによれば、彼が当時見出した知見は間欠カオスに由来する、位相乱れの大きさのパワースペクトルが周波数 f の逆数に比例する、すなわち $1/f$ パワースペクトルを持つ信号であることが明らかになった。このような性質を持つ信号は通常は $1/f$ 雑音と呼ばれる。このように、確率論的な性質を持つ信号列が生体情報処理において本質的役割を果たしており、かつ、そのよう

大井 澈

な信号を発生する機構はカオスダイナミクスであることが明らかになった。しかしこれらの知見はいまだ物理学の範囲に止まるものである。計算機科学の立場からは、これらの知見が論理演算の基本法則として記述される必要があるが、筆者の知る限りそのような試みは未だ報告されていない。そこで本論文では、カオスダイナミクスに従う生物情報処理を支配する非ブール論理を建設する手掛かりとしての試論を展開する。以下の理論の本質は、カオスダイナミクスによるマクロな不確定性を記述する非ブール論理として、従来ミクロな不確定性を記述するための論理と考えられていた量子論理³⁾を採用する点にある。ここで、マクロな不確定性の概念は津田⁴⁾およびプリゴジン (Prigogine)⁵⁾によった。また、富田による生物情報の基本法則⁶⁾との比較も試みた。

2 マクロな不確定原理

始めに、津田⁴⁾にならって、カオスがマクロな不確定性を生み出す様子を見よう。カオスの例として、(1)式で表される系を考える。適当な初期値 x_0 から出発した軌道

$$f(x_n) = \lambda x_n (1 - x_n) \quad (1)$$

ただし $n \in N$, $x_n \in R$, $0 < x_0 < 1$, $\lambda > 3.85$

は $[0, 1]$ 区間を複雑に動きまわる。この軌道を二進展開して表示すれば、例えば 0.0100101110... と表される。このような表示では、桁数が多くなればそれだけ細かい観測をしたことに対応する。言い換えれば、数列の右側に行く程、ミクロな状態を表現していることになるし、左方はマクロな状態に対応している。数列を有限で切る操作は、それ以下の桁に熱浴を置いたことに相当している。カオスの場合、このような二進展開を無限まで行なってはじめて、初期状態を一意に決定できる。しかしながら実際問題としてわれわれは、有限の（それがどんなに大きくても）観測時間しか持ち得ない。このことは、初期状態に不確定性を自然に生み出す。

以上の津田の議論を要約すれば、カオスが支配する系に対してわれわれは、観測時間 Δt と、観測によって確定できる状態空間の体積 $\Delta \Omega$ （その逆数の対数が獲得情報量 ΔI になる、すなわち $\Delta I = -\log_2 \Delta \Omega$, $\Delta \Omega = 2^{-\Delta I}$ ）とを同時に小さくすることはできない、ということができる。この命題を(2)式のように表すことにしよう。ここで K は定数（普遍定数が存在するかどうかは不明）である。この法則を、量子力学における不確定性原理との対比の

$$\Delta t \cdot \Delta \Omega = 2^{-\Delta I} \cdot \Delta t \geq K \quad (2)$$

意味で、マクロな不確定性原理と呼ぶことにする。

ところで、カオスのような不安定な力学系における時間およびエントロピー（または情報）の物理的意味についてはプリゴジンが最近詳細に吟味している⁵⁾。その議論によれば、不安定な力学系における時間は単なる外部変数ではなく、系の内部状態を記述する演算子（時間演算子）とみなす必要がある。またそれに伴ってエントロピーもまたエントロピー演算子とみなす必要がある。そして、これらの演算子の間には交換可能でない関係がある。これらの関係は丁度、量子力学において位置と運動量が非可換な演算子によって表される（ハイゼンベルグの不確定性原理）ことに対応する。従ってカオス系における時間演算子とエントロピー演算子の非可換性からも、マクロな不確定性原理が自然に導き出される。

