

- 3) A. H. Guth, *phys. Rev.* D23, 347 (1981).
 4) K. Sato, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 195, 467 (1981).
 5) H. Matsumoto, *Z. Physik C* 34, 335 (1987).

量子通信理論

通信路容量無限大の光通信を目指して

広田 修 (玉川大学)

1. まえがき

情報理論の骨格が科学技術の主要理論として定着して以来 40 年が経過し、現在では極めて多岐にわたる分野に多様な影響を与えている。シャノンの理論体系が今日人類が生み出した主要理論の一つとして深く受け入れられているのは、その理論が豊富な技術や応用を生み出す能力を備えているからである。

シャノンの情報(通信)理論の中核の概念は“エントロピー”による情報量の計量化である。エントロピーは良く知られているように熱統計力学の基礎でもある。また数学においてもエントロピーの概念は数学の基礎問題を解析するための重要な手法の一つとなっている。このようなわけでエントロピーを情報通信、物理、数学、拡大解釈すれば宇宙の根本的な概念とみなしたいと思うのは当然の成り行きであろう。したがってエントロピーの魅力にとりつかれた研究者は数知れない。各分野においてエントロピーに関する有益な理論が構築されているようではあるが、情報通信の分野ではシャノンの定義したエントロピーを越えるものはない。むしろ、種々のエントロピー理論においても情報通信の概念に対応させれば全てシャノンのエントロピーと等価になる。シャノンのエントロピーは通信科学という極めて深淵なバックグラウンドを伴うものである。

シャノンの理論は信号の物理学とは直接的な関係はなく、また信号と雑音の実体は完全に独立な概念である。これは彼の理論が古典物理学に従う信号や雑音の通信系のみを統括する、または通信用デバイスとは全く独立であることを意味する。このような性質は一面は利点であるが、通信科学に対しては欠点となる。

1960 年メイマンによってレーザーが発明され、光通信の可能性がクローズアップされた。光は 10^{14} Hz 以上の高い周波数をもつため、その実体は量子力学によって説明されるものである。光の物理的特性を全て利用した通信科学を完成させるためには、シャノンの理論に量子力学的特性をもつ信号や雑音を伴う通信系を統括するための補正を加えた“光通信理論”(あるいは量子通信理論)を発展させる必要がある。これはシャノンの平均相互情報量

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \end{aligned} \quad (1)$$

に、通信路の入力から出力に至る信号系の物理学による極めて複雑な拘束を与えることを意味する。これによって、通信のハードウェアと記号上の理論であるシャノンの理論を統一的に論ずるこ

研究会報告

とが可能となる。すなわち、信号の物理的特性や現象によって通信系の伝送可能な情報量が決まるのである。これは一見容易に見えるがこの理論の体系化は極めて難しい。

新しい通信技術を求めて光の通信理論の開発を試みた最初の研究者は D. Gabor である¹⁾。彼に続いて J. P. Gordon, 高橋秀俊²⁾, H. A. Haus らによって光通信過程の特徴が分析され, Mandel, Glauber ら³⁾によって光の量子ゆらぎと発光過程の相関などが議論された。彼らの研究は光の領域の雑音現象(量子雑音)の分析が主題となったため、通信システムには至らず、むしろレーザー、光導波路、光検波器の理論的バックグラウンドに寄与することとなった。これらを基礎とし、1970年代に光通信用半導体レーザー、光ファイバー、光ダイオード等々が実用に供せられるまでに発展し、今日の光ファイバ通信システムが実現した。しかし、これらの光通信は光の古典的な性質のみを利用したものであり、光の潜在的能力のほんの一部の利用にすぎない。光を通信媒体とする以上、光の量子的側面も利用すべきであろう。しかしこれを実現するには前述のように情報理論の補正が必要不可欠である。

1967年に C. W. Helstrom⁴⁾は量子力学に従う信号の検出理論を提唱し、現在の光通信理論のスタートを切った。シャノンの理論が信号系の物理と独立であったのに対し、Helstromは情報伝送の理論に物理学的な拘束を付加することによって通信理論から新しい通信技術、新しい通信デバイスを予言できることを示唆した。このような能力をもつことで、初めて情報及び通信理論が通信の基礎理論と称するものになりうると筆者は確信するものである。

