13. ＤＬＣＡに対するくりこみ群アプローチ

神戸大・理　　早　川　尚　男

拡散に支配されたクラスター凝集（diffusion-limited cluster aggregation）に対してくりこみ群を適用して解析を行い，定常的な粒子の注入を伴い不可逆的に凝集が進む場合には臨界現象とのアナロジーが成立することを示した。

クラスター・クラスター凝集（ＣＣＡ）は本研究会の主題であるコロイド系，エアロゾル系の凝集に留らず天体現象や生物現象でも観測される普遍的な現象である。また狭義のＤＬＡに較べ，サイズ分布等の統計量が明確で統計物理の問題としても，より目標設定が容易で興味深い。これらの現象で共通して現れるのは幾何学的形状及び統計量のスケーリング則であり，何故にスケーリング則が成立するかは凝集にとどまらない重要な問題となっている。筆者はＤＬＣＡを例にとりスケーリング則の成因を探ってみた。

1985年に Vicsek 等[1]が定常的な粒子注入のあるＣＣＡを解析し，注入率 h とクラスターの総個数 n に対し次のスケーリング則が成立することを見い出した。

$$n(t)=h^{\frac{1}{\delta}}\,f\left(h^{1-\frac{1}{\delta}}\,t\right) \tag{1}$$

但し t は時間，f はスケーリング関数で $f(x)\to 1$（$x\to\infty$），$f(x)\to 0$（$x\to 0$）が成立している。(1)式は n を磁化，h を磁場と見做せば相転移の際の秩序，特に磁化によるもの，を想起させる。このことを最初に指摘したのは Rácz[2] で，彼は指数 δ に対して

$$\delta=\begin{cases} 2 & d>2 \\ \dfrac{d+2}{d} & d<2 \end{cases} \tag{2}$$

を得ている。この値は Vicsek 等のシュミレーションでも可成りよく再現されている。

一方，高安，西川[3]はより単純化された類似のモデルのシュミレーションを行い，サイズ分布が漸近的に巾分布に従うことを見い出した。彼等は理想化の手段として，クラスターは形状を無視した格子点で代表させ，通常大クラスターに対して重要になる除去効果を無視した。前記の簡単化は併合確率のクラスターのサイズ依存性を無視したことに相当し，Brown 運動による併合過程の近似を与える。後記の簡単化は，頂度乱流で Reynolds 数を無限にしてユニバーサリティが回復するように，系の持つ特色を採り出す為の重要な単純化となっている。しかし

彼等[3)4)]は臨界次元は4ではないかと云う結論を出し，Vicsek等，Rácz などの解析とは矛盾している。（他のあらゆる文献の中でも $d_c=4$ は高安等[3)4)]のみ主張している）。

筆者はこの2グループの橋渡しをすべく解析的研究を行った。結論を行えば $d_c=2$ が正しく，更に高安等の観測した巾分布に対し

$$C_s(t) \sim s^{-\tau} \quad (3a)$$

$$\tau = 1 + \frac{1}{\delta} \quad (3b)$$

と云うスケーリング関係式を導いた。但し δ は(2)式で与えられる。

筆者の用いた手法は土井[5)]によって解析，開発された Fock-space formalism と呼ばれるものである。凝集現象

$$X_i + X_j \xrightarrow{K_{ij}} X_{i+j} \quad (4)$$

は，この formalism に則り，系の時間発展を表す generating functional を次の式で表すことができる。

$$Z = \int \prod_k D\hat{\phi}_k \, D\phi_k \, \exp\{-(W_0 + W_{int})\} \quad (5a)$$

$$W_0 = \int d^d r \, dt \sum_k \{\hat{\phi}_k \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta\right) \phi_k\} \quad (5b)$$

$$W_{int} = \int d^d r \, dt \sum_{ij} \{\frac{K_{ij}}{2} [\hat{\phi}_{i+j} - \hat{\phi}_i - \hat{\phi}_j - \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j] \phi_i \phi_j\} \quad (5c)$$

