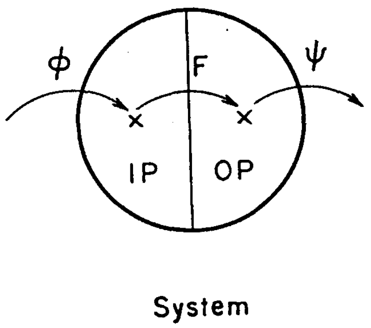
研究会報告

Weber Fechner 則　の一般化

東北大工　　　原　啓明

生体における刺激(Φ)と感覚量(S)の問題は, Weber(1834)と Fechner(1860)による経験則(WF 則): $S=\psi(\Phi)=k\log\Phi$(k:定数)をつかって解析されている。しかしこの経験則だけで Φ と S との関係を記述することは困難である。Stevens (1966)は WF 則の対数関数に代わるものとして,べき関数の経験則(S則)を提案している。現在,実験心理学ではこの両法則が事象に応じて別々に適用されている[1)]。

本講演では生体システムを構成する要素に関してスケーリング則を仮定し,統一的立場で Φ と S との関係を以下の手順（I，II，III）で一般化する。



IP: Input part
OP: Output part

図1 生体システムの入出力部

すなわち,

(I):システム構造は スケーリング則を満たす関数Fで規定されると考え, $S=\psi(\Phi)$ の関係を$\tilde{\psi}(\Phi)$ $[=\psi\circ F(\Phi)]$ と一般化する。

(II):Φ をシステムに関する状態変数とみて,システム構成の要素数と領域 (体積) を導入し,スケーリング因子 D の意味と Φ と S の関係を具体的に調べる。

(III):Φ は位置(x),時間(t)の関数であると考えて,$\Phi(x,t)$を Fokker-Planck

NII-Electronic Library Service

の方程式の解で規定する。 さらに 解に含まれるパラメターを局所座標とする2次元多様体を導入し，動的スケーリング因子 D を2次元曲面の性質から導出する。

まず(Ⅰ)においてシステムは二つの部分，入力部と出力部から構成されていると考える（図1 参照）。 入出力部（IP と OP)間に写像 F を導入すると，感覚量は形式的に $S=\tilde{\psi}(\Phi)\;[=\psi_0 F(\Phi)]$ と拡張された形で表される。F は 刺激 Φ にシステム構造の活性化されたパターンを規定する関数である。

$$F(\Phi+d\Phi)=[1+R(\Phi)\,d\Phi]\,F(\Phi) \qquad (1)$$

$R(\Phi)$ は刺激の強さ Φに応答する割合を表す関数 である。
応答関数 $R(\Phi)$を，スケーリング則(因子 $D=\log a/\log b$:Fractal 次元)で規定すると，$S=\psi(\Phi)$ は具体的に

$$S=\tilde{\psi}(\Phi)=\begin{cases} k_0R_0\log\Phi & (1+D=0) \\ \dfrac{k_0R_0}{1+D}\,\Phi^{1+D} & (1+D\neq 0) \end{cases} \qquad (2)$$

で与えられる。k_0, R_0 は定数である。
したがって，スケーリング則で活性化された構成要素のパターンによって 学習・記憶が保持されるものと考えると，最近行われたヒヨコの脳の一部を損傷し，回避トレーニングによって記憶（学習）の保持を調べた実験事実[2)]が旨く説明される。

つぎの取扱(Ⅱ)では，システムの領域(体積 V)が N 個のクラスターで構成された体系であると考え，Φ はシステムに関する状態変数であるとみなす。 すなわち，システムの状態は刺激に応答し活性化されたシステムの領域（体積 V），スケーリング因子(D)と感覚量(S)によって規定されるものとする。このとき，クラスター間の相関を考えると図2で示した刺激―感覚量(応答)図が得られる。

