物性研究　55－4（1991－1）

特別寄稿

ランダム磁場イジング模型*

学習院大・理　　田崎　晴明

（1990年11月26日受理）

３次元のランダム磁場イジング模型の長距離秩序の有無は，10年近くも決着のつかない理論物理の難問であった。ごく最近，数理物理学者の Bricmont と Kupiainen が，この問題を厳密に取扱い，とうとう長年の論争に終止符をうった。ここでは非専門家を対象に，この単純だが難しい問題をめぐって展開されたいくつかの理論的なアイディアを振返ってみたい。

１．はじめに

理論物理学で扱う問題が高度なものになってくると，何らかの答をだす為に近似を用いるという事が半ば当たり前になってくる。実際，物理は数学と違って問題の設定そのものが自然に対する近似に過ぎないのだから，その解析に近似を使うのは当然だという意見もある。しかし一度自然の一面を抽象して明確な問題を設定した以上は，近似の技巧に煩わされる事なく本当の答を知りたいと考えるのはもっともな事である。

１つのきちんと定義された理論物理の問題に対して，２つの異なった近似が考えられたとしよう。いずれの近似も美しい物理的なアイディアに基づいた自己矛盾のない理論で，そこから様々な面白い結論を導く事が出来る。ただ近似理論の宿命として，「その近似が正しい」という事だけは導けない。そんなときに，もしもこれらの２つの近似が正反対の結論をだす事が判ったとしたら，我々はどう考えればよいのだろうか。

ランダム磁場イジング模型に対して考えられた２つの美しい理論－ Imry と Ma の理論，dimensional reduction －は，まさにそのような相容れない２つの近似理論であった。２つの理論の予言の正否は，実験によっても決着のつかないまま，10年近くもの間活発な論争の対象とされてきた。しかし最近になって，Imbrie, Bricmont, Kupiainen, Aizenman, Wehr といった数理物理学者が，近似を含まない厳密な結果を打ち出した事によって，とうとうこの論争にも決着がつく事になった。

＊　本稿は編集部の方から特に掲載をお願いした解説記事である。

この解説では，ランダム磁場イジング模型をめぐるこれらの理論を，基本的なアイディアを中心にして振返ってみようと思う。

2．強磁性イジング模型の長距離秩序

最初に基本的な強磁性のイジング模型で，長距離秩序の問題とそれを理解するためのアイディアについて解説する。図1のような，1辺の長さがLのd次元の立方格子を考え，格子上の点をx, y，…と表す。各格子点の上には，＋1，－1の2種類の値（以下＋，－と略す）をとる（イジング型の）スピン変数σ_xをのせる。ただし格子の境界に位置しているスピンについては，すべて$\sigma_x = 1$ に固定する。

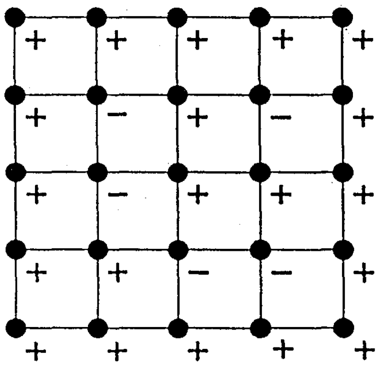

図1　2次元で$L = 5$とした格子。境界のスピンは＋に固定するが，内部のスピンは＋，－のいずれをもとる事ができる。

次のような強磁性のイジング模型のハミルトニアン（エネルギー）を考える。

$$\mathscr{H} = -\sum_{\langle x,\, y\rangle} \sigma_x \sigma_y \tag{1}$$

ここでの和は，隣り合う格子点の組すべてについてとる。ハミルトニアンの各項は，隣り合うスピンの向きをそろえようとする交換相互作用を表している。

統計力学によれば，この系が逆温度$\beta\,(1/kT)$の熱浴と平衡にあるとき，任意の物理量（つまり$\{\sigma_x\}$の適当な函数）Fの期待値は

$$\langle F\rangle_{L,+} = Z_{L,+}^{-1} \sum_{\sigma_x=\pm 1} F\exp(-\beta\mathscr{H}) \tag{2}$$

で与えられる。和は系の全ての状態に付いて取り，状態和$Z_{L,+}$は規格化条件$\langle 1\rangle_{L,+} = 1$から決まる。添字$L, +$は系の大きさが$L$である事，及び境界でのスピンを＋に固定した事を思い出すためにつけてある。現実の磁性体では，系のサイズLは10の数乗という大きな数であるが，理論的な扱いでは通常これを$L\to\infty$という極限に理想化して考える。そうする事で，Lの値に左右されない普遍的な物理現象が抽出される。

我々がここで特に注目する量は，次式で定義される平均の磁化の大きさ，あるいは強磁性の秩序パラメータである。

$$M_{+}(\beta)=\lim_{L\to\infty}\langle\sum_{x}\sigma_{x}\rangle_{L,+} \tag{3}$$

$\langle\cdots\rangle$ の中の和は一辺 L の格子上の全ての点（L^d 個ある）についてとる。

ここでは境界のスピンを ＋ に固定したが，仮にこれらのスピンも ＋，－ の２つの値をとれるとしよう。すると(1)－(3)は，全ての点で同時に $\sigma_x \to -\sigma_x$ とする変換について不変だから，対称性から直ちに $M(\beta)=0$ となる事が判る。

我々は格子の境界のスピンの値を＋に固定する事で，この対称性を顕わに破ったわけである。その為に，少なくとも境界に近いスピンは＋を取りやすくなる。しかしそういうスピンの数は高々（定数）$\times L^{d-1}$ 程度だから，総スピン数 L^d で割って $L\to\infty$ の極限を取ればその効果は消えてしまう。そう考えると，この場合もやはり $M_{+}(\beta)=0$ となるように思われてしまう。

実際，１次元（$d=1$）に於いては $0\leqq\beta<\infty$ なる全ての β について，$M_{+}(\beta)=0$ が成立する事が比較的簡単に示される。しかし２次元以上（$d\geqq 2$）では，d に依存して決る臨界点 β_c があって，$\beta<\beta_c$ では予想通り $M_{+}(\beta)=0$ だが，$\beta>\beta_c$ では $M_{+}(\beta)>0$ となる事が厳密に判っている*[1]。これが，強磁性体の相転移の現象である。特に $M_{+}(\beta)>0$ のときは，系のスピンが無限に長い距離にわたって互にそろい合っている。このようなとき，この系は長距離秩序をもつという。

