研究会報告

二成分混合流体の対流運動

広島大・理　八幡英雄

前回に続いて二枚の平行水平平板間に閉じ込められた二成分混合流体を下から加熱したとき発生するRayleigh-Bénard対流について行なった模型計算を報告した。熱伝導・成分濃度拡散状態(Convection-free state)からの体系の乱れを記述する流体速度を$\mathbf{u}$、温度をθ、成分濃度をx_1とする。対流の空間パターンとして2次元的ロールを仮定し、垂直方向にz軸、ロール軸に垂直方向にx軸をとり、y軸(ロール軸)方向には場は一様とする。このとき速度場は流れ関数Φを用いて、$\mathbf{u}=(-\partial_z\Phi, 0, \partial_x\Phi)$と表される。これを用いると場の量$\Phi, \theta, \eta = x_1 + (\gamma_2/D)\theta$にたいする運動方程式はBoussinesq近似で次のように書かれる:

$$\partial_t \triangle_2 \Phi + \sigma \triangle_2^2 \Phi - \sigma\{(1+S)\partial_x\theta - S\partial_x\eta\} = -(\partial_x\Phi)(\partial_z \triangle_2 \Phi) + (\partial_z\Phi)(\partial_x \triangle_2 \Phi) \quad (1)$$

$$\partial_t\theta - \triangle_2\theta - Ra\,(\partial_x\Phi) = (\partial_z\Phi)(\partial_x\theta) - (\partial_x\Phi)(\partial_z\theta) \quad (2)$$

$$\partial_t\eta - \triangle_2\theta - L\,\triangle_2\,\eta = (\partial_z\Phi)(\partial_x\eta) - (\partial_x\Phi)(\partial_z\eta) \quad (3)$$

ここで$\triangle_2 = \partial_x^2 + \partial_z^2$である。係数に現れるパラメータは、$Ra$がRayleigh数、$\sigma = \nu/\kappa$がPrandtl数、$L = D/\kappa$がLewis数、$S$は分離比を表す。但し$\nu$は動粘性率、$\kappa$は温度伝導率、$D$は成分$x_1$の濃度拡散率、$\gamma_2$はSoret係数である。上記方程式は長さを$d$、時間を$d^2/\kappa$、温度を$\kappa\nu/g\alpha d^3$を単位にして無次元化してある($d$は流体層の厚さ、$\alpha$は体積膨張率、$g$は重力加速度を表す)。$x$軸方向の境界条件は周期的とする。一方変数$z$の領域を$(-1/2, 1/2)$として、境界$z = \pm 1/2$で$\mathbf{u}$に滑りなし、$\theta$に等温的、$\eta$に不透過の条件を課す:

$$\Phi = \partial_z\Phi = \theta = \partial_z\eta = 0 \quad (4)$$

研究会では(1)～(3)にGalerkin法を適用して導いた常微分方程式系を、適当な初期条件のもとで数値積分して解の挙動をしらべた結果を報告した。まず、各場の量Φ, θ, ηを境界条件を満たす直交関数系の有限和で次のように近似表現する:

$$\Phi(x,z,t)=\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{n=1}^{N}\{P_{1,\ell,ne}(t)\cos[(2\ell-1)ax]\varphi_{ne}(z)+P_{-1,\ell,ne}(t)\sin[(2\ell-1)ax]$$

$$\times\varphi_{ne}(z)+P_{1,\ell,no}(t)\cos(2\ell ax)\varphi_{no}(z)+P_{-1,\ell,no}(t)\sin(2\ell ax)\varphi_{no}(z)\} \tag{5}$$

$$\theta(x,z,t)=\sum_{n=1}^{N}[\sum_{\ell=1}^{L}\{T_{1,\ell,ne}(t)\cos[(2\ell-1)ax]\chi_{ne}(z)$$

$$+T_{-1,\ell,ne}(t)\sin[(2\ell-1)ax]\chi_{ne}(z)+T_{1,\ell,no}(t)\cos(2\ell ax)\chi_{no}(z)$$

$$+T_{-1,\ell,no}(t)\sin(2\ell ax)\chi_{no}(z)\}+T_{1,0,no}(t)\chi_{no}(z)] \tag{6}$$

$$\eta(x,z,t)=\sum_{n=1}^{N}[\sum_{\ell=1}^{L}\{E_{1,\ell,ne}(t)\cos[(2\ell-1)ax]\psi_{ne}(z)$$

$$+E_{-1,\ell,ne}(t)\sin[(2\ell-1)ax]\psi_{ne}(z)+E_{1,\ell,no}(t)\cos(2\ell ax)\psi_{no}(z)$$

$$+E_{-1,\ell,no}(t)\sin(2\ell ax)\psi_{no}(z)\}+E_{1,0,no}(t)\psi_{no}(z)] \tag{7}$$