図2で $\tilde{S}=S-S_0$, $\tilde{\Phi}=(\Phi^{1+D})\sim\tilde{V}^{-1}\,(=\varkappa^{1+D}\,N^{-\gamma(1+D)}\,\Phi^{1+D})$ ，$\varkappa$ は正の定数，$\gamma>0$ は興奮型，$\gamma<0$ は抑制型の定数である。また $\theta=\varkappa^{1+D}/1+D$, θ_c は刺激－感覚量(応答)曲線の臨界点である。図2では，従来の WF 則と S 則に相当する関係式が $\theta>\theta_c$ （状態G）の曲線で得られる刺激－感覚量(応答)曲線として求められる。 $\theta<\theta_c$ (状態L）にお

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

いては，刺激－感覚量（応答）の関係に特異性が予想される。

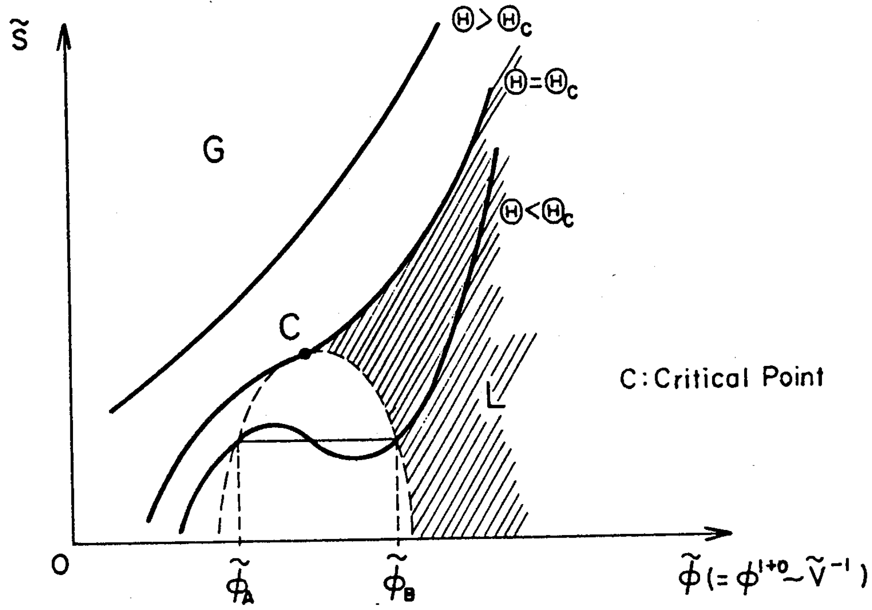


図２　生体の刺激－感覚量（応答）図

最後に（Ⅲ）を実行するために，Φ をシステム構成要素の位置（x）と時間（t）に依存する局所的な量であるとみなし，$\Phi(x,t)$ は Fokker-Planck(FP) 方程式の解 $w(x,t)$ に N（数値）倍された量であると考える。　このとき WF 則と S 則はそれぞれ（$\log w(x, t)=$）$l(x, t)$（ 尤度関数 ）と″拡張された″尤度関数： $S[w]$（$=S[l(x, t)]$）の形で表される。

$S[w]$ の関数形を求めるために，FP 方程式の解に含まれる２個のパラメター（平均値，分散）を局所座標 θ^i（$i=1,2$）とする ２次元多様体 M（$=\{w(x,\theta)\};w(x,\theta)\equiv w(x,t)\}$）を導入すると，$M$ には Amariの α 接続[3] によって幾何学構造が導入できる。つまり接続係数 $\Gamma^{(\alpha)}{}_{ijk}$ は

$$\Gamma^{(\alpha)}{}_{ijk}(\theta)=<\nabla_{\partial_i}{}^{(\alpha)}\partial_j l(x,\theta);\partial_k l(x,\theta)> \qquad (3)$$

で与えられる。　$\nabla_{\partial_i}{}^{(\alpha)}\partial_j$ は α で特徴づけられた θ^i に沿った θ^j の共役微分を表す。内積 $\langle A:B\rangle$ は期待値 $E[A(x)B(x)]=\int A(x)B(x)w(x,\theta)\,dx$ で定義された数値，$\langle\partial_i l:\partial_j l\rangle$ は計量テンソル $g_{ij}(\theta)$ である。

関数 $A(x)$ の集合： $T^{(1)}=\{A(x)\mid A^i\partial_i l(x,\theta):l(x,\theta)\ (=\log w(x,\theta))\}$ を考えると，T の要素である $A(x)$ の期待値 は $E[A(x)]=0$ となる。