但し，$\phi_i, \hat{\phi}_j$ は各 i-mer の生成，消滅に対応し，W_0, W_{int} は free 及び interactive な action である。ここで注目したいのは（5b）式である。（5b）式は通常の diffusion propagator であるが，$\hat{\phi}_k \phi_k$ に比例する項がなく，massless fom になっている。通常，mass が相関距離の逆数を表し，massless は臨界点に対応していることを考えると，（5b）は自動的に臨界的な振舞を保証すると云ってよい。実際，拡散過程は数学的には平均自由行程が零の極限で定義され，種々の self-similarity を持ち，long time tail を持つ事からもこのことは首肯される。従って不可逆凝集のスケーリングの由来はこのことが原因になっていると言ってよい。（因みに可逆凝集では mass term は表れる）。また各 field を，$\langle\phi_k\rangle = c_k$，$\phi_k = c_k + \delta c_k(x, t)$，$\hat{\phi}_k = \hat{c}_k + \delta\hat{c}_k(x, t)$ のように分解した場合，action $W = W_0 + W_{int}$ から運動方程式を導くと

$$\left.\frac{\delta W}{\delta \hat{c}_k}\right|_{\hat{c}_k = 0} = 0 \quad (6a)$$

より，凝集現象では周知の Smoluchowski's equation

$$\frac{\partial c_k}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{i+j=k}K_{ij}\,c_i\,c_j-c_k\sum_{j=1}^{\infty}K_{kj}\,c_j \qquad (6\,b)$$

が得られる。これは action formalism の正しさを支持している。また臨界次元は，この場合（６ｂ）の正当性の臨界を与えるが，K_{ij}/D（Dは拡散係数）が摂動の展開パラメータとなっていることから

$$d_c = 2 \qquad (7)$$

を得る。既述の様に，この結論は高安等[3)4)] の推定を却下しており，彼等の誤りは臨界次元に於ける logarithmic correction を考慮しなかったものによると思われる。

ここで粒子の注入を考える。このとき(4)式の様な一般論を展開するのは難しいので高安等[3)4)]の行ったように$K_{ij}=K=$ const，になる場合を考えよう。そのとき，凝集過程は

$$X+X\xrightarrow[K]{}X \qquad O\xrightarrow[h]{}X \qquad (8)$$

と等価になる。Xはクラスター１個を表している。このとき系の記述は(8)の第１式で表される action に， Legendre 変換で source の効果を定義でき，effective action

$$\begin{aligned}\Gamma &= W'-h\hat{M}\\ &= W'-h\int d^d r'\int_{-\infty}^{t}d\tau\,\hat{\phi}(x',\tau)\end{aligned} \qquad (9)$$

を得る。但しW'は（５ａ）（５ｂ）で$K_{ij}=K$，$\phi_k=\phi$ 等としたものである。このとき，分布関数のラプラス変換が

$$M=\int_0^{\infty}dN\,e^{-hN}c_N=\langle\phi\rangle_h \qquad (10)$$

を充すことが容易に分る。従ってMとhの関係式が求まればサイズ分布を求めることは逆ラプラス変換を施すだけでよい。また$h\to 0$で(10)はクラスターの個数$n(t)$になっていることにも注意したい。

既述の様に臨界現象とのアナロジーが成立するので，くりこみ群による解析が可能なことは想像できる。 注入率hは

$$h = \frac{\delta \Gamma}{\delta \hat{M}} \tag{11}$$

によって，h の従うべきくりこみ群方程式が求まる。これらの解析は磁場を考えたくりこみ群の解析と全く軌を一にしており，解析の結果，極限的な意味で次元解析で得られた(2)式は正しいことが証明できる。詳しくは筆者の論文[6]を参考にされたい。また(10)より，サイズ分布も求まり，（３ａ）（３ｂ）を与える。他にも臨界緩和の指数 Δ が

$$\Delta = 2 - \tau \tag{12}$$

という関係式で得られる。最後のものは実は Scheidegger's river pattern の self-affinity の指数を与えることも筆者によって示された。[6]