ここで、a はロールの波数、添字 e 、o は対応する展開関数がそれぞれ偶関数、奇関数であることを示す。計算に用いた関数系は領域 (-1/2, 1/2) で定義された次の固有値方程式の固有解である。

$$(\partial_x^4-\alpha_n^4)\varphi_n=0,\quad \varphi_n(\pm1/2)=\partial_x\varphi_n(\pm1/2)=0 \tag{8}$$

$$(\partial_x^2+\beta_n^2)\psi_n=0,\quad \partial_x\psi_n(\pm1/2)=0 \tag{9}$$

$$(\partial_x^2+\gamma_n^2)\chi_n=0,\quad \chi_n(\pm1/2)=0 \tag{10}$$

但しα_n, β_n, γ_n は各固有値を表す。打切り項数 $L=2, N=2$ として Galerkin 法をもちいると、全体で 52 変数の常微分方程式系を得る。

二成分混合流体では分離比が$-1<S<0$ のとき、一成分流体の場合とは異なって、Ra を上昇したとき convection-free 状態から発生する対流が時間振動を伴いうる[1]。具体的計算は Bensimon らの円環状容器での実験と同じパラメータ$\sigma=9.7, L=0.0068, S=-0.266, a=2.86$ に対して行なった[2]。比 Rayleigh 数を $r=Ra/(Ra)_c, (Ra)_c=1708$ で定義すると、rを上昇していくとき $r=1.38$ で体系は subcritical Hopf 分岐を起こし

て振動解が発生する。この振動解は時間の経過とともに振幅を増加して、有限振幅の平行ロールの x 軸方向への進行波解に収束していく。この時間振動のスペクトルの計算によりこの解は2個の基本振動数を含む準周期的運動である。rを増加していくと、$r=1.5$ ではスペクトルに非周期的成分が現れ、さらに進行波の進行方向の逆転が不規則的に起こることが見出された。この現象の原因を明らかにするため、回転スペクトル (rotary spectrum) を計算してみた[3]。展開 (5) に現れる代表的なモード振幅 $x(t)=P_{1,1,1e}(t), y(t)=P_{-1,1,1e}(t)$ に対して複素振幅 $z(t)=x(t)+iy(t), t>0; z(t)=0, t<0$ のフーリエ変換 $Z_{\pm}(f)=\int_0^{\infty} z(t)\exp(\mp 2\pi i f t)dt$ を計算し、対応する反時計回り・時計回りスペクトル $P_{\pm}(f)=\langle(1/T)|Z_{\pm}(f)|^2\rangle$ を求める(ここで、Tは時系列の長さ、括弧は集団平均を表す)。$\Phi(x,t)\sim x(t)\cos(ax)+y(t)\sin(ax)$ であるから、

$$\Phi(x,t)\sim \Re\int_0^{\infty}[Z_+(f)\exp i(2\pi f t-ax)+Z_-(f)\exp i(2\pi f t+ax)]df \tag{11}$$

となり、$P_{\pm}(f)$ はそれぞれ x 軸の正負の方向に進行する波のスペクトル強度を表す。計算の結果によると、ロールが一方向へ drift しているときにも、それと反対方向への drift のスペクトル成分は振幅は小さいが存在している。したがってこれが進行方向逆転の種になっていると考えられる。但し現実の二成分混合流体の RB 対流ではこの計算が示すような非周期的振動数成分を含む進行波や、進行波の進行方向の逆転などは観測されていない。これらは今扱っている模型において展開 (5) ～ (7) のモード項数打切りが適切に行なわれていないことによる結果と考えられる。進行波の進行方向の逆転は他の種類の流体系では、実験や計算機シミュレーションによって見出されている[4),5)]。

参考文献

1) R.W. Walden, P. Kolodner, A. Passner and C.M. Surko, Phys. Rev. Lett. **55**(1985), 496; R. Heinrichs, G. Ahlers and D.S. Cannell, Phys. Rev. **A35**(1987), 2761.
2) P. Kolodner, D. Bensimon and C.M. Surko, Phys. Rev. Lett. **60**(1988), 1723.
3) 日野幹雄、スペクトル解析 (1977, 朝倉書店), p. 256.
4) A.E. Deane, E. Knobloch and J. Toomre, Phys. Rev. **A37**(1988), 1817.
5) M. Funakoshi and S. Inoue, J. Fluid Mech. **192**(1988), 219.