Helstromの基本モデルは、情報を伝送する光の物理量を自己共役作用素 A で表わし、その物理量は量子状態 ρ (あるいは $|\psi\rangle$) を伴うものとする。さらにこの物理量を測定する装置を確率作用素測度 $(X(x_n))$ で表わす。確率作用素測度は

$$\sum_{n=1}^N X(x_n) = I \quad (\text{恒等作用素}) \quad (2)$$

を満足する非負 Hermite 作用素である(詳細は文献 4), 5)を参照)。光信号 (A, ρ) を測定過程 $\{X(x_n)\}$ によって測定した時、その測定値の確率は

$$P(x_n) = \text{Tr } \rho X(x_n) \quad (3)$$

と表わされ、この確率による平均値 $\langle x_n \rangle$ は情報源の情報に対応する信号の値となる。また分散は雑音の電力に対応する。このように信号と雑音(量子雑音)は不可分となり、同時にその雑音特性は量子力学の原理に拘束されることになる。一例として、量子状態をコヒーレント状態、測定過程を光子計数とすれば式(3)は

$$P(n) = \text{Tr } |\alpha\rangle\langle\alpha| n \rangle\langle n| \\ = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (4)$$

となり、現在の光通信に現われる光電ショット雑音を表わす。

2. 量子通信理論の数学的理論

2-1 光通信過程のモデル

通信システムの理論構築にあたって最も基本的な概念は、通信路のモデル化とその数学的記述である。我々はここに光通信過程の最も一般的なモデルを与え、その数学的背景を明確にする。

まず光通信過程を図 1 のようにモデル化する。この図において情報源、情報源符号化は従来の概念と同一である。光通信では図 1 のように量子送信機が構成される。第 1 ブロックは光のどのパラメータに情報を変調するかを決定し、第 2 ブロックでは通信路に適切な信号の量子

状態を生成する。第 3 ブロックでは指定された量子状態をアルファベットとする誤り訂正符号が構成される。次に量子伝送通信路は送信量子状態の伝搬過程であり、数学的には量子状態変換写像によって記述される。

光受信機は図 1 の後半の部分でやはり 3 ブロックに分解される。第 1 ブロックは受信量子状態を最終決定過程に都合のよい状態に変換することを意味する。第 2 ブロックは光から電気に変換する際に発生する量子雑音によって規定される通信路であり、またそれは決定過程を含めることができる。この過程は確率作用素測度によって記述される。最後に決定された信号は従来と同様、復号化されるものとする。

2-2 数学的記述

(a) 量子伝送通信路

送信量子状態の生成は光の発光過程に強く依存するが、ここではトレース 1 の非負トレースクラスの量子状態の空間 $\mathcal{M}_{TX}$ に属する要素の全てが生成可能とする。すなわち送信量子状態 ρ_{TX} は

$$\rho_{TX} \in \mathcal{M}_{TX}$$

この任意の量子状態に対する通信路は正値線形写像によって記述される。ここで、送信量子状態の Hilbert 空間を $\mathcal{H}_{TX}$ 、受信のそれを $\mathcal{H}_{RX}$ とする。また $B(\mathcal{H}_{TX})$, $B(\mathcal{H}_{RX})$ を $\mathcal{M}_{TX}$, $\mathcal{M}_{RX}$ 上の有界線形作用素の全体とする。

定義 1. $B(\mathcal{H}_{RX})$ から $B(\mathcal{H}_{TX})$ への正値線形写像を $\mathcal{L}$ とする。

定義 2. $\mathcal{L}$ の共役写像を $\mathcal{L}^*$ と記す。

$\mathcal{L}^*$ が $\mathcal{L}$ の共役とは任意の

$\rho_{TX} \in \mathcal{M}_{TX}$, $T \in B(\mathcal{H}_{RX})$ に対して

$$T, (\mathcal{L}^* \rho_{TX}) T = T, \rho_{TX} (\mathcal{L} T)$$

を意味する。

定義 3. $\mathcal{L}^*$ を量子状態変換写像と定義する。

$$\mathcal{M}_{TX} \rightarrow \mathcal{M}_{RX}$$

以上より、量子伝送通信路は $\mathcal{L}^*$ によって記述できる。

(b) 量子測定通信路と最適決定過程

量子受信機を構成する 3つのブロックのうち、受信量子状態制御は受信機入力量子状態から決定論的に新しい量子状態に変換せねばならないので、これは一般にユニタリー作用素によって記述すべきである。すなわち

