

マグノン系で観測されたカオスの Lyapunov 指数

岡山大・理 光藤誠太郎 味野道信 山崎比登志

強磁性体（イットリウム・鉄・ガーネット）を大電力マイクロ波で励起すると励起されたマグノン数が自発的に増減を始める。この自励発振について今までそのフラクタル構造について報告してきた [1]。それらの解析からこのアトラクターは三次元程度であることが分かっている。そこで今回はこのアトラクターの最大リアプノフ指数について解析を行った。

最大リアプノフ指数は以下のようにして求めた [2]。実験で得られるデータは一次元の時系列データなので、これを Time Delay 法により d 次元相空間に埋め込んでアトラクターを再構成する。図 (1) に示すように、このアトラクターの軌道上の一点を x とし、点 x に最も近い点を y とする。この二点間の距離を $dis(x, y)$ と書くことにする。アトラクターの t 秒後の時間発展を表す関数を f^t とすると、 t 秒後の点 x と y はそれぞれ $f^t x$ と $f^t y$ になる。この t 秒間時間発展させた後の点 x, y の距離は $dis(f^t x, f^t y)$ となる。時間発展にともなうこの距離の指数関数的増大は

$$\lambda(t) = \frac{1}{t} \left\langle \ln \frac{dis(f^t x, f^t y)}{dis(x, y)} \right\rangle \quad (1)$$

と書ける。〈 〉 は平均をとることを意味する。しかしこれでは λ の収束に時間がかかるのと、どこで二点間の距離の飽和の起こる場所が分かりにくいので、以下のように書き換える。

$$\lambda(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \langle \ln \Lambda(t, \tau) \rangle \quad (2)$$

$$\Lambda(t, \tau) = \frac{dis(f^{t+\tau} x, f^{t+\tau} y)}{dis(f^t x, f^t y)} \quad (3)$$

ここで、 $f^{t+\tau} x, f^{t+\tau} y$ は点 $f^t x$ と $f^t y$ をそれぞれ τ 秒だけ時間発展させた点である。

図 (2) にローレンツ方程式についてこの方法で求めた λ と t のグラフとそのストレンジアトラクターを示す。ここでコントロールパラメータは $a = 16, b = 4$ 。