3 量子論理

このような物理系について、ある命題の真偽を問う実験を行なう事を考える。たとえば、「流体の渦のパターンがある特定のパターンからのずれ $\Delta\Gamma$ 以内である」という命題に対して正否の応答をする観測実験を行なうとする。するとその結果は、カオス力学系のマクロな不確定性に由来して、〔1〕正、〔2〕否、のほか〔3〕どちらでもない、のいずれでもあり得る。これは古典論理（完備ブール代数に基づく一階述語論理で記述できる論理）が正または否の二値論理であるのに対し、多値論理で表現する必要があることを示す。3個またはそれ以上の真理値をとる非古典論理としては、様相論理、直観論理、量子論理など種々のものが考えられる⁷⁾。これらのうち量子論理は、ミクロな不確定性原理に基づいて構成されたものである。したがって本報で論ずるマクロな不確定性との対応を考えることが最も容易である。そこで以下に量子論理の概略を説明し³⁾、さらにそれをカオスのようなマクロな系に適用することの意義を考察する。

よく知られているように、量子力学においては、粒子の位置と運動量を同時に確定的に測定することはできないという、不確定性原理が支配している。このような世界で、「ある物理量を観測するとその値はこれこれである」という観測命題を考える。そして量子力学における位置と運動量の観測は互いに非両立的命題であるという（古典力学系ではもちろんこれらは両立的である）。これら二つの命題を記号 A , B で表そう。これらがもし両立的であるならば、次ぎの命題式が成立するはずである。

$$A \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \quad (3)$$

ここで記号 $\Leftrightarrow$ は同値、 $\wedge$ は「および」、 $\vee$ は「または」、 $\neg$ は否定、をそれぞれ表す。この式は、命題 A の真理値は、もう一つの命題 B の真偽にかかわらず定まっていることを示してい

大井 徹

る。 A が B に対して両立的であるときは、 B も A に対して両立的であるから、次の式も同時に成立しなければならない。

$$B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \quad (4)$$

ところがこれらは実は両立的ではないから、式(3)、(4)は成立しない。(3)式についていえば、右辺の式の値は A ではない。しかるに

$$A \wedge (B \vee \neg B) \Leftrightarrow A$$

であるから、 A と B とが非両立的であるとき、つぎの式は成立しない。

$$A \wedge (B \vee \neg B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \quad (5)$$

ここで $\neg B$ を C で置き換えて一般化すると、(6)式の分配法則が導かれる。すなわち、 A と B または A と C が非両立的であるとき、つぎの分配法則は成立しない。

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (6)$$

同様に、つぎの分配法則も成立しない。

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (7)$$

このように、不確定性すなわち命題の非両立性の帰結として、分配法則が成立しない、という点が量子論理の著しい特徴である。この特徴は、量子力学が成立する線形部分空間の論理として表すこともできる。

このような量子論理はしかしながら、今のところほとんどその実用価値が認められていない。不確定性原理の支配する世界が量子力学というミクロな世界に限られると考えられていたのがその理由であろうか。しかし竹内が指摘するように、この世の論理が本当は、YESかNOか、どちらともいえないか、という、量子力学の論理に従っているとすれば、量子論理の方が本当の論理であるかも知れない。そして津田が指摘するように、マクロな世界を記述するカオス力学系において、たしかにマクロな不確定性原理が作用している。したがって、意味情報の記述、統合、認識などという、カオス力学過程に支配されられると思われるマクロな系に対しては、古典論理の代わりに量子論理の適用を試みることの意義は大きいと思われる。