長距離秩序が存在する事の証明の核心になるのは，Peierls による以下のようなアイディアである。系の状態を一つ選ぶと，格子はスピンが＋である領域と－である領域に分けられる。２つの領域の境界は，１次元では点の集り，２次元では閉じた輪の集り，３次元では閉じた面の集り，そして一般に d 次元では閉じた（$d-1$）次元曲面の集りになる。これらの輪や面の事を contours（輪郭，外形）と呼ぶ事にする。

図２に，系の２つの状態とそれらに対応する contours を描いた。図２a には小さな contours が，ポツリ，ポツリと描かれている。元のスピンの状態と見比べると，これは格子全体を覆った＋のスピンの「海」の中に－のスピンで出来た小さな「島」が点在しているような状況だと理解できる。もしある逆温度 β に於いて，このような状態が典型的なものであるならば，ここでは長距離秩序が存在するであろう。逆に図２b は，秩序がないときの典型的な状態になっている。ここではスピンが＋の領域と－の領域は，互いに複雑に入り組み合っている。

---

*[1] 一般に無限系での物理量を計算するのは極めて困難で，$M_{+}(\beta)$ が計算できるのも $d=1$，２のときだけである。それでも相転移の存在は厳密に証明できる。Griffiths の解説(1)は証明の論理とアイディアを生き生きと伝えてくれる。

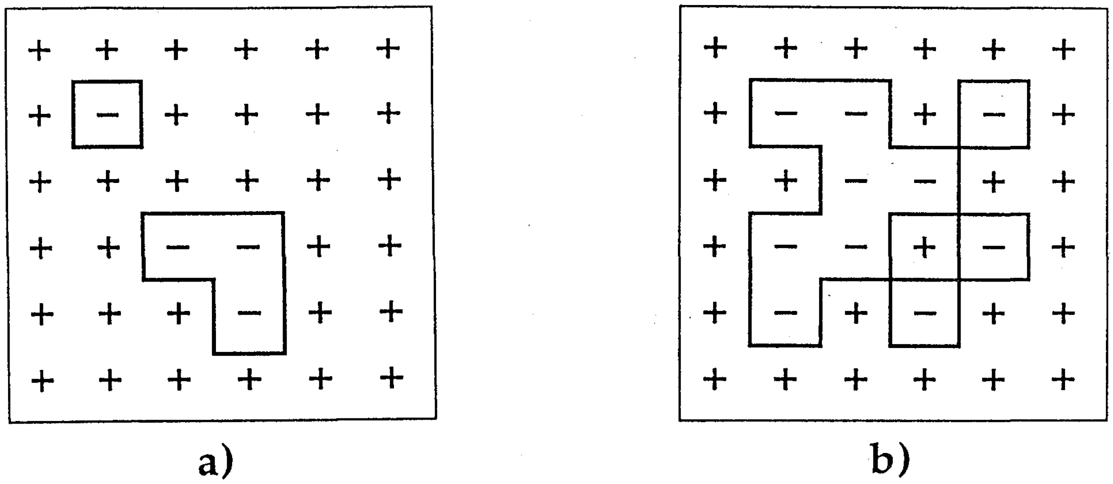

図 2　2 次元の系の 2 つの状態と，それらに対応する contours。a）は長距離秩序のある場合に対応する。

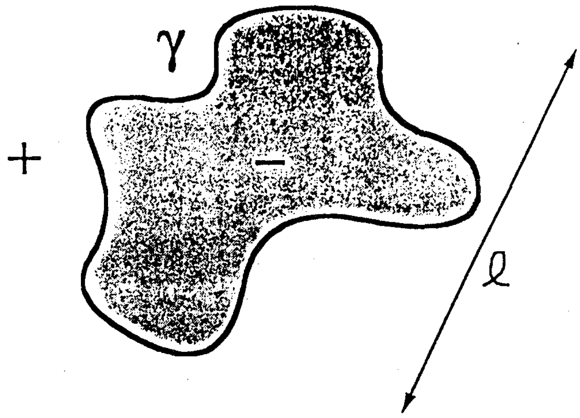

図 3　＋の「海」の中の，広がり l 程度の contour。

では，何故 1 次元以外では β が充分に大きいときに図 2 a のような状況が出現し得るのだろうか。

図 3 のような＋スピンの「海」の中の－スピンの「島」をひとつ考えて，その境界（＝contour）を γ と呼ぶ。ハミルトニアン(1)によれば，γ が存在すると系のエネルギーは丁度 $2|\gamma|$ だけ大きくなる。ここで $|\gamma|$ は contour γ の表面積（2 次元では周の長さ）である。図のように γ の広がりがおおよそ l であれば，$|\gamma|$ は l^{d-1} 程度になる。そこで温度 β のとき，大きさ l の contour γ の出現する確率はおおよそ

$$\mathrm{Prob}(\gamma \text{がある}) \lesssim \exp(-2\beta|\gamma|) \simeq \exp(-2\beta l^{d-1})$$

とみつもられる。ここで格子上のある1点を囲む広がり l の contours の種類は $C^{l^{d-1}}$ ほどある（C は2－3程度の数）事を考え合わせると，ある点が contour に囲まれている確率は，次のように評価される。

$$\mathrm{Prob}(\gamma \text{がある}) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \exp\{(\ln C - 2\beta)l^{d-1}\}$$

この無限和は，$d>1$ であれば必ず収束する。しかもそのときには，β を大きくする事によって，和をいくらでも小さくする事が出来る。すなわち β が充分大きければ，この点は非常に大きな確率で＋スピンの「海」に属しているのである。

こうして次元が $d>d_l=1$ を満たせば，*2 β が充分大きいときに長距離秩序が存在する事が判った。（$d=1$ のときは上の和は発散し，我々は何も証明できない。）ここで，d_l は下臨界次元（lower critical dimension）と呼ばれる普遍的な量である。この解説の目標は，ランダム磁場イジング模型の d_l を決定する事である。