$$\rho^*_{RX} = U \rho_{RX}$$

次のブロックは光から電気に変換する過程であり、通常、量子測定過程と呼ばれる。この過程は非決定的な過程であり、通信路としてモデル化される。数学的記述は確率作用素測度が用いられる。確率作用素測度は次の条件を満足するエルミート作用素である。

$$(I) \quad X(x) \geq 0, \quad x \in R$$

$$(II) \quad X(x) = \sum X(x_i)$$

$$x_i \cap x_j = \phi, \quad x = \cup x_i$$

$$(III) \quad X(\phi) = 0$$

これによって受信出力は

$$P(x) = \text{Tr} \rho^*_{RX} X(x)$$

また、 $X(x)$ は単位分解であるので、受信機出力の空間分割を表すことができる。したがって、受信過程と同時に決定機構を表すことができる。詳細は文献 (4) (5) を参照されたい。

2-3 量子符号理論

光通信系における符号理論の研究は今後の重要なテーマの一つである。ここでは文献 (4) (9章) に述べられた量子符号理論の数学的記述を示す。

まず、通信路アルファベットはヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{TX}$ の元であり、 n 次拡大符号語は $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_{TX(i)}$ の元となる。

定義 10. 情報源のシンボル系列から

$\rho^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_{TX(i)}$ への写像を量子符号化と呼び、 $\rho^{(n)}$ を量子符号語と定義する。

このような量子符号語が図 1 の通信系で伝送されるものとすれば、これらの誤り率特性は前節の数学を用いて記述できる。

量子符号語の全体を ρ とし、 i th 符号語を $\rho^{(n)}_{TX(i)} \in \rho$ とする。 i th 量子符号語は、量子伝送通信路によって

$$\rho^{(n)}_{RX(i)} = \mathcal{L}^* \rho^{(n)}_{TX(i)}$$

となり、次に量子状態制御器によって

$$\rho^{(n)}_{RX(i)} = U \mathcal{L}^* \rho^{(n)}_{TX(i)}$$

これより、受信機出力における符号語の誤り確率は

$$P_e(j|i) = \text{Tr} \rho^{(n)}_{RX(i)} X^{(n)}_j(x)$$

ただし、 $X^{(n)}_j(x)$ は n 次拡張決定作用素である。

このような誤り確率の平均を最小にするためのパラメータは極めて複雑なものとなるので、詳細は別の機会に

述べる。量子系での大きな特徴は、 n 次拡大時に特に現れる。その一例は次の定理であろう。

定理 (Holevo) : n 次拡大通信路の通信路容量は非加法的である。すなわち、

$$C_n + C_m < C_{n+m}$$

3. 量子通信理論の具体化

量子通信理論の一般理論はリー代数を用いて研究が続けられている。一方、このような抽象理論の具体化研究も盛んに行われている。以下に現在最も関心を集めている量子制御通信の概要を述べる。

研究会報告

量子制御通信

前述の式(3)より光信号の測定に際しての量子雑音は2つの自由度をもつことがわかる。1つは測定過程(光受信機に対応)、他は量子状態である。Helstromは量子状態は自然界によって決まるものであるとし、 $|\phi\rangle$ を固定した時、量子雑音の影響が最小になる測定過程 $\{X(x)\}$ を求める理論を展開した。これは量子最適受信機理論と呼ばれる。彼はこれによって既存の光受信機よりさらに優れた特性をもつ光受信機の存在を示してみせた。

1974年にHirotaは逆に光の量子状態を制御して通信を行う概念を提案、そしてそれはStolerが示した“最小不確定状態の同値類”の理論によって実現可能であると主張した。当時実験的に確認できる量子状態はコヒーレント状態のみであり、これは全く空言のように思われた。しかし同時期Yuen⁹⁾と彼の仲間は量子状態の制御の物理的方法(2光子過程)を含めた量子制御通信の理論を展開し始めた。

以下にYuenによって整備された量子状態の制御について簡単に述べる。

3-1 2光子コヒーレント状態

光の代表的な量子状態はGlauberのコヒーレント状態である。この量子状態は光の複素振幅を (x_c, x_s) として

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= A \cos(\omega t + \phi) = A \cos \phi \cdot \cos \omega t \\ &\quad - A \sin \phi \cdot \sin \omega t \\ &= x_c \cos \omega t + x_s \sin \omega t \end{aligned} \quad (5)$$

