

球面上のネットワークパターン形成

統計数理研究所

種村 正美

はじめに

非ユークリッド空間である球面におけるパターンにはユークリッド平面におけるパターンの問題とは異なった側面が現れ、種々の分野への応用が考えられる興味深い研究課題である。ここでは、球面におけるネットワークパターンの問題を考察する。この問題は多面体の上でのネットワークとトポロジカルには同等である。多面体の上のネットワークや球面上の配置の問題は Fejes Tóth (1972) によって規則パターンに対して論じられているが、われわれの目的はそれらを不規則な配置に対して議論し、その応用を考察することである。

球面の幾何学・三角法・ネットワーク

単位球面（半径 1 の球面）上の点の配置を記述するために、まず、二点間の球面距離の定義を与える。単位球面上に存在する二点 A, B の球面距離 $d = d(A, B)$ は A, B を結ぶ大円 AB の弧（すなわち、球中心を中心として A, B を通り、 A, B を結ぶ円弧の内側で小さい方の弧）の長さによって定義される。これは、球中心を始点とし、球面上の点を終点とする単位ベクトルを用いると好都合である。つまり、 A, B に対応する単位ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}$ とすると球面距離 d は $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos d$ の関係で与えられる。言い換えると、 d は単位ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の成す角 (radian) である。

次に球面上の三点 A, B, C に関する幾何学、すなわち球面三角法を考える。球面三角形 $\triangle ABC$ は大円 AB, BC, CA で囲まれた球面上の領域である。頂点 A, B, C における角をそれぞれ α, β, γ とし、上と同様に A, B, C にそれぞれ単位ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を対応させると、たとえば $\cos \alpha = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) / |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{a} \times \vec{c}|$ が成り立つ。これは球面余弦定理に相当する。その他の球面三角法の定理なども単位ベクトルを用いて表わしておくと、解析幾何学的に計算が実行できるので都合がよい。

さて、球面三角形 $\triangle ABC$ の面積 δ は $\delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ となることが球面二角形（三角形ではない）の面積の差し引き計算から比較的容易に導かれる（Fejes Tóth, 1972, 第 1 章）。これから、一般に球面 p 角形の面積 F に対する公式

$$F = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p - (n-2)\pi \quad (1)$$

も導ける。ここで、 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ は内角を表わす。式 (1) を用いると、球面を凸多角形に分割する球面ネットワークに対する Euler の定理が直ちに得られる。いま、球面ネットワークの面数を n 、辺数を e 、頂点数を v とすると、これらの間には $n - e + v = 2$ という Euler の定理が成り立つ。すなわち、球面多角形の面積の和が 4π であることと (1) 式とからこの定理が得られるのである。次に、単位球面を $n (\geq 3)$ 個の等面積の凸部分に分割するネットワークの総辺長を L_n とおくと次式が成り立つ：

$$L_n \geq 6(n-2) \cos \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) \equiv \lambda_n. \quad (2)$$

ただし、等号は $n = 4, 6, 12$ の球面正多面体に対してのみ成立する。この不等式は、球面分割ネットワークあるいは球面上の配置の規則性を計る上で一つの目安を与える。われわれは (2) 式を後で利用する。

球面上の点配置と球面 Voronoi 分割

平面上に与えられた点配置に対して、Voronoi 分割が一意的に定まり、平面の分割ネットワークが得られるのは周知であろう。この対応は、平面上のネットワークモデルを簡便に構築するのに好都合であり、種々の応用が考えられる（例えば、Hasegawa & Tanemura (1976), Tanemura & Hasegawa (1980)）。

球面上においても同様の対応によって球面分割ネットワークを構築することを考えよう。ただし、この場合、所与の球面上の点配置に対して球面 Voronoi 分割が一意的に定まるとは自明ではないが前節に述べた幾何学を適用

研究会報告

することによって証明できる。また、球面分割は平面分割と異なって境界条件に対する考察が不要であり、この意味で計算プログラムの構造はより単純である。

このようにして作った球面分割ネットワークの一例として、図1に球帽（球面上の円）のランダム逐次完全充填に対する Voronoi 分割を示す。図は紙面に平行な大円を赤道とする半球部分の正射影を表わす。