3．ランダム磁場イジング模型

ここで考えるハミルトニアンは，前節の(1)に外部磁場の項が付け加わったものである。

$$\mathcal{H} = \sum_{\langle xy \rangle} \sigma_x \sigma_y - \sum_x H_x \sigma_x \tag{4}$$

格子やスピン変数の構造，境界のスピンを＋に固定することなどは全て前節と同様である。ハミルトニアンの第2項での和は，全ての格子点についてとる。この項は，各格子点 x でスピン σ_x を磁場 H_x と同じ方向に向けようとする傾向を持っている。

ここで磁場 H_x は，各格子点で独立に，確率1/2で値 h を，確率1/2で値 $-h$ をとるものとする。こうしてランダムに $\{H_x\}$ を選んだら，それは完全に固定してしまう。*3 その上で，ハミルトニアン(4)で記述される系の平衡統計力学を考え，2節と全く同様に(2)の期待値や(3)の秩序パラメータ $M_+(\beta, h)$ を定義する事にする。*4

ランダム磁場は定まった方向を持たないから，明らかに強磁性の長距離秩序とは相容れない。そこで，任意の β について h が充分に大きければ，長距離秩序は完全に破壊され $M_+(\beta)=0$ が成立する。面白い問題は，β が充分大きく h が充分小さいときに，長距離秩序が破壊されるかどうかという事である（図4）。

---

*2 普通には正の整数以外の次元を考える事は出来ないが，ここに現れる d を，形式的に正の実数と読みかえると，たとえば1.5次元でも β が大きいときには長距離秩序が存在するという事になる。

*3 これは，合金などで，結晶の原始配列がランダムなまま固定された状況の理想化である。

*4 通常 $\{H_x\}$ の様々な可能性についての平均をとることが多い。しかし M_+ のように既に空間平均をとった量は，このような平均をとってもそれ以上変化がない。これは（広義での）エルゴード性と呼ばれる性質である。

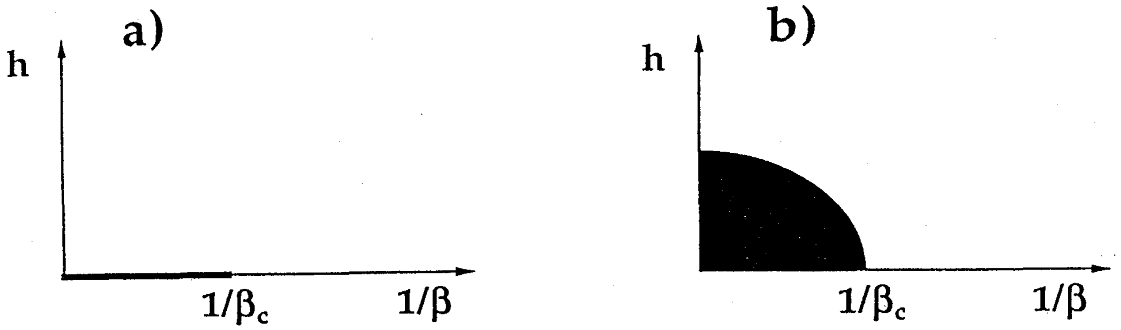

図4　ランダム磁場がかかったときに，長距離秩序が即座に破壊される場合(a)と，しばらくは残る場合(b)の相図。網をかけた部分が，長距離秩序のあるパラメータ領域を表す。Imry と Ma は，$1<d\leqq 2$ で a）が，$d>2$ で b）がおこるとした。しかし Parisi と Sourlas によれば，$1<d\leqq 3$ で a）が，$d>3$ で b）がおこるという。なお磁場が規則的に振動していて平均が 0 であれば，全ての $d>1$ で b）がおこる事が知られている。

ランダムではなく，規則的に $\pm h$ の間を振動するような磁場についても，同様の問題が考えられる。この場合には，$d>1$ であれば，β が充分大きく h が充分小さいときに長距離秩序が破壊されずに残る事が判っている[1,2]（図4）。

非常に大雑把に考えると，ランダム磁場はこの振動磁場と似通っている。どちらの問題でも H_x は半々に $\pm h$ の値をとり，平均すると 0 になる。しかし類似点はそれだけであり，ランダムと規則的な振動とは似ても似つかないのである。格子の中の有限の部分（どんなに大きくてもかまわない）で，自分の好きな $\pm h$ の値のパターンを選ぶ事にしよう。（たとえば，$+h$ を使って絵を描く。）ランダム磁場 $\{H_x\}$ は等確率で全てのパターンをとるのだから，上で選んだパターンはこの有限の部分に（小さいけれど）有限の確率で出現する。ところが，我々の考えている無限に大きい格子の中には，上で考えた有限の部分と正確に等しいコピーが無限個ある。だから我々が選んだパターンが，この無限個のコピーの中のどれかで実現される確率は 1 である。驚くべき事だが無限に広い格子の上では，ランダム磁場のあらゆるパターン（シェイクスピアの自筆のソネット，あなたの顔，我々がこれから書く全ての論文，出版禁止の写真…）が確率 1 で出現しているのである。

この考察は，長距離秩序や臨界現象といった無限個のスピンの相互作用が本質的である現象を考えるときには，$\{H_x\}$ が平均でどう振舞うかとか，典型的にはどういう性質を持つかといった議論にはあまり頼れない事を教えてくれる。広い格子のどこかには，必ず平均や典型からひどくはずれた $\{H_x\}$ のパターンが出現しているのである。

4．Imry-Ma の論法

ランダム磁場イジング模型に於いて，強磁性の長距離秩序が，弱い（けれど有限の）ランダム磁場で破壊されるか否かを Imry と Ma[3]は，contour の出現確率を考えて議論した。

再び図3のようなcontour γ を考える。ハミルトニアン(4)より，γ が存在する事による余分なエネルギーは $2|\gamma|-2\Sigma H_x$ である。(和は γ に囲まれる点 x についてとる。)ここで第2項の和を評価するのがランダム磁場に固有の難問である。