に対してその量子ゆらぎが

$$\Delta x_c^2 \cdot \Delta x_s^2 = \frac{1}{16} \quad (6)$$

かつ

$$\Delta x_c^2 = \Delta x_s^2 = \frac{1}{4} \quad (7)$$

となる。式(6)はHeisenbergの不確定性原理であり、これを破ることは不可能であるが、式(7)の各量子ゆらぎの相対値は原理的には可変である。その代表はStoler-Yuenの2光子コヒーレント状態である。これは次の一般化光子消滅作用素

$$b = \mu a + \nu a^\dagger \quad (8)$$

の固有状態として求められる。ただし、 $(a, a^\dagger)$ は通常的光子消滅・生成作用素、 (μ, ν) は $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ を満たす複素数である。この関係は $(b, b^\dagger)$ がボース粒子の消滅・生成作用素であるためには交換関係 $[b, b^\dagger] = 1$ が要求されることによる。さて、2光子コヒーレント状態は

$$b|a: \mu, \nu\rangle = (\mu a + \nu a^\dagger)|a: \mu, \nu\rangle \quad (9)$$

の固有値方程式の解、あるいは等価的にコヒーレント状態のユニタリー変換

$$|a: \mu, \nu\rangle = U|a\rangle \quad (10)$$

ただし、

$$U = \exp\left[\frac{1}{2} \log(2h+1)(a^2 - a'^2)\right] \quad (11)$$

$$\mu = \frac{h+1}{\sqrt{2h+1}}, \quad \nu = \frac{h}{\sqrt{2h+1}}$$

となる。式(9)を解くことによってその波動関数としての具体的な特性を求めることができる。

この量子状態は複素振幅に対してその量子ゆらぎが

$$\Delta x_c^2 = \frac{1}{4} |\mu - \nu|^2 \quad (12-a)$$

$$\Delta x_s^2 = \frac{1}{4} |\mu + \nu|^2 \quad (12-b)$$

となり、 μ あるいは ν の制御によってそれぞれどちらか一方を1/4よりはるかに小さくできる。平均光子数一定条件のもとで x_c あるいは x_s (量子ゆらぎの小さい方)に対して信号対量子雑音比は

$$SNR = 4\langle n \rangle (\langle n \rangle + 1) \quad (13)$$

となる。一方、コヒーレント状態では

$$SNR = 4\langle n \rangle \quad (14)$$

となる。この値は現在の光ファイバコヒーレント通信系の限界を与えている。したがって式(13)が達成されれば通信の信頼性は格段に良くなる。

3-2 光子数確定状態

光の量子的特徴の中で最もポピュラーなものは光子であるが、量子状態制御は光源として光子数一定の光すなわち光子数確定状態の生成もそのターゲットにしている。この量子状態は当然光子数作用素 $N = a^\dagger a$ の固有状態である。一般に光は光子数と位相の間に不確定性関係があり

$$\Delta n^2 \cdot \Delta \phi^2 \geq 1 \quad (15)$$

となる。厳密には位相は量子力学的オブザーバブルとして定義できない。

コヒーレント状態の場合、式(4)より $\Delta n^2 = \langle n \rangle$ となる。光子数確定状態は $\Delta n^2 \rightarrow 0$, $\Delta \phi^2 \rightarrow \infty$ (実際には 2π にわたって一様分布)の状態に対応する。近年、コヒーレント状態と光子数確定状態の中間のゆらぎをもつ光をSubpoisson状態の光と呼んでいる。

このような光を光源とした時、光検出器を光子計数とすれば信号対量子雑音比は

$$SNR = \langle n \rangle^2 / \langle n \rangle [1 + (g^{(2)} - 1) \langle n \rangle] \quad (16)$$

ただし

$$g^{(2)} = (\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2) / \langle n \rangle^2 \quad (17)$$

である。もし光子数確定状態であれば $g^{(2)} = 1 - 1/\langle n \rangle$ となり、式(16)は無限大となる。すなわち、Subpoisson 光の極限が光子数確定状態である。