放散虫の骨格構造と球面ネットワーク形成モデル

次に、海底に生息する放散虫の骨格構造を説明するモデルを考察する。放散虫の骨格は多角形による球面分割の構造を示しており、各多角形の面積がほぼ等しく大多数が六角形となる特徴を持っている（図2参照）。このデータは Tarnai(1989) から採用した。この構造の形成過程では、球面ネットワークがある種の最適性を満たすように形成されていると考えることができる。すなわち、骨格の成長と共に構造的安定性を獲得するために次第に球面多角形が互いにできる限り六角形に近づき、しかもできる限り等しい面積になるように変形していったものと考えられる。そのような構造は上述のランダム逐次充填の球帽系に対する Voronoi 分割ネットワークでは得られないことは例えば図1との比較から明白である。そこで、球面上の点系のある初期配置から出発して徐々に位置を調節することによって上記の配置を実現する新しい幾何学モデルを提出する。

われわれは以前、平面上の棲息地における動物のなわばり形成に対して幾何学モデルを提出した (Hasegawa & Tanemura (1976); Tanemura & Hasegawa (1980))。このモデルを球面上に拡張して説明するために、いま、ある時刻 t における球面上のある点 $x(t)$ に対する Voronoi 多角形の頂点を巡回的に $A_1, A_2, \dots, A_k$ で表わし、これらに対応する（球中心を始点とする）単位ベクトルをそれぞれ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ で表わす。ここで k はこの多角形の辺数である。そのとき、なわばり形成の幾何学モデルの球面上への拡張版は次の時刻 $t+1$ のこの点の位置 $x(t+1)$ を

$$x(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^k \vec{a}_i}{|\sum_{i=1}^k \vec{a}_i|} \quad (3)$$

と置き、すべての点に対して得られた新しい配置に関する Voronoi 分割を時刻 $t+1$ における分割とするモデルである。これを調節モデル I と呼ぶ。ここで上式の分母は新しい点 $x(t+1)$ が再び単位ベクトルとなることを保証している。調節モデル I によれば、 $x(t+1)$ は $x(t)$ に較べて多角形の中央に位置するようになり、各点が互いに等間隔に分布する配置が得られることが予想される。ところが、シミュレーションでは図2のような規則的なパターンは得られなかった。そこで、(3)式の代わりに

$$x(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^k \vec{a}'_i}{|\sum_{i=1}^k \vec{a}'_i|} \quad (4)$$

と置くモデルを考える。但し、 $\vec{a}'_i$ は頂点 $\vec{a}_i$ を $\triangle \vec{a}_{i-1} \vec{a}_i \vec{a}_{i+1}$ と面積の等しい二等辺三角形 $\triangle \vec{a}_{i-1} \vec{a}'_i \vec{a}_{i+1}$ に仮想的に置き換えた頂点である。(4)式を用いるモデルを調節モデル II と呼ぶ。報告では、二つの放散虫データに対して調節モデル II のシミュレーション結果がそれぞれ統計的に極めてよく一致することを述べた（図3参照）。ここでは、まず n として二つの放散虫データからそれぞれ $n = 272, 620$ と設定した上で、初期配置をランダム（Poisson）点配置とし、シミュレーションを停止させる最終の $t = T$ として $T \sim 1000$ または直前の位置からの変位（換算距離）が計算機イブシロンのオーダー（ $10^{-10} \sim 10^{-15}$ ）となる T を選んだ。

また、われわれのネットワーク形成モデルは一般的に任意の n に対する最適点配置を簡便に得る方法としても有効であることも報告で指摘した。それを示すため種々の $n (= 10 \sim 50)$ に対して調節モデル II のシミュレーションを上記と同様の方法で行った。(2)式に与えたネットワークの全長に対する評価を用いるため L_n を t に対してプロットすると、多くの場合、ある程度以上の t に対して L_n が一定値に落ち着き、その値は(2)式の λ_n にかなり近いこと、特に $n = 12$ の場合はすべての試行において正確に $\lambda_{12} = 60 \cos(\pi/15\sqrt{3}) = 21.8918 \dots$ に一致することが実験的に示された。また、 $n = 12$ に対する最終配置としてすべて球面正12面体を得られた。

所与の n に対して球面上の各点が互いにできるだけ等間隔以上離れるような配置は、単に球面の緯度と経度をそれぞれ等分割して得られるわけではない。「球面上の格子点配置」とも呼ぶべきそのような配置が必要な実際問題としては、球面状の建築物の建設や、地球上の定点観測点の設置などが考えられる。このような問題においても、われわれのネットワーク形成モデルは有用であろう。

