能性を示す結果を得た。この事実は，クォーク・グルーオンプラズマ相からの信号を検出するという問題にとって重要であろう。数値解析についての分析は，現在進行中である。[5)]

参考文献

1）並木美喜雄，本研究会報告；及びその文献3）

2）V. Canuto and S. H. Hsieh, Nouvo Cimento **48**, 189 (1978)

3）J. D. Bjorken, Phys. Rev. **D27**, 140 (1983)

4）C. Iso, K. Mori and M. Namiki, Prog. Theor. Phys. **22** 403 (1959)

5）S. Date, M. Mizutani, S. Muroya and M. Namiki 準備中.

「van Hove 極限」の補足

散逸系への移行に伴う「エントロピー生成」の構造

京大・理　長谷川　洋

「von Hove極限」に関する一つの課題は，極限力学系を特徴付ける散逸性指標としての「エントロピー生成」がどのようにして可能となったのか，についての見解を確立することであろう。この問題について諸文献を調べてみると，未だ決定的な結果は提出されていないことがわかる。[†] 詳細均合を満すマルコフgeneratorを用いて「エントロピー生成」がどのように与えられるかについては広く合意されているといってよい（前回報告「確率過程の方法による非平衡熱力学」素研74巻6号FIS参照）。すなわち全系を対象系Sと熱浴Rの直積とみて，部分系Sに関する相対エントロピー（或る状態の定常（=平衡）状態に関する）の時間微分である，とされる：

量子動力学半群｛Λ_t, $t \in R^+$（完全正値，trace保存型）｝の場合，[3] 対象系Sの密度行列上に定義されるgenerator L（$\Lambda_t = e^{tL}$）を用い，

$$P \left(= \frac{d}{dt} \mathrm{Tr}\, \rho_s(t)(-\log \rho_s(t) + \log \rho_{se}(t))\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\, L\rho_s(t)(-\log \rho_s(t) + \log \rho_{se}(t)) \geq 0$$

（詳細均合の条件のもとに $\rho_s(t) \xrightarrow{t \to \infty} \rho_{se}$ で，等号はその時に限り成立）というのが，それである。

† この問題はもちろんBoltzmannのH-定理に関する初期の論争[1]に端を発し，Prigogineらの非平衡熱力学Lebowitzの古典非平衡統計力学へと続く。[2] Lebowitzの流れを汲んで問題を掘り下げたSpohnの論文[3]があげられるが。これは問題の提起の明確化にとどまるとみられ，Spohnのこれに続く力作[4]（ハミルトン系→散逸系へのスケーリング移行を総合的に論じたもの）ではむしろこの問題は取り上げられていない。最近のLindblad,[5] Obcemea and Brandas[6]をみても，問題の核心に迫る意欲にも拘らず不透明である。またいわゆる'thermo field dynamics'において散逸性を取り入れる試みが提出されている[7]が，未だ論評の段階に至っていないと思われる。

部分力学が散逸的であってそれに関しエントロピー生成がある，というのはいわば問題の出発点である。何故なら，それは開放系にとっていわば常識的なことであり，それだけでは全系の力学が部分力学に還元される過程で‘真正の’エントロピーがどのようにして部分系の相対エントロピーに置き換えられることになったのか，が明らかでない。

この小論は，部分力学における‘相対エントロピーの時間微分’に置き換えられる論理についての筆者の考えを述べるのが目的である。最近のわれわれの研究（Ojima-Hasegawa-Ichiyanagi）[8]でレスポンス理論でのエントロピー生成を定式化したが，その場合にも相対エントロピーの時間微分を出発点にとっているのは問題の窮極的な解決を先送りしたもので，もう一段の掘り下げを必要とするものである。問題は全系のエントロピーおよびその時間微分をどう取り出すか，であるが，うっかりすると‘全系のエントロピー’なるものは多くの場合無限大であるというところに難しさがある。ここでは（ブラウン粒子）⊗（ガウス型ノイズ）という古典開放系について一つの解答を示してみよう。