Imry と Ma はここで少し（？）問題をすりかえて，contour γ を固定した後から，磁場 $\{H_x\}$ をランダムに選ぶ事を考えた。この場合には，エネルギーの第2項について

$$\overline{\Sigma H_x}=0\ ,\ \overline{(\Sigma H_x)^2}=h^2|V(\gamma)|$$

が成り立つ（棒は $\{H_x\}$ についての平均，$|V(\gamma)|$ は γ に囲まれるスピンの総数）から，和 ΣH_x の典型的な大きさは $h|V(\gamma)|^{1/2}$ 程度と見積もられる。図3のように γ の広がりが l 程度であれば，$|V(\gamma)|$ は l^d 程度になる。そこで γ のエネルギーは，最も小さめに見積もっても $l^{d-1}-hl^{d/2}$ 程度ということになる。そこで前節同様にcontour γ の存在確率について

$$\mathrm{Prob}(\gamma\text{がある})\lesssim\exp(-\beta l^{d-1}+\beta hl^{d/2})$$

という評価が得られる。ここでは，ランダム磁場のない場合とは違って，右辺の量が $l\to\infty$ で小さくなるのは，$d\geqq 2$ のときである。

ここで前節と同様の議論を繰返すと，$d\geqq 2$ では β が充分大きく h が充分小さいときに $M_+(\beta,\ h)>0$ となるという結果が得られる。ただしImry と Ma は他の要素も考慮した上で，$d=2$ では長距離秩序がないと結論した。いずれにしろ下臨界次元 d_l については，$d_l=2$ という結果が導かれたわけである。

このImry と Ma による議論も，一瞥すると強磁性イジング模型に於けるcontourの出現確率の議論と同程度に納得のいくもののように感じられる。しかし少なくとも数理物理の視点からは，両者の間にはかなりの隔たりがある。2節で紹介した長距離秩序についての議論は，多少の努力を払う事で，完全に厳密な「証明」に焼き直す事ができる。しかしImry と Ma の論法をそのまま厳密にするのは，今のところは不可能である。

もちろん物理の理論を「証明」という観点から見るのは，少し偏った事かもしれない。しかし，一般に直観的な議論を厳密な証明に直すのが困難なときには，その議論の中で何か重要な物理的な事実が見落とされているという可能性がある。Imry と Ma の議論はまさにそういった例なのである。

この議論の持っているひとつめの問題点は,*5ここでは「ランダムさ」というものが，かなり甘く見られている事である。Imry と Ma は実際の順序とは逆に，γ を固定してか

*5　実はこのひとつめの問題は(4)で解決された。しかしそこでも，次に述べるcontoursの相互作用の問題は手つかずであった。

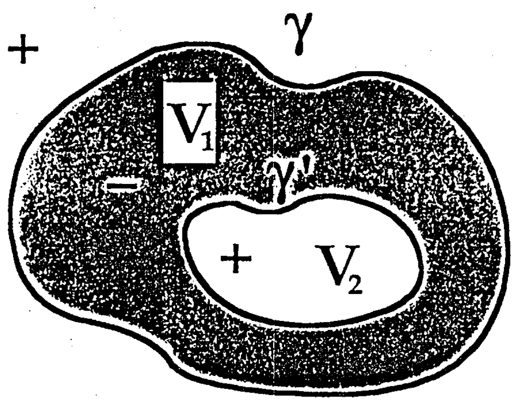

図５　contours γ と γ' は，ランダム磁場を介して強く相互作用し合っている。これがImryとMaの理論にとっては命取りになる。

ら磁場 $\{H_x\}$ を選ぶかのように考えた上に，$\{H_x\}$ の「典型的な」振舞いのみを議論した。実際には運の悪い γ もいて，ランダム磁場から $|V(\gamma)|^{1/2}$ ではなく $|V(\gamma)|$ のオーダーのエネルギーをひろってしまう可能性もある。

更にこの議論には，より深刻なふたつめの問題点がある。それは，ランダム磁場イジング模型に於いては，異なったcontoursどうしが実は強く相互作用し合っているという事実である。今までは図３のようにcontour γ がひとつだけある状況を考えていたが，当然図５のように γ の中に別のcontour γ' が含まれている状況も生じてくる。この場合のcontour γ によるエネルギー（γ があるときと，ないときのエネルギーの差）は，

$$2|\gamma| + 2\sum_{x\in V_1} H_x - 2\sum_{x\in V_2} H_x$$

と計算される。（領域 V_1，V_2 は図５のようにとる。）困った事にこのエネルギーは，ランダム磁場 $\{H_x\}$ を介して，あらわに γ' に依存している。しかも多くの場合この γ' によるエネルギーへの補正項は，γ だけを用いて計算したエネルギーと同程度に（あるいは，それ以上に）大きくなり得るのである。とすると，ImryとMaのように γ ひとつだけを取り出して議論する事は，物理的にも不可能である事になる。

このように問題点を書き連ねていくと，今度はImryとMaの議論というのは実に不正確なものだと思われてくるかもしれないが，それでは少々ImryとMaに対して不公平である。物理の理論の中には，ImryとMaの議論と同じように（或いはそれ以上に）問題を持ちながらも，立派に市民権を持っているものが数多くある。ImryとMaの理論がこのように厳しく批判されたのは，次節で述べるdimensional reductionが発見されたという特殊な事情のためなのである。

5．Dimensional reduction

摂動論やくり込み群といった場の理論的手法は，今や相転移，臨界現象の研究で欠かす事の出来ない重要な計算手段である。ランダム磁場イジング模型の問題にもこの方向からのアプローチが試みられた結果，dimensional reduction と呼ばれる実に面白い結論が導かれた。[5] その主張は，d 次元のランダム磁場イジング模型*6での，スピン相関函数は，スピン間の距離が大きいときには，（$d-2$）次元のランダムさのない強磁性のイジング模型*6でのスピン相関函数と一致してしまうというものである。*7

Parisi と Sourlas が見出した dimensional reduction の導出法は，現代的な手法を華麗に組合せた実に美しいものであった。[6] 彼らの難解な議論の筋道を簡単にまとめると，次のようになる。

i）系の平衡状態のかわりに，ハミルトニアン(1)の極値を与えるような状態のみを考える。*8 そのような状態は（$d-1$）次元の古典場の理論に関する確率微分（差分）方程式の解に対応する。

ii）上の確率微分方程式の解を，ランダム磁場について平均すると，超対称性*9をもった場の理論が得られる。超対称性の結果として，この理論が（$d-2$）次元のスカラー場の理論と等価である事が判る。