3-3 量子状態の伝搬

通信は信号を遠方に伝送せねばならない。したがって量子状態の伝搬特性は重要である。量子制御によって生成された非標準量子状態 ($|\alpha: \mu, \nu\rangle$, $|n\rangle$ など) は残念ながら、エネルギー損のある通信路ではその状態を維持できない。エネルギーの損失があれば真空のゆらぎが損失の率だけ浸み出してくる。すなわち、送信状態が2光子コヒーレント状態であれば通信路出力では

$$\Delta x_{CR}^2 = \eta \cdot \frac{1}{4} |\mu - \nu|^2 + (1 - \eta) \cdot \frac{1}{4} \quad (18)$$

$$\Delta x_{SR}^2 = \eta \cdot \frac{1}{4} |\mu + \nu|^2 + (1 - \eta) \cdot \frac{1}{4} \quad (19)$$

となる。上式の右辺第2項目は真空ゆらぎである。したがってたとえ送信側で $\Delta x^2 \ll 1/4$ としても、 $\eta \ll 1$ であればその特徴は失なわれる。これは、Heisenberg 不確定性関係がいかなる時でも成立せねばならないことに基づくものである。

一方、光子数確定状態に対しては通信路出力は

$$P(n_R | n_T) = \binom{n_T}{n_R} \cdot \eta^{n_R} \cdot (1 - \eta)^{n_T - n_R} \quad (20)$$

と確率的なゆらぎが生ずる。したがってこのままでは量子制御は長距離通信には不向きであるように見える。

通信において損失は不可避であり、こ

の損失により非標準状態の性質は破壊される。それでは、量子通信の実現は不可能かと問われれば、答えは“ノー”である。損失による性能劣化の影響を受けない方式として、筆者らのグループでは送信光にはコヒーレント状態を用い、受信側で量子状態変換と真空ゆらぎキャンセル法を用いる方式を提案している。システムの構成は〈図2〉のようになる。

これによって、誤りゼロの光通信が可能となることが期待される。

この方式の問題点は弱い受信光から2光子コヒーレント状態を効率的に生成しうるスクイザーをいかに構成するかである。しかし、送信されて来た光の量子状態を受信機で加工するという概念は、これまでにない新しい概念であり今後の発展が期待される。

参考文献

- 1) D. Gabor, *Phil. Mag.* 41, 1950
- 2) H. Takahashi, In *Advances in Communication Systems*, Vol-1 Academic Press 1965
- 3) R. J. Glauber, *Phys. Rev.* 131, 1963.
- 4) C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, 1976.
- 5) 広田, 光通信理論 森北出版, 1985.
- 6) H. P. Yuen, *Phys. Rev. A*-13, 1976.
- 7) L. Wu, H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* 57, No-20, 1986.
- 8) O. Hirota, K. Yamazaki, M. Nakagawa, M. Ohya, *Trans. IECE of Japan.* E69, No-9, 1986.
- 9) O. Hirota, K. Yamazaki, Y. Endo, M. Nakagawa, M. Takahara, *Trans. IECE of Japan.* E70, No-1, 1987.
- 10) T. Uyematsu, O. Hirota, K. Sakaniwa, *Trans. IECE of Japan.* E70, No-4, 1987.
- 11) K. Yamazaki, O. Hirota, T. Uyematsu, M. Nakagawa, M. Ohya *Trans. IECE of Japan.* E70, No-9, 1987.
- 12) K. Yamazaki, O. Hirota, M. Nakagawa, *Trans. IECE of Japan.* E70, No-9, 1987.
- 13) O. Hirota, O. Kagami, M. Takahara, *Trans. IECE of Japan* E70, No-9, 1987.
- 14) M. Ohya, *IEEE, Trans. Inform. Theory*, IT-29, No-5, 1983.
- 15) 大矢, 吉見, 広田, 電子情報通信学会, 論文誌 (投稿中)

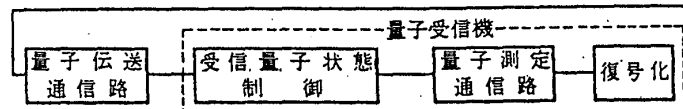


図1

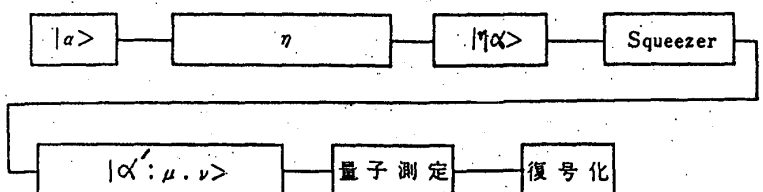


図2