以上に述べた、カオス物理学の知見を計算機科学上の論理法則に翻訳する筋道を要約するとつぎのようになる。

〔1〕 カオスダイナミクスの持つ確率論的性質の帰結として、観測時間と、獲得情報量の逆数の指数との間に不確定性が生ずる。

〔2〕 この不確定性から、「観測時間を確定する」という観測命題と、「獲得情報量を確定する」という観測命題とは非両立的である、という命題が導かれる。

〔3〕 この非両立性は、両観測命題間に分配法則が成立しないことを特徴とする論理法則で記述される。そのような論理法則として量子論理をあげることができる。

このような論理を具体的に適用して有用性を吟味することは今後の課題であるが、以下に述べるパターン認識の分野で量子論理の適用の可能性が論じられていることは参考になろう。すなわち、渡辺によれば⁸⁾ 認識されるべきデータを分類する方法として、データの持つ属性の数すなわちデータの次元で分類する方法、すなわち部分空間法が有効である。すると、こうして分類された類の間には、部分空間の論理である量子論理が成立し、分配法則が成立しない。渡辺はこのほか、ゲシュタルト心理学の示すパターンの二義性を量子論理で記述する可能性にも言及している。

なおここで、分配法則とは線形法則であり、分配法則の破れは線形法則の破れに他ならないことを指摘しておこう。いいかえれば量子論理は、線形部分空間上の非線形演算子を取り扱っていることになる。よく知られているように、カオス力学系の不確定性は、状態変数間の非線形相互作用の帰結である。したがって、カオス系に関する限り、分配法則が成り立たない論理に支配されることはむしろ自明といえる。この見地からも、量子論理のような論理をカオスに適用することは妥当なものと推測される。この議論からさらに、量子力学におけるミクロな不確定性の背後に、単なる確率法則の支配をこえた、非線形性を特徴とする決定論的法則がひそんでいることが示唆される、とも言えるのではないだろうか。

4 情報力学の基本法則との比較

ミクロなカオス（分子カオス）が基盤となって二つの基本法則より成る熱力学が成立することはよく知られている。その類推によって富田は、マクロなカオスが基盤となる情報力学が成立し、それは情報量と自由度の相対性を記述する二つの独立な基本法則より成る、と考えるべきことを提案している⁶⁾。ここで情報力学の第一法則とは、伝達に際しての情報量の保存を要求すれば、関連する自由度を制限することはできない、ということである。具体的には、生物の形態形成における情報伝達の正確さを要求すれば、個体、器官、組織、細胞、核、DNA、というように、何段階にもわたる入れ子になった内部構造を降りて分子レベルの遺伝子型の情報伝達の正確さまで確保しなければならないことを意味する。つぎに情報力学の第二法則とは、

大井 澈

制御の自由度を限定すれば、伝達に際して情報量の保存は期待できない、ということである。具体的には例えば、有核細胞と無核細胞とを区別し難い程度の粗い制御であれば、自己と類似のものを再生することは保証できないことを意味する。

富田の議論において、情報量と自由度とを関連させるカオス機構が、入れ子構造をもたらすという点以外は必ずしも明確ではない。しかし生物情報がマクロなカオスによって伝達、処理されているという仮定（本報がとる立場）を承認すれば、カオスによって情報量と、関連する自由度とが相互に独立になり得ないことを主張する法則の提案として注目される。

この主張において、情報量 ΔI (> 0) と、関連自由度 ΔF (> 0) との間に成り立つ関係を考えてみよう。まず第一法則は、伝達すべき情報量 ΔI を固定 (ΔI_f) したとき関連自由度 ΔF はある値以上でなければならない、すなわち、 $\Delta F \cdot \Delta I_f$ または $\Delta F / \Delta I_f \geq \text{const}$ という不等式が成り立つことを要請する。

つぎに第二法則は、関連自由度 ΔF を固定 (ΔF_f) したとき、伝達される情報量 ΔI はある一定値をこえることはできない、すなわち、 $\Delta I \cdot \Delta F_f$ または $\Delta I / \Delta F_f \leq \text{const}$ という不等式が成立することを要請する。ところがこれらの二つずつの関係のうち同時に恒等的に成立する関係は、第一法則において $\Delta F / \Delta I \geq \text{const}$ 、かつ、第二法則において $\Delta I / \Delta F \leq \text{const}$ の場合のみである（ただし添字 f を省いた）。