Parisi と Sourlas は ii）のステップを摂動論によって示したが，今では摂動を用いない厳密版も得られている。[7] しかし，ステップ i）がどういう場合に信頼できるのかは，未だにはっきりとは判っていない。特に，対称性の破れがあるときには問題があると思われている。[8]

もし dimensional reduction という魔法のような話が本当だとすると，長距離秩序の有無についてもはっきりとした結論を下す事が出来る。強磁性のイジング模型は $d>1$ で長距離秩序をもち，$d \leqq 1$ では（有限温度では）長距離秩序を持ち得なかった。長距離秩序の有無はスピンの相関から判るから，dimensional reduction を用いると，ランダム磁場イジング模型は $d>3$ でのみ長距離秩序をもち得る事になる。そこで下臨界次元 d_l については $d_l=3$ が得られる。

この結果が Imry と Ma の結論 $d_l=2$ と全く両立しない事はいうまでもない。しかも両

*6　正確には，ϕ^4 などの連続スピン系を考える。
*7　もちろん d 次元に比べて（$d-2$）次元は点の数が少ないから，はじめに考える相関函数は（$d-2$）次元の部分空間の中のスピンだけを使ってつくるものとする。
*8　これは摂動の各オーダーで最も発散の強い項のみを取込むという近似に対応している。この近似を正当化する（はずだった）物理的理由は，低温や臨界点近傍での系の主たるゆらぎは温度ではなくランダム磁場によるという事である。
*9　例の，ボゾンとフェルミオンが混ざるという対称性である。ただしここでの超対称性は純粋に理論的な技巧であり，素粒子（紐）論の基本法則とは何の関係もない。

者の対立が最もきわだっているのは，物性物理学者にとって一番大切な3次元の場合である。Imry と Ma の contour の議論は長距離秩序の存在を予言し，dimensional reduction は長距離秩序はあり得ないと主張する。しかし3次元のランダム磁場イジング模型が，きちんと定義されたモデルである以上，本当の答はただひとつのはずである。

二つの理論の正否を試すべく，様々な計算が各々の理論の枠組みの中で行われたが，何一つ決定的な事は判らなかった。いずれの理論もそれ自身としては完全につじつまが合っているためにそう簡単には自己矛盾を示さなかったし，二つの理論はあまりにも異質であるために他方の欠点を一方の理論に基づいて指摘する事もできなかった。

現実の3次元の物質についての実験によっても，この対立を解決する事はできなかった。多くの実験家によって，ランダム磁場イジング模型と極めて似通っているであろう系についての実験が行われたのだが，驚くべき事に，実験の結果さえもが長距離秩序の存在を示すものとそうでないものとに分かれてしまったのである。これは，一般にランダム系が，非常に寿命の長い準安定状態を数多く持っている為だろうと考えられている。今の場合，2種類の実験のうち一方（あるいは両方）が，完全な熱平衡に至る前の状態を扱っているというのである。ランダム系での平衡状態への緩和は，それ自身極めて本質的な面白い問題なのだが，残念ながらここでは深く議論する余裕はない。

6．Imbrie の結論

1984年，Imbrie は，ランダム磁場イジング模型に関して初めての，厳密で物理的に重要な結果を発表した。[9] 彼は絶対零度（$\beta=\infty$）にある3次元のランダム磁場イジング模型が，h が充分に小さいときには長距離秩序を持つ事を示したのである。

Imbrie は，絶対零度に対応する最もエネルギーの低い contours の配置が，実際に図2a のような＋の「海」の中に小さな－の「島」という状況になっている事を，実に巧妙な帰納法を構築することで（くり込み群的アプローチといってもよいか）証明して見せた。当然この過程で典型的でない $\{H_x\}$ のふるまいや，入組んだ contours 同志の強い相互作用などの物理的困難が巧みなアイデアによって克服されていったのである。

Imbrie の結果は絶対零度についてのものだからといって，決して自明なものでない事は強調しておかねばならない。絶対零度では熱的ゆらぎは全く存在しないが，ランダム磁場の強いゆらぎが問題を極めて困難なものにしている。[*10] 実際，系が充分低温であれば，熱的ゆらぎはランダム磁場のゆらぎに比べて無視できると考える研究者は多いのである。

Imbrie の結果によって，Imry と Ma の予想した $d_l=2$ が決定的になったと考えた研究者は多かったと思う。しかし dimensional reductionists の中には，それでも自説を曲げな

---

*10　2次元のランダム磁場イジング模型では，絶対零度でも長距離秩序は破壊されている。

かった人も多かったようだ。*11 彼らの主張として「$d=1$ の強磁性イジング模型は，$T=0$ で長距離秩序をもち，$T>0$ では無秩序状態にある。Dimensional reduction に従えば $d=3$ のランダム磁場イジング模型も，$T=0$ で長距離秩序をもち，$T>0$ では無秩序という事になる。Imbrie が証明したのは当たり前の事実だ。」というものがあったという。しかし，Parisi と Sourlas の導出法をみる限り，絶対零度の3次元ランダム磁場イジング模型に対応するのは有限温度の1次元強磁性イジング模型のようである。そうだとすると，dimensional reduction は $d=3$ の絶対零度でも無秩序状態が出現する事を予言するように思われるのだが。

7．Bricmont と Kupiainen の結果

1987年の夏に，Bricmont と Kupiainen は3次元ランダム磁場イジング模型は，β が充分大きく h が充分に小さいときには長距離秩序を持つ事の厳密な証明を発表した。[10] これによって下臨界次元は $d_l \leqq 2$ を満たさねばならない事になり，dimensional reduction の予想した $d_l=3$ という可能性は完全に否定された。一時は解決不可能かとさえ思われた長い論争にも，Imry-Ma 派の勝利という形でとうとう終止符が打たれたのである。*12