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

多様体 M から新しい $\tilde{M}$ に確率変数を変換するとき，距離と接続で規定された幾何学構造が共形となる要請；

$$<A;B> = \mathrm{const.}<A;B>_\alpha \quad (\text{距離}) \tag{4}$$

$$<\nabla^{(\alpha)}{}_A\ B;C> = \mathrm{const.}<\nabla^{(\alpha)}{}_A\ B;C>_\alpha \quad (\text{接続}) \tag{5}$$

を置く。　ここで α 期待値：$< \quad >_\alpha$ は $l(x,\theta)$ を $S[w]$ で置換した集合 $T^{(1)}$ の要素 $A(x)$，$B(x)$ に関する期待値，

$$<A;B>_\alpha = \int A(x)B(x)\,[w(x,\theta)]^\alpha dx \tag{6}$$

によって定義される。

要請 (4)(5) から $S[w]$ の関数形は

$$S[x] = \begin{cases} \dfrac{2}{1-\alpha}\ w^{\frac{1-\alpha}{2}} & (\alpha \neq 1) \\ \log\ w & (\alpha = 1) \end{cases} \tag{7}$$

と決定され，α と D の間には次の関係式が成立する：

$$\frac{1-\alpha}{2} = 1 + D \tag{8}$$

結果 (7) と (8) は，関係式 $w(x,t) = \Phi(x,t)/N$ (規格化因子) に注意すると，局所的表現による (2) の再定式化になっている。

Dを τ でパラメター化した動的スケリーング因子 $D(\tau)$ に拡張した場合，関係式 (8) は α を$\alpha(\tau)$ に置換した同様な関係式によって決定されることが分かる。 このとき，M は 2+1次元の多様体，$D(\tau)$ は 2+1次元曲面を特徴づける $\alpha(\tau)$ 接続として理解される。 すなわち，Φ と S との関係式は $\alpha(\tau)$ 接続によって

$$S(x,t) = S_0(\tau) + \frac{k_0 R_0}{1+D(\tau)}\,[\Phi(x,t)]^{1+D(\tau)} \tag{9}$$

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

と表される。 ここで，$S_0(\tau)=-(k_0R_0/1+D(\tau))\delta_{1+D(\tau),0}$ である。
結局，要請(4)(5)により S の汎関数形は べき関数（ $1+D(\tau)\neq 0$ ）と対数関数（(9)の極限：$1+D(\tau)\to 0$ ）で決定される。また スケーリング因子 $D(\tau)$ (>0)には $\alpha(\tau)$ 接続(<0)が対応していることが分かる。

ところで，記憶・学習をシステムの構成要素がスケーリング則で活性化されたパターンとして保持されたものと考えれば，以上の議論から生体システムが行う情報処理の問題は2+1 次元曲面の性質に還元される。 この意味で，刺激－応答の関係が行動レベルに現れる動物の摂食行動の問題は重要である[4]。また Riemann-Liouville 積分[5]による非整数回微積分の定義式を 入出力関係を規定するマシーンとしてみると，非整数回を表すインデックスを α 接続と関係ずけることができる。また，地震の問題において，本稿の立場で地殻を複雑なシステム構成であるとみると，断層破壊における $1/f^{\beta}$ $(\beta>1)$ のスペクトル解析[6]は パラメター空間の曲面を規定するスケーリング因子を知る一つの有力な手段となるであろう。

参考文献

1) L.E.Marks :Sensory Processs-The New Psychophysics. 1974, Academic Press
2) S.P.R.Rose :Models of Brain Function(ed.by R.M.J.Cotterill) 1989, Cambridge Press.
3) S.Amari :Differential-Geometrical Methods in Statistics. Springer. 1985
4) 嶋田一郎，川添良幸，原　啓明：動物生理 6 (1989), 101
5) C.Maccone :Nuove Cimento 61B (1981),229
6) 小山順二，原　啓明：地震 42 (1989),1; 42 (1989) 475
原　啓明，小山順二：統計数理（投稿中）

NII-Electronic Library Service