こうした場の理論を用いた手法は，応用性が広い。そのひとつとして，高安等[4]によってシュミレートされた Lévy flight による凝集系を考えてみた。Lévy flight は Fourier 成分が

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{P} = D \mid \underline{g} \mid^{\beta} \hat{P} \tag{13}$$

と云う式（ $0 < \beta \leq 2$ ）で記述される。但し β は flight が到達距離 r に対して

$$W(r) \quad \propto \quad r^{-\beta-1} \tag{14}$$

と云う確率で生じるときの指数である。高安等は，(13)で記述される自由粒子による凝集を考えた。このとき，通常 $\beta = 2$ で与えられる拡散を，(13)式でおきかえるだけで全くパラレルに議論を進めることが可能で，臨界次元

$$d_c = \beta \tag{15}$$

を与える。高安等は凝集系のサイズ分布を求めていたが（ $d = 1$ ），パラメータ β に対し，くりこみ群アプローチによる巾分布の指数は

$$\tau = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{1+\beta} & (1 < \beta \leq 2) \qquad (16\,\mathrm{a}) \\[2ex] \dfrac{3}{2} & (\beta < 1) \qquad (16\,\mathrm{b}) \end{cases}$$

である。この値はシュミレーションと定性的な一致は見るものの，定量的な比較とは耐えない。

以上が凡その研究会での報告内容である。若干の註釈を付け，稿を置くことにしよう。まず Fock space fomalism に従い action を導いた処で Markov 性を仮定していることに注意しな

ければならない。これは高安等[3)4)]のシュミレーションでは仮定されており，彼等の解析を考える際には問題はないが，現実の系ではそぐわない場合がありうる。次に（３ｂ）⑿と云った関係式は凝集確率がクラスターのサイズに依存しない場合に成立するが，一般には成り立たないであろう。また式⑵の表式は臨界現象では特異な次元解析が正しい結果を与えることになっている。これは不可逆凝集固有の特性であり，可逆の場合は次元解析では何も言えない。最後に乱流のカスケード過程との類似を指摘して筆を置きたい。何れにせよ，詳細は筆者の論文[6)]を参照のこと。

参　考　文　献

1) T. Vicsek, P. Meakin and F. Family, Phys. Rev. **A 32** (1985) 1122.
2) Z. Rácz, Phys. Rev. **A 32** (1985) 1129.
3) H. Takayasu and I. Nishikava, *Proc. 1st. Int. Symp. on Science on Form* (KTK Sci. Publ. 1986).
4) H. Takayasu, I. Nishikawa and H. Takayasu, submitted to Phys. Rev. A.
5) M. Doi, J. Phys. **A 9** (1976) 1465.
応用例については，最も最近では
T. Ohtsuki and T. Keyes, Phys. Rev. **A 36** (1987) 4434.
6) H. Hayakawa, submitted to J. Phys. A.

14. 格子ＤＬＡにおける異方的パターンへの cross over

中央大・理工　　大　槻　弘　幸

I. 格子DLA及び格子一般化DLAにおけるcross over

２次元のDLAについて計算機シミュレーションが行われ始めた頃、得られたDLAパターンはそれが横たわる格子の形には依存せずにほぼ等方的になると考えられていた。しかしその後、粒子数が4×10^6にも及ぶシミュレーション[1)]が正方格子上で行われると、できたパターンは十字形をしており明かに格子の形に依存していることがわかった。また、もっと小さなパターン（粒子数10^4程度）でも、いくつかのパターンを重ね合わせることによって、基本的な形は異方性を持っていることがわかった。[1)]

I.1　スケール理論からの予想