結局、情報量 ΔI と、関連自由度 ΔF との間にはつぎの不等式が成り立つ、といえる。ただし K' は定数である。

$$\Delta F \cdot (1 / \Delta I) \geq K' \quad (8)$$

ここで自由度 ΔF は、情報伝達においてたどるべき生物の入れ子構造の連鎖の長さである。ところが一般に、再帰的手続きが1単位進むことは、時間が1単位進むことと等価である⁹⁾ したがって、入れ子構造の連鎖の長さ（再帰構造の深さ）は、時間 Δt におきかえられる。結局、(8)式はつぎのように書き換えられる。ただし K'' は定数である。

$$\Delta t \cdot (1 / \Delta I) \geq K'' \quad (9)$$

この式と、前節に説明した(2)式の類似性はもはや指摘するまでもないであろう。

結局、富田の主張する情報力学の基本法則は、カオス力学のもたらすマクロな不確定性原理の別の表現とみなせる。そしてまた、富田のいう関連自由度を本論文で述べた時間に変換することによって、生物情報処理の本質についての新しい視点を導入できる。すなわち、情報の完全な保存再生を期待するなら本質的に著しく長い時間が必要となり、短時間で情報伝達を行な

おうとするなら、情報の保存は原理的に期待できない、ということである。前者は富田が例示しているように生物の発生において経験されることであり、後者は脳の情報処理の実情が端的に証明していることである。

ところで、富田の提案する基本法則には、生物あるいはカオス情報処理の最大の特徴である、情報の生成という概念が、陽には表れない。その理由はもちろん、「情報が生成される」という命題が、「情報が保存されない」という命題に含まれてしまっているからである。したがって、生物的情報処理装置の開発の意義は、富田の意味で情報が保存されず、かつ有限時間内で処理が完了するような装置が得られる点にあるといえる。他方、情報が厳密に保存されるような情報処理装置の開発は、現行のデジタル計算機で既に基本的には達成されているといえよう。

5 まとめと今後の課題

生物情報処理過程を支配するカオス力学過程がマクロな不確定性を生み出し、これが量子論理で記述できる可能性を示した。量子論理自身は演えき論理の枠組みの中にあるが、この論理が持つ確率論的性格は、量子論理が帰納論理への橋渡しの立場にあることを示唆する。カオスダイナミクスの性質から、生物情報処理の本質である帰納論理を導き出すことが今後の課題であろう。

謝 辞

本研究に御批判を賜り、また、プリゴジンによる時間演算子の概念を教示された新技術開発事業団津田一郎氏に深く感謝する。また、御批判を頂いた当社二村良彦、村山良昌、安村通晃の各氏に感謝する。

参考文献

- 1) 武者利光：生体情報と $1/f$ ゆらぎ，応用物理，54（1985）pp 429－435.
- 2) J. フォン・ノイマン：電子計算機と頭脳 (Yale Univ. Press (1957))，飯島泰蔵，猪股修二，熊田衛訳（昭 39－10），ラティス（東京）。
- 3) 竹内外史：線形代数と量子力学（昭 56－2）裳華房（東京）。
- 4) 津田一郎：非線形非平衡系のカオスと分岐構造，京都大学博士論文（昭 57）。
- 5) I. プリゴジン：存在から発展へ（Freeman（1980）），小出昭一郎，安孫子誠也訳（昭 59－12）みすず書房（東京）。
- 6) 富田和久：カオスの意義，日本物理学会誌，40（1985）pp 99－118。

大井 澈

- 7) 杉原丈夫：非古典論理学（昭50-5）槇書店（東京）。
- 8) 渡辺慧：認識とパタン（昭53-1）岩波新書。
- 9) B. B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature* (1982), Freeman (New York) pp58-73.