研究会報告

流体における乱流：理論的問題について

京大防災研　山田道夫

流体乱流の最も基本的な性質は、波数空間において、慣性小領域と呼ばれる、普遍性を持つ領域が存在することである。この領域は、１９４１年、Kolmogorovの現象論によって見いだされ、以後数多くの実験によって確認されてきた。

Kolmogorovの理論は慣性小領域において、エネルギー散逸率εと粘性率νが独立のパラメーターとして振舞うことを前提としているが、このことは、$\varepsilon=2\nu Q$（Qはエンストロフィー）より、非粘性極限（$\nu\to 0$）におけるQの発散、即ちEuler方程式（$\nu=0$）における渦度の発散を示唆している。実際、Kolmogorovスペクトル $E(k)\sim k^{-5/3}$ は、速度場の一階微分が発散することを意味しており、さらに、Kolmogorovの現象論を用いて各波数における特性時間を見積りそれらの和をとることにより、エネルギーは有限時間内に無限大の波数まで輸送される（エネルギーカスケード）ことを示すことができる。また数学的にも、Euler方程式の解の存在は有限時間内でのみ証明が与えられており(Kato, J. Funct.Anal.vol.9(1972)296)、しかも、解の発散は渦度の発散と同値となることが証明されている(Beale et al. Commun.Math.Phys.vol.94(1984)61)。このように状況証拠は、一致して、Euler方程式においては有限時間内に渦度が発散することを示している。しかし、数値的な結果も含めて、現在までのところ、この発散は確認されていない。いくつかの数値的研究はあるが、発散時刻の有限性は未だ確定的でない(Morf et al. Phys.Rev.Lett.vol.44(1980)572, Brachet et al. J.Fluid Mech.vol.130(1983)411)。

Kolmogorovの現象論は、さらに、エンストロフィーQは発散時刻t_cに近づくと、$Q(t)\sim 1/(t_c-t)^2$のように振舞うことを示唆しており、同様の結果は、実空間において、速度勾配と渦度を同程度の大きさと見なすことによっても得ることができる。しかし、このような発散の特性指数の問題は、取扱いが難しく、Kolmogorov理論と密接に結び付いているにも関わらず、現在までのところ、決定的な結果が得られていない。Euler方程式の解の発散の構造は、Navier-Stokes乱流における慣性小領域の構造を直接に反映していると期待されるため、その解明が待たれる。

Kolmogorov理論では、エネルギーの散逸率εが最も重要なパラメーターであるが、エネルギーのこのような重要性は、それが非粘性の場合の保存量であることに起因していると考えられる。しかし、Euler方程式はエネルギーの他にヘリシティーを保存量として持っており、このヘリシティーのカスケードの果たす役割、あるいは、小さいがゼロでない粘性のもとでエネルギーとヘリシティーのいずれがより保存されるか(selective decay)、などの問題は未解決である。また、乱流場の特性汎関数の従うHopf方程式がuniqueな乱流状態を与えるか、といった古典的方法に伴う基本的問題と共に、場の間欠性のマルチフラクタルによる記述の可能性、ダイナミックスを支配するアトラクターの構造と慣性小領域の関係など、カオス力学系の理論の発展に伴って生まれた問題があるが、特に最後の問題は、高次元アトラクターの構造の解明という点で、これからの最も重要な問題の一つであると思われる。