Bricmont と Kupiainen による長距離秩序の存在証明も，イジング模型の contours による表現に基づいている。しかしランダム磁場イジング模型では contours 同志が強く相互作用し合っているために，多くの contours の出現確率を同時に考慮しなければならない。更にありとあらゆるスケールで典型的でない振舞を見せるランダム磁場の影響をも，効果的に取入れなければならない。これらの極めて困難な要請を満たすために，Bricmont と Kupiainen は Wilson に始まるくり込み群的なアイディアを用いて彼らの証明を作り上げていった。

ある物理系を，今までとは異なったスケールで眺めると，当然系の様相は今までとは違って見えてくる。仮にこの新しいスケールでの系の様相を，スケールを全く変える事なく，系のパラメータを（ある一定の規則に従って）変化させる事だけで再現できたとしよう。*12 そうすると系が非常に大きな（あるいは小さな）スケールでどう振舞うかを知るためには，上の規則を何度も適用して系のパラメータを変化させた後で，オーダー1のスケールでの系のふるまいを調べてやれば充分だという事になる。これがくり込み群のアイディアの骨格である。長距離秩序の存在はいうまでもなく，非常に（無限に）大きなス

---

*11 Imbrie の論文が出版された後でも，ある会議で行われた専門家による投票では dimensional reduction 派が優勢だったという。

*12 数理物理の仕事が物理の研究者に与えるインパクトは，余り大きくないのが普通であるともいわれている。「もし人々が dimensional reduction を思いつかず，Imry と Ma の理論だけが世の中に知られていたとしたら，今回の仕事も多くの物理学者からは『昔から知られていた事を今ごろわざわざ厳密に証明したのか』の一言で片づけられていたのであろう。」とは Jean Bricmont の言である。

ケールでの系の性質だからくり込み群で調べるにはうってつけである。

d 次元ランダム磁場イジング模型のある状態に対応するcontoursの集りを $\{\gamma_i\}$ と書こう。(この状態には γ_1, γ_2, $\cdots\gamma_N$ の N 個contoursがあるということ。) 次のようにして $\{\gamma_i\}$ にくり込み変換を施す[12] (図6)。先ず $\{\gamma_i\}$ の中から，広がりが l より小さなcontoursを全て選び出し，消してしまう。次に格子を $1/l$ に縮小し，格子全体を1辺の長さ1のブロックに分ける。これらブロックの中から，$\{\gamma_i\}$ のcontoursで生き残っているものと少しでも交わりがあるものを全て選び出し，それらの集りをくり込まれたcontoursの集り $\{\gamma'_i\}$ と呼ぶ。

一般に，系がある状態をとる確率は，exp $(-\mathscr{H}(\text{状態}))/Z$ で与えられる。そこでくりこまれたcontoursの集り $\{\gamma'_i\}$ の出現する確率は，

$$\mathrm{Prob}(\{\gamma'_i\}) = \sum_{\{\gamma_i\}} \exp[-2\beta\{\sum_i |\gamma_i| + \sum_{x\in V} H_x + (\text{定数})\}]$$

と書ける。ここで和は，くりこんだとき $\{\gamma'_i\}$ になるような全ての $\{\gamma_i\}$ についてとる。(V は $\{\gamma_i\}$ から決まる－スピンの領域である。) ここで $\beta \gg 1$, $h \ll 1$ であるとして，$\{\gamma_i\}$ についての和は無視し，スケール変換の効果だけを次元解析で取り入れると上の

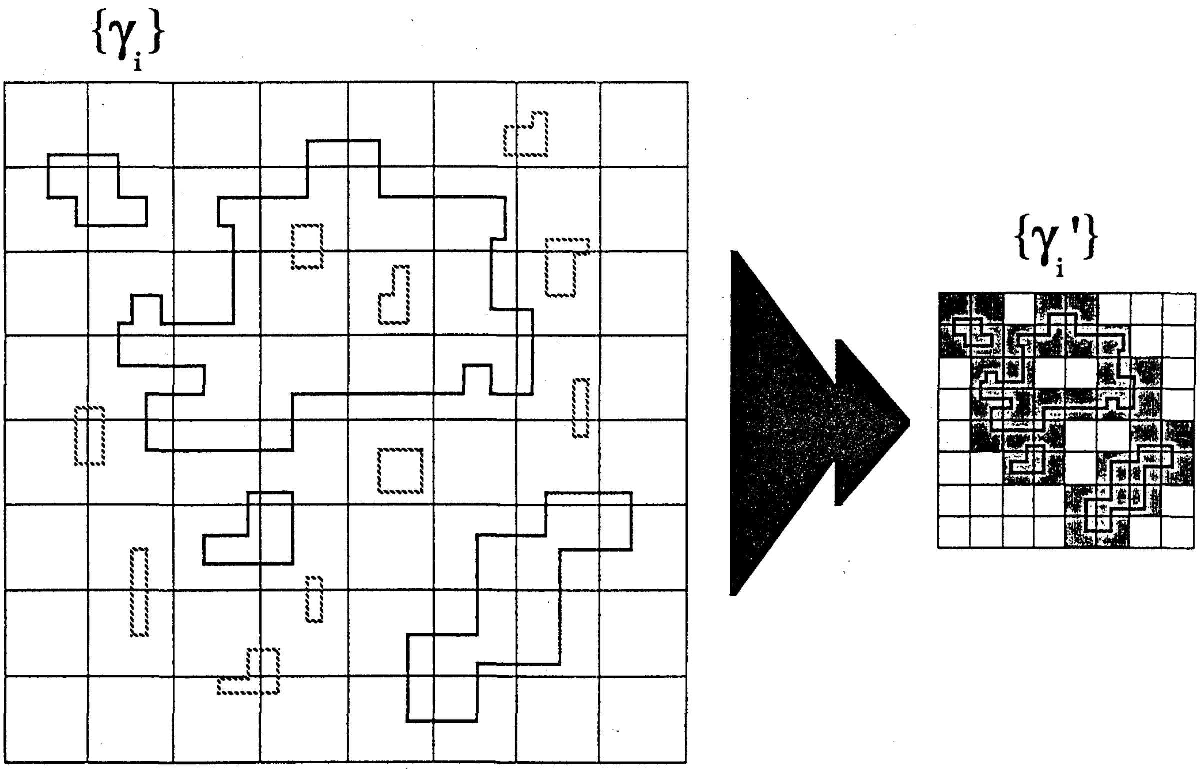

図6 $\{\gamma_i\}$ の l 以下のスケールのゆらぎをならして，くりこまれたcontoursの集まり $\{\gamma'_i\}$ をつくる。先ず格子を一辺 l の正方形に分割する。広がりが l 以下のcontours (図中点線で示した) を消し去った後，全体を $1/l$ に縮小する。最後に，右図で長さが1以下の構造を無視して，網かけで示したような新しいcontourを得る。