自由度 f の古典力学系（変数 $q_i p_i$ をまとめ x_μ $\mu=1, 2\cdots 2f$）に対する自励的運動方程式

$$\dot{x}_\mu = v_\mu(x) \tag{1}$$

から出発し，これを‘確率過程化’することにより全系 $S\otimes R$ を定義して $S\otimes R$ 上のエントロピーの時間変化が漸近的に S 上の相対エントロピーの時間変化に転化されることを示す。力学系 S が保存的であること，およびエネルギー積分 $H(x)$ の存在を保証する二式

$$\mathrm{div}\, v(x) = \sum_\mu \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad v\cdot \mathrm{grad}\, H(x) = \sum_\mu v_\mu \frac{\partial H}{\partial x_\mu} = 0 \tag{2}$$

を仮定することにしよう。（これは通常のハミルトン力学系よりも広いので，準-ハミルトン力学系と呼ぶことにする。）確率過程化に際し R をどう定義するかが問題である。前述の‘無限大の困難’を回避するため，S と R をつなぐ中間的な変数 u_i（$i=1, \cdots 2f$）を仮想的に導入し，拡大された系 $\{x_\mu\}\otimes\{u_i\}$ を考えると，この系の中で S は初期に閉じた系であり時間とともに次第に $\{u_i\}$ に対してのみ熱接触する開放系に移行する，というのが図式である。$\{u_i\}$ がガウス過程であるよう u_i に対する線形の確率微分方程式を設け，また $\{\dot{x}_\mu\}$ と $\{\dot{u}_i\}$ との間に u に関する線形関係を入れる：

$$\dot{x}_\mu = v_\mu(x) + \alpha_{\mu i} u_i \tag{3a}$$

$$\dot{u}_i = -\gamma_{ij}(x)\, u_j - \frac{\partial H}{\partial x_\nu}\alpha_{\nu i} + R_i(t) \tag{3b}$$

（$\alpha_{\mu i}$ は実定数，（$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$）：正値対称行列。添字に関するテンソル和法を用いる）

方程式（3b）において $R_i(t)$ はガウス型・ホワイトノイズを表すものとすれば，この方程式は u に対する線形ランジュバン方程式となり $u(t)$ のガウス過程を保証する（ただし始めの力学変数 x に依存している）。右辺第一項 $-\gamma_{ij}u_j$ は線形ダンピングを表し，この過程が或る平衡状態に向って接近するものであることを示す。第二項 $-\dfrac{\partial H}{\partial x_\nu}\alpha_{\nu_i}$ は，この平衡状態が拡大系 $\{x_\mu\}\otimes\{u_i\}$ のエネルギーの平衡状態であるように設けられたものであることが次のようにしてわかる：

$\frac{\partial H}{\partial x_\mu}\dot{x}_\mu + u_i \dot{u}_i$ を作ると，(3a，b) を用いることにより

$$= \frac{\partial H}{\partial x_\mu} v_\mu + \cancel{\frac{\partial H}{\partial x_\mu}} \alpha_{\mu i} u_i - \nu_{ij} u_i u_j - \cancel{\frac{\partial H}{\partial x_\nu} \alpha_{\nu i} u_i} + u_i R_i(t)$$

となるが，(2) の仮定から第一項も 0，従って右辺はダンピングと揺動項だけとなるからである。従って

$$\frac{d}{dt}\left(H(x) + \frac{1}{2} u_i u_i \right) = -\gamma_{ij} u_i u_j + u_i R_i(t)$$

であるが，右辺の揺動項を u_i と $R_i(t)$ との Stratonovich 積とみなすならば揺動・散逸関係を仮定して $\gamma_{ii} kT + [u_i R_i(t)$ の Itô 積] となることがわかるので，ノイズに関する平均を取ることにより

$$\frac{d}{dt}\langle H(x) + \frac{1}{2} u_i u_i \rangle = -\gamma_{ij}(\langle u_i u_j \rangle - kT\delta_{ij}). \qquad (4)$$

