非可積分系の量子力学

早大理工　首藤 啓

量子力学は、プランク定数ゼロの極限で古典力学に移行するという対応原理の要請を基にしてつくられ、現実の微視的スケールのさまざまな物理現象を見事に記述してきた。しかし、その対応原理の対象となった古典力学系は、可積分系（ハミルトン系の場合、自由度個の保存量が存在し、すべての軌道は規則的な運動を行う）であり、対称性の高い極めて限られた場合でしかない。現実に最もありふれている非可積分系の対応原理が、古典カオスの存在により、さほど自明なことではなく、実際にいくつかの局面で、素朴な対応原理の破綻が指摘されている。では、現実には最もありふれている非可積分系（この場合の非可積分とは、古典力学の意味）の定常状態、動力学的側面には、どのような問題があらわれるであろうか。[1,2]

そもそも、軌道の存在しない量子力学に、古典系のカオスの定義をそのまま適用できないのは言うまでもない。それ以前に、線形のダイナミクスであるシュレディンガー方程式から、古典カオス的な不安定性を生ずるはずがなく、故に、量子力学にはカオスは存在しないという主張がたびたびなされる。確かに、系が離散的なスペクトルしかもたず、状態の時間発展が準周期的な場合には、古典系の指数関数的不安定性はあらわれない。しかし、その議論には、系の固有状態に関する情報がすべて既知であるという大事な前提があり、一般にカオス系の固有関数、固有エネルギーは対応する古典系の複雑さを反映して、可積分系との本質的な差異が期待できるし、また、果たして系が離散的なスペクトルをもつのか否か、という問いこそが、重大な問題であるというのが最近の知見である。

定常状態の問題

定常状態に関する第一の問題は、非可積分系の量子化条件であろう。固有状態の古典的な対応物を位相空間の不変集合と考えるのは自然であるが、問題はどの不変集合が量子化されているか、それが系の可積分性をどう反映するか、である。可積分系での古典量子化は、一次元では、有名なBohr-Sommerfeldの量子化、多次元では、その拡張としてのEinstein-Brillouin-Kellerの量子化法によって、自由度個の断熱不変量を量子化することから与えられ、各固有状態は古典的なトーラスと1対1の対応がつく[3]。しかし、非可積分系では、トーラスが崩壊し、保存量を前提としたEBK量子化は破綻する。一方、系の可積分性を問わず存在する周期軌道すべてが、constructiveに干渉する結果として系の固有エネルギーが得られるとするのがGutzwillerの周期軌道量子化である。そこでは、一つの固有状態を一つのトーラ

スと対応させるという単純な描像は消え去り、すべての周期軌道とすべての固有値の対応という全くちがった描像が姿を現わす[4]。その周期軌道量子化法も、カオス系の周期軌道の長さに対する分布則（すなわち、周期軌道の長さTに対してその数が$N(T) \sim e^{h_{KS}T}/T$で増加すること）より、周期軌道和自身が収束しないという原理的な問題点に加えて、実際の周期軌道の数え上げが困難なことから、具体的な適用例は少ない。しかし、その分布則にこそ、カオス系の本質が集約されており、それが固有エネルギーのいかなる性質となって現れるかを知ることは重要である。特に、周期軌道和から、一つ一つの固有状態の情報をいかに抽出するかは、非可積分系の固有状態における量子古典対応の詳細を知る上で避けることのできないことである。

ところで、非可積分系の固有値列は、トーラス量子化が不可能なことから、非常に乱雑な並び方をする。しかし、有限時間で古典系の軌道がカオスであるか否かを厳密に判定するのは原理的には不可能であるのと同様、有限個の固有値列の不規則性の程度から、非可積分系の固有エネルギーを特徴づけすることは一般に難しい。そこで、何らかの漸近的振舞いから可積分系と非可積分系の固有値列の性質を峻別しようという考え方が生まれる。例えば、多くの人たちによって調べられているレベル統計がそれである。中でも問題にされることの多い最近接レベル分布に対して、可積分系のポアッソン分布、エネルギー以外に良い量子数の存在しないカオス系のウィグナー分布は、それぞれの固有値列の示す普遍則として信じられている[5]。また、それに対するハミルトニアン行列のアンサンブルを用いた理論的説明も試みられている。ところが、このウィグナー分布を、古典カオスを直接の理由として説明しようとすると、途端に困難に直面する。その理由は先に触れた周期軌道量子化の問題点と関連している。