確率は次のように評価される。

$$\mathrm{Prob}(\{\gamma'_i\}) \simeq \exp[-2\beta'\{\sum_i |\gamma'_i| + \sum_{x'\in V'} H'_{x'} + (\text{定数})\}]$$

ただしx'は粗視化された格子上の点（ブロック）であり，新しい逆温度は$\beta'=l^{(d-1)}\beta$，新しい磁場は$H'_{x'}=l^{-(d-1)}\sum_{x \text{ in block } x'} H_x$で与えられる。*13 この磁場の式では，$l^d$個の点について和をとるから，一見磁場の大きさは$H'=lH$となるように思われる。しかし上式の2乗平均をとると，

$$\overline{(H'_{x'})^2} = l^{-2(d-1)}\overline{(\Sigma H_x)^2} = l^{-(d-2)}h^2$$

となるので，$H'_{x'}$は，大きさ$h'=l^{-(d-2)/2}h$をもつランダム磁場だと考えられる。

このようにして，$\beta \gg 1$，$h \ll 1$のときは（非常に粗い近似の範囲では）系をl倍大きなスケールから観察する事は，スケールを変えずにパラメータβ，hを

$$\beta'=l^{(d-1)}\beta,\ h'=l^{-(d-2)/2}h \tag{5}$$

のように変化させるのと等価であると結論される。系の非常に大きなスケールでの振舞いに興味があれば，上のβとhの変換式を，何度も何度も繰返し用いればよい（図7）。$d>2$であれば，上の変換を繰返すとβとhは急激に固定点$\beta=\infty$，$h=0$に近付いていく。つまり無限に大きなスケールでは，この系は絶対零度（$\beta=\infty$）にありランダム磁場

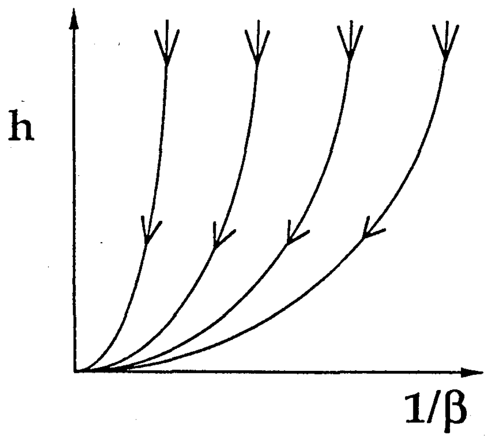

図7　くりこみ群の流れ図。$d>2$のランダム磁場イジング模型で，観察するスケールをどんどん大きくする事を考える。$\beta \gg 1$，$h \ll 1$のときには，これはスケールを変えずに，パラメータβ，hを（式(5)にしたがって）図のように動かす事と等価である。

*13　$|\gamma|$は表面積だからγがスケール変換されてγ'になったとすると$|\gamma| \simeq l^{(d-1)}|\gamma'|$。$\beta|\gamma|=\beta'|\gamma'|$を要請すると$\beta'=l^{(d-1)}\beta$となる。$H'$の式の$l^{-(d-1)}$は単に$\beta$を$\beta'$で置き換えた為に生じた。

が全くかかっていない（$h=0$）ように見えるのである。もちろん$\beta=\infty$，$h=0$の系には長距離秩序が存在するから，もともとのランダム磁場イジング模型にも長距離秩序があったという事になる。

これがBricmontとKupiainenの証明の，最も基本的なアイディアである。このようなcontoursに対するくり込み群を用いた議論には，厳密，非厳密を問わずそれほど先例がなく，この考え方自身物理に於けるくり込み群の新しい使い方としても有望である。しかしなんといってもBricmontとKupiainenの仕事の眼目は，今まで述べてきた大まかなアイディアを徹底的に補強して，完全に厳密なくり込み群の理論を作り上げてしまう点にある。

くり込み変換を厳密に遂行するためには，多くの困難を乗り越えなければならない。実際の証明は，厳密統計力学や構成的場の理論の研究で培われた様々なテクニックを駆使した複雑なものだが，ここではいくつかの主要なポイントについてごく簡単に触れておく。

Ⅰ）当然(5)のProb($\{\gamma'_i\}$)の表式は近似であって，本当は$\{\gamma'_i\}$について足しあげたときに様々な補正項（例えば非局所的な相互作用）がついてくる。これらの補正が，それほど大きくないという事がMayer展開という手法を用いて示される。

Ⅱ）くりこみ変換は何回も何回も繰返し行なうものである。たとえⅠ）で評価した補正が小さかったとしても，変換を繰返すうちに誤差が積み重なって増えていったのでは使いものにならない。つまりⅠ）の評価を行なうときに，(5)の振舞いに対する補正をも考慮にいれ，1回のくりこみ変換の後で補正が大きくならない事を示す事が必要になる。[*14]

Ⅲ）以前から強調している「典型的でない」ランダム磁場のパターンの問題は，変換を繰返すだけでいくらでも大きなスケールを扱う事ができるというくり込み群の特徴を巧みに用いて解決される。「広い」範囲にわたって$H_x=-h$となっている領域に注目しよう。この範囲を「広い」と感じるのはそれが我々の観察のスケールに比べて「広い」からである。くりこみ変換を充分に何回も行なえば，われわれの観察スケールは大きくなり，この範囲ももはや「広く」は思われなくなる。そうすれば$\{H_x\}$が「典型的である」とした評価が有効になるだろう。このような一見漠然としたアイディアを，厳密なくりこみ群の中に取り入れていく手際は，BricmontとKupiainenならではの実に見事なものである。[*15]