すなわち $\{u_i\}$ の平衡状態は温度 T の熱平衡状態で $\langle u_i u_j \rangle \to kT\delta_{ij}$ より $t \to \infty$ とともに $\{x_\mu\} \otimes \{u_i\}$ の分布が $H(x) + \frac{1}{2} u_i u_i$ をエネルギーとする同温度の平衡分布に近切することが知られた。

系 $\{x_\mu\}$ (= S) と $\{u_i\}$ との接触が $t = 0$ に始まったとして，その後 $t \to \infty$ に至るまでの全系に関する確率過程を $\{u_i\}$ の運動を速いとする断熱近似によって扱うものとすれば，全時間にわたり $\{u_i\}$ はガウス過程に従い

$$P(\{x_\mu\} \otimes \{u_i\}) = P_t(x) \times e^{-\frac{1}{2kT} u_{i_t} u_{i_t}} + \text{const} \qquad (5)$$

従って $\{x_\mu\} \otimes \{u_i\}$ のエントロピーは

$$S(\{x_\mu\} \otimes \{u_i\}) = S(\{x_\mu\}) + \frac{1}{kT} \mathsf{E}\left(\frac{1}{2} u_{i_t} u_{i_t}\right) \qquad (6)$$

と表すことが出来る。ここに $\mathsf{E}(\circ)$ は (3b) に等価な確率微分方程式

$$du_{it} = \left(-\gamma_{ij} u_{jt} - \frac{\partial H}{\partial x_\nu} \alpha_{\nu i}\right) dt + dw_i(t) \qquad (7)$$

$$\mathsf{E}\, dw_i(t)\, dw_j(t) = 2kT\gamma_{ij}\, dt \qquad (7a)$$

の解 u_t (変数 x をパラメタとする断熱解) の確率過程としての期待値を意味する。$\mathsf{E}\left(\frac{1}{2} u_{i_t} u_{i_t}\right)$ は a) $t \ll \gamma_{ii}$ b) $t \gg \gamma_{ii}$ に対し以下のように求められる：

a) $t \ll \gamma_{ii}$ $\quad du_{i_t} \cong dw_i(t)$ として $\mathsf{E}(u_{i_t} u_{i_t}) = \mathsf{E}(w_{i_t} w_{i_t})$

$$= 2kT\gamma_{ii} t.$$

従ってエントロピー生成は次のようになる。

$$\boxed{\frac{d}{dt} S(\{x_\mu\} \otimes \{u_i\}) = \frac{d}{dt} S(\{x_\mu\}) + \mathsf{E}(\gamma_{ii}(x_t))} \qquad (8)$$

b) $t \gg \gamma_{ii}$　u_{i_t}の断熱消去((7)で$du_{i_t}=0$よりu_{i_t}を求め，x_μに対する確率微分方程式に代入すること)より

$$dx_{\mu_t} = \left(v_\mu(x_t) + D_{\mu\nu}(x_t)\left(\frac{-1}{kT}\frac{\partial H}{\partial x_\nu}\right)_{x_t} + \left(\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right)_{x_t}\right)dt + \sigma_{\mu i}\, dB_i(t) \tag{9}$$

$$\text{ただし}\ D_{\mu\nu} = kT\alpha_{\mu i}\gamma_{ij}^{-1}\alpha_{\nu j},\quad \sigma_{\mu i} = \alpha_{\mu j}\gamma_{ji}^{-1/2} \tag{9a}$$

$$\mathsf{E}(dB_i(t)\, dB_j(t)) = \delta_{ij}\, dt。 \tag{9b}$$

(4)において$\mathsf{E}(u_{i_t}u_{j_t}) = \delta_{ij}kT$を意味することから，$\{x_\mu\}$と$\{u_i\}$との間のエネルギー保存

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}\left(\frac{1}{2}u_{i_t}u_{i_t}\right) = -\frac{d}{dt}\mathsf{E}(H(x_t)) \tag{10}$$