カオス系の固有状態の性質に関しては、これまでのところ、定性的な理解にとどまっていたところもあるが、最近、すべての軌道が不安定である強いカオスを示す系での非常に高い固有状態のなかで、領域全体には広がらず、部分的に局在したものが数多く見つかっていることは、注目に値する。そして、それは古典系の周期軌道に対応した領域に局在していることから周期軌道痕跡（ Periodic Orbit Scar ）と呼ばれ、実験的にも観測されている。これは、エルゴード的で強いカオスを示す系であっても、短い周期軌道による頑強な構造が生き残っていることを示すもので、固有状態全体が周期軌道全体に対応する、という上記の描像に問題を投げかけているといえる。

動力学的問題

先に述べたように軌道というものがない量子力学と、古典系の軌道によるダイナミクスから定義されるカオスとを比較することはできない。動力学的側面で最大

の焦点は、古典と量子の分布関数対応、あるいは、拡散の有無である。古典系では、例えば、スタンダードマップのような運動量空間で束縛のないような系では、初期にある領域に局在していた相空間分布関数は、横断的なKAMトーラスが存在しない限り、時間の経過とともにいくらでも拡散する。一方、量子系は、時間発展の初期には古典力学を模倣するものの、カオス系の波束はカオスの特徴である引き延ばしと折れ畳みによって、自己干渉を生じ、古典系の微細な構造を追従できなくなる。そして最終的には、古典系で特徴的であったカオス的な拡散は量子力学では抑止されてしまう。この現象は"Suppression of Chaotic Diffusion"と呼ばれ、量子力学特有の現象として、振動電場中の水素原子などの実験的な観測の対象にもなっているが[6]、本質的な特徴はいわゆるKicked Rotatorのモデルで捉えられている。Kicked Rotatorは、1次元の回転子に周期的な撃力が加わって時間発展をおこなうものである。周期外力系では、固有状態がないかわりに、1周期分の時間発展を推進するユニタリー演算子に対する（準）固有状態が系のstaticな特性を決定するが、ダイナミカルな拡散の不在は、運動量空間の準固有状態の局在が原因であると理解されている[7]。これは、準固有エネルギーの言葉でいえば、（純）点スペクトルをもつということであり、ランダム系のアンダーソン局在と類似の議論が成立する。しかし、最近の研究で明らかにされつつあることは、カオス系での点スペクトルは、外部からの攪乱に弱いばかりか、系の自由度を高くする事により、連続スペクトル（特異連続スペクトルか？）をもち得るということで、今後の研究の大きな鍵になるものと思われる[8]。

参考文献（レビューを中心として）

1. B. Eckhardt: Phys. Rep. **163**(1988)205.
2. G. Casati ed.: *Chaotic Behavior in Quantum Systems*, Proc. 1983 Como Conf. on Qunarum Chaos(1985, Plenumn, New York).
3. I.C. Percival: Adv. Chem. Phys. **36**(1977)1.
4. M.V. Berry: in *Chaotic Behavior of Dymamical Systems* (G. Ioose et al. Eds.), Les Houchs, Session XXXVI (1981, North-Holland).
5. T.H. Seligman and H. Nishioka, Eds.: *Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics.*, Proc. Cuernavaca, Mexico 1986, Lect. Notes in Phys., Vol. 263(Springer Berlin).
6. G. Casati, M.F. Izrailev, D.L Shapelyansky and I. Guarneri: Phys. Rep. **154**(1987)77.
7. G. Casati and L. Morinari: Prog. Theor. Phys. Suppl. **98**(1989) 287.
8. M. Toda, S. Adachi and K. Ikeda: Prog. Theor. Phys. Suppl. **98** (1989)323.