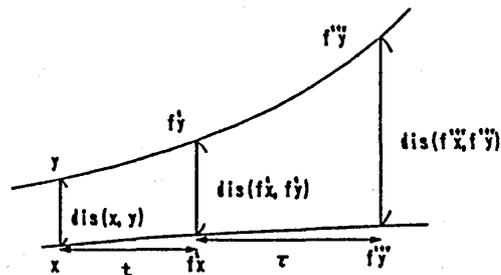


図 1

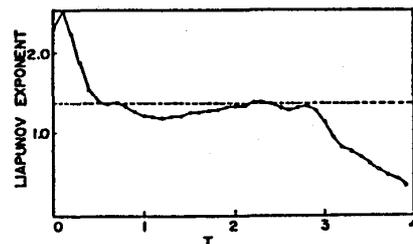


図 2

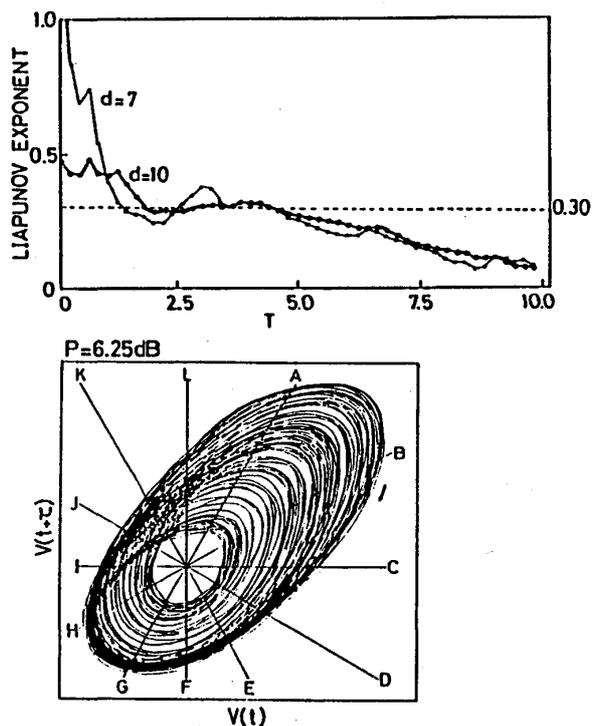


図 3

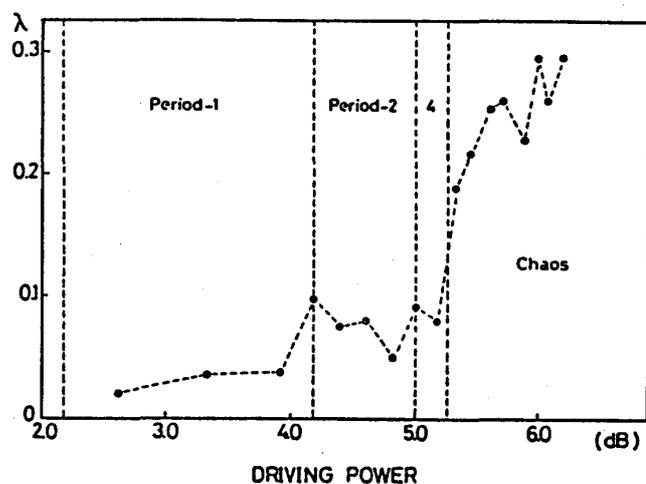


図 4

$r = 40$ を用いている。アトラクターの埋め込み次元は $d = 6$ で $\tau = 0.3$ 、 x の点の数は 2,000 を用いて平均している。 t の小さいところで λ が大きく、がたがたしているのは、このあたりではまだ比較する二つの軌道の距離が小さいため、計算の精度の影響を大きく受けているからであると考えられる。 t が 0.5 より大きいあたりでほぼ λ は一定になっており、この値がストレンジアトラクターの最大リアプノフ指数である。さらに t が大きくなり $t = 3$ の手前あたりから λ が小さくなって行くのは、軌道がすでにアトラクター全体にまで広がり、非線形効果で二つの軌道の距離の広がりが飽和してきていることを示している。破線で示した λ の値は解析的に求めたこのストレンジアトラクターの最大リアプノフ指数である。解析に用いたデータの精度をあらくして、実験とほぼ同程度に選んだせいか、少し小さな値を示している。レスラー方程式の $\sigma = 16$ 、 $b = 4$ 、 $r = 40$ についても同様であった。

図 (3) にマグノン系で得られたストレンジアトラクターの励起電力 $P=6.25\text{dB}$ ($0\text{dB}=40\text{mW}$) についての実験データからの結果を示す。実験は $\text{su}h1$ 第一次の不安定過程を利用し、磁場 1308 Oe 、マイクロ波周波数 3.3 GHz 、温度 4.2 K で行っている。得られた 4,000 点のデータをスプライン補間により 40,000 点にして解析している。図に示してあるのは埋め込み次元 $d = 7$ と $d = 10$ である。このアトラクターはフラクタル次元の解析から 3 次元程度であると考えられるが、測定に含まれるノイズのためか、埋め込み次元を大きくしていった方が λ の収束はよくなっている。これは上に述べた数値計算でも同じことが言えるこの解析方法によるものとも考えられる。

研究会報告

図(4)にマグノン系で観測したデータについて以上の解析をおこない求めた最大リアプノフ指数 λ と励起電力のグラフを示す。励起電力が $P=5\text{dB}$ のあたりで λ に顕著な増大が見える。このことはこのあたりでカオスへの転移が起こったことを示している。これは前回報告した、 $f(\alpha)$ スペクトラムがカオスの転移点のユニバーサルカーブと一致することから求めたオンセットの値と良い一致を示している。また破線で示しているのは、分岐が起こり周期性が変わるところで、パワースペクトルより求めている。分岐が起こるあたりで λ が増大していることがわかる。しかし周期軌道のところでは軌道の指数関数的な広がりはなく最大リアプノフ指数は0であるはずで、そのこととは矛盾する。また解析により定量的な値が大きい方にシフトしているとすれば矛盾はなくなる。しかし上で示した様にこのタイプのアトラクターは少し小さな値を与えると考えられる。このことを説明するためには周期軌道のところでも、カオスが内在し、バンド型のカオスであると考えなければならない。図(5)にこの系のカオス発生のメカニズムの理論的モデルを図示する[3]。kモードのマグノンは、 $S_u h_1$ 不安定性によって選択的に増大する。このkモードとエネルギー的に縮退したk'モードのマグノンが、非線形な4マグノン相互作用をし、カオスを発生させると考えられている。しかしどの様にして熱平衡にある多くのモードの中からk'モードのマグノンが選ばれるかは分かっていない。先に述べたリアプノフ指数の異常は、このk'モードの選択過程に関係しているのではないかと考えられる。このことに関しては、さらにこの系のモデルによる計算機実験や、さらに精度良い実験データを得る必要があり現在進行中である。

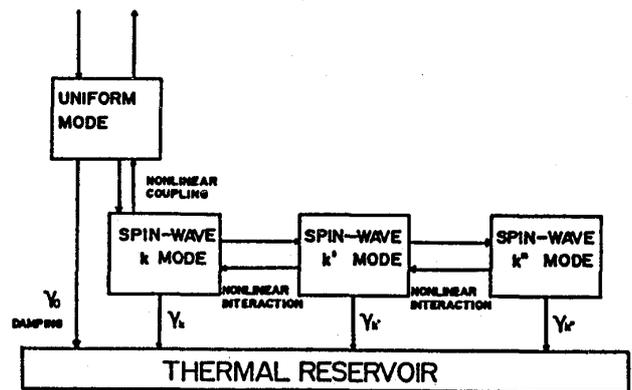


図 5

参考文献

- [1] S.Mitsudo, M.Mino and H.Yamazaki: J. Phys. Soc. Jpn. 59(1990)4231.
- [2] S.Sato, M.Sano and Y.Sawada: Prog. Theor Phys. 77(1987)1.
- [3] V.E.Zakharov, V.S.L'vov and S.S.Starobinets: Sov. Phys.-Usp., 17(1975)896.