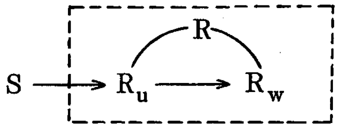
を得て，エントロピー生成は次のようになる。

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(\{x_\mu\}\otimes\{u_i\}) &= \frac{d}{dt}S(\{x_\mu\}) - \frac{1}{kT}\frac{d}{dt}\mathsf{E}(H(x_t))\\ &= \frac{d}{dt}\langle -\log P_t(x) + \log P_e(x)\rangle \geq 0\end{aligned}} \tag{11}$$

このあとの表式は断熱消去後のx_t−過程(9)に関する相対エントロピーの時間微分であり，不等号はよく知られたFokker-Planck型H−定理に基づく。従って，(11)式は拡大された系$S\otimes\{u_i\}$の'真性'エントロピーの時間微分が$t\to\infty$とともに部分系Sの相対エントロピーの時間微分に置き換わることの直接証明を示すものである。

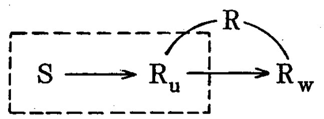
以上述べた部分力学のシナリオを図式として示すならば以下のようになる：　すなわち熱浴Rの中から対象系Sに直接熱接触する一つのモードR_uを取り出しそれ以外の部分R_wと区別すると，$S\otimes R_u$に対しては有限のエントロピーが定義されて，その時間変化を追うことによりマルコフ化したときの正値エントロピー生成に達する。

a) $t \ll \gamma_{ii}$



('bottle neck'が$S-R_u$にある)

b) $t \gg \gamma_{ii}$



('bottle neck'がR_u-R_wにある)

文　献

1. 例えば平凡社百科辞典「統計力学史」参照。

2. 例えばO. Penrose, *Foundations of statistical mechanics* Rep. Prog. Phys.

Vol. 42 (1979), 1938-2006. Chap. 3.

3. H. Spohn, J. Math. Phys. **19** (1978) 1227.
4. H. Spohn, *Kinetic Equations from Hamiltonian Dynamics: Markovian Limits*, Rev. Mod. Phys. **52** (1980) 569-615.
5. G. Lindblad, *Nonequilibrium Entropy and Irreversibility* (D. Reidel 1983).
6. C. Obcemea and E. Brandas, Ann. Phys. **151** (1983) 383.
7. T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32 ; 53.
8. I. Ojima, H. Hasegawa and M. Ichiyanagi, J. Stat. Phys. **50** (1988), 633.

高エネルギー素粒子反応における確率過程

信州大・教養部　美谷島　実
松商短大　鈴木尚通

§1 Introduction

1) 目的. ここでは高エネルギー素粒子の衝突後，クォーク・グリュオン（QCD）の時空発展を経て，励起されたハドロンが生成され，それらが良く知られた素粒子（π, K, p, …）等に崩壊する過程を，確率過程論を用いて記述することを考える。[1] 図1参照。

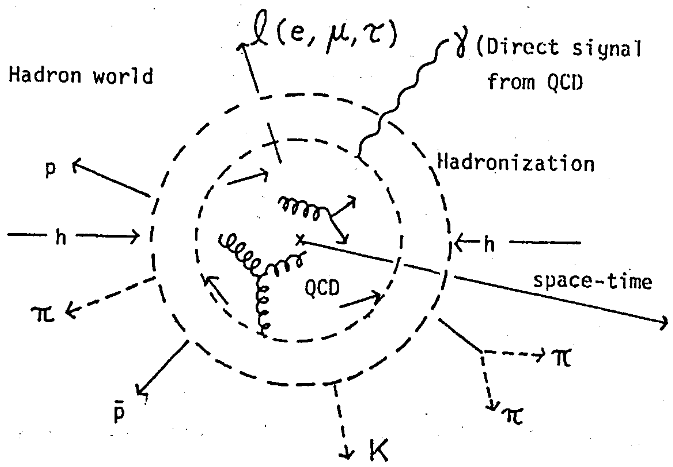


図1　時空発展図

2) KNOスケーリング. 1972年Koba-Nilsen-Olesenは高エネルギー素粒子反応を特色づける物理量として次のスケーリング則の存在を導いた。