8．おわりに

本稿を終える前に少しdimensional reductionの名誉回復をしておこう。統計力学の系における臨界現象は，次元が上臨界次元（upper critical dimension)d_uよりも大きいときは

---

*14 こう書かれただけでは，こんな事が可能だとは信じ難いと思う。実際これは厳密なくりこみ群の理論を作る上でも最も卓抜なアイディアと技巧を必要とする部分なのである。

*15 具体的には，典型的でない$\{H_x\}$の領域を囲むcontourを「悪い」contourと呼んで，くりこみ変換の際に特別扱いをする。

分子場近似で記述されるといわれる。通常の強磁性イジング模型では $d_u=4$ なので，dimensional reduction に従うとランダム磁場イジング模型では $d_u=6$ ということになる。d_l の値の予言には失敗した dimensional reduction だが，この d_u の値は正しいと信じられている。厳密な不等式 $d_u \geqq 6$ もこの結果を支持している。[13)]

スピングラスをはじめとするランダムなスピン系の問題は，未だに多くの謎に包まれている。伝統的な近似法や直観が往々にして破綻をきたすこのような系の研究に於いてこそ，数学的に厳密な方法は威力を発揮するのかもしれない。ここで紹介した Imbrie, Bricmont, Kupiainen らの仕事をはじめとするいくつかの興味深い研究[14)]が，今後の発展の兆しである事を願うものである。[*16]

本稿をまとめた直後に，Aizenman と Wehr が，2次元ランダム磁場イジング模型は全ての $h \neq 0$，$T \geqq 0$ について長距離秩序を持たない事を証明した。[*17,15)] これによって，ランダム磁場イジング模型の下臨界次元については $d_l=2$ が遂に確立されたわけである。

参　考　文　献

1）R. B. Griffiths: in *Field Theory and Statistical Mechanics*, (Gordon and Breach, 1971).

2）Ya G. Sinai: *Theory of Phase Transitions: Rigorous Results*.

3）Y. Imry, S. K. Ma: Phys. Rev. Lett.**35**（1975）1399.

4）D. Fisher, J. Fröhlich, T. Spencer: J. Stat. Phys. **34**（1984）863.

5）A. Aharony, Y. Imry, S. K. Ma: Phys. Rev. Lett. **37**（1976）1364.

6）G. Parisi, N. Sourlas: Phys. Rev. Lett. **43**（1979）744.

7）A. Klein, L. Landau, J. F. Perez: Commun. Math. Phys. **93**（1984）459.

8）D. Fisher :Phys. Rev. Lett. **56**（1986）1964.

9）J. Imbrie: Commun. Math. Phys. **98**（1985）145.

10）J. Bricmont, A. Kupiainen: Phys. Rev. Lett. **59**（1987）1829; Commun. Math. Phys. **116**（1988）539.

11）原　隆：数学，掲載予定.

12）K. Gawedzki, .Kotezky, A. Kupiainen: J. Stat. Phys.

13）H. Tasaki: J. Stat. Phys. **54**（1989）163.

14）H. Nishimori: Prog. Theor. Phys. **66**（1981）1169.
M. Schwartz, A. Soffer: Phys. Rev. Lett. **55**（1985）2499.
M. Aizenman, J. T. Chayes, L. Chayes, C. M. Newman: J. Phys. **A20**（1987）L313.
J. T. Chayes, L. Chayes, D. S. Fisher, T. Spencer: Phys. Rev. Lett. **57**（1987）2999.

[*16] Chayes, Chayes, Fisher, Spencer Chayes の不等式 $d\nu \geqq 2$ によれば，交換相互作用の大きさがわずかにでもゆらいだ3次元の強磁性イジング模型の臨界指数 ν は $\nu \geqq 2/3 = .666\cdots$ を満たし，ランダムさのない3次元の強磁性イジング模型の $\nu \fallingdotseq .63\cdots$（近似値）とは一致し得ない。既にランダム系の持つこのような微妙な性質が，厳密に証明される時代になっているのである。

[*17] この結果は多くの研究者が信じていたものだが，その根拠はそれほど明確ではなかったようだ。2次元では，もちろん dimensional reduction は無力であるし，Imry と Ma の論法もかなり不正確である。

15) J. Wehr and M. Aizenman: Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 2503.
Commun. Math. Phys. **130** (1990) 489.
J. Stat. Phys. **60** (1990) 287.

付　記

1990年11月

このreviewをまとめてから，既に2年近くたってしまった。ついつい発表を遅らせてしまったが，まだ人に知られていない部分も多いと考えて，「物性研究」に掲載させていただくことにした。

Bricmont-Kupiainenの本論文もとうに出版され，この仕事も次第に過去のものになりつつある。しかし今でも，ランダム磁場イジング模型の問題は知っていても，彼らの仕事の存在を知らない物理学者がかなりいるようである。数学と物理学の間の社会学的ギャップは，まだまだ広いのだろうか？

その後，BricmontとKupiainenは，ランダム媒質中のランダムウォークの問題を手掛け，$d>2$ではランダムウォークのスケーリング極限での振る舞いが，自由な拡散と一致することを証明した。この仕事でも，厳密なくりこみ群が用いられている。

最後に，極く最近の厳密統計力学の話題として，Hara-Sladeの仕事について触れておきたい。彼らは，5次元の自己回避ランダムウォークの臨界現象やスケーリング極限が，自由なランダムウォークと一致することを厳密に証明した。多くの確率論や数理物理学の専門家が挑戦してきたこの古典的な難問が，とうとう完全に解かれたのである。

ランダム磁場イジング模型の問題とは違って，自己回避ランダムウォークについてのこの事実はかなり古くから信じられてきた。だからといって彼らの仕事の価値が低いというわけではない。実際，従来の理論的根拠は，自由なランダムウォークからの摂動論に過ぎなかった。自己回避ランダムウォークという，いわば無限大の非線形性をもった系の性質を，無限小の非線形性の効果から推し量ろうというのは，かなり強硬な楽観論である。Hara-Sladeによって，楽観論の結果が正しかったことは証明されたが，楽観論そのものは正当化されないだろう。