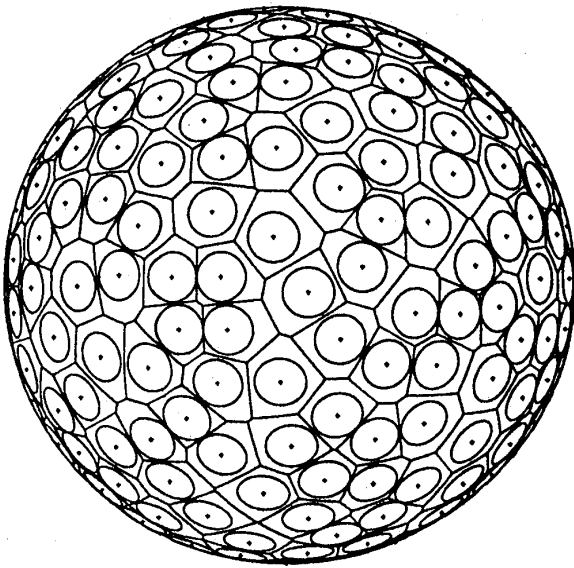
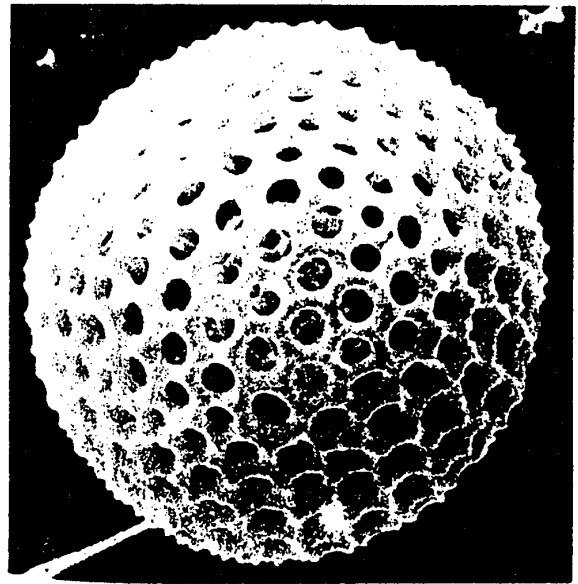


図1: ランダム逐次完全充填と Voronoi 分割の一例。



(a)

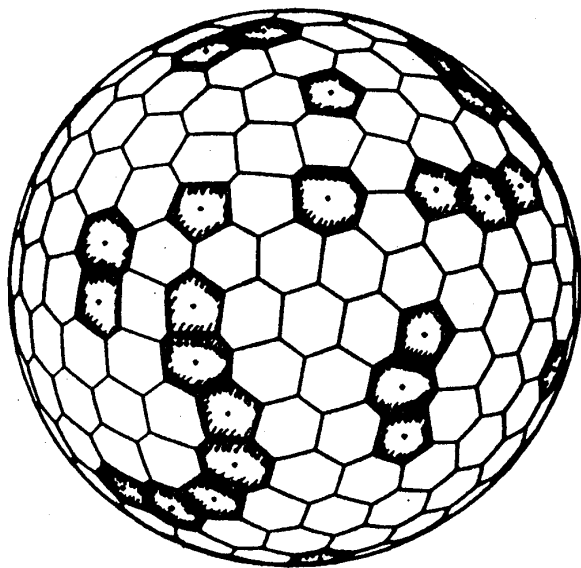
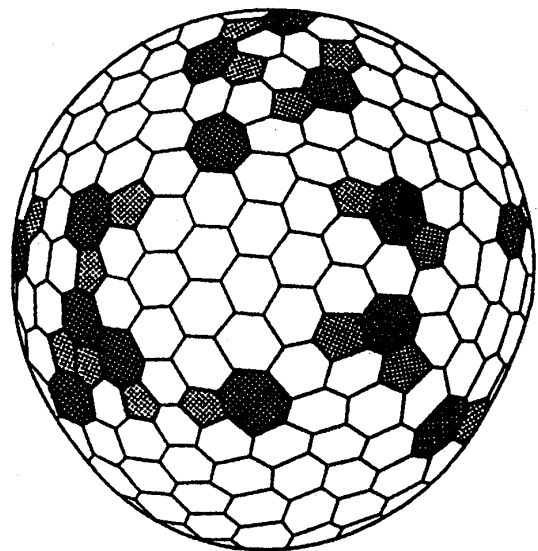


図3: 調節モデルIIによる分割ネットワーク (印のある多角形は5,7角形; その他は6角形)。



(b)

図2: 放散虫の骨格の電顕写真(a)と多角形ネットワーク(b)。

文献

- Fejes Tóth, L. (1972) "Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum", Springer; 『配置の問題 — 平面、球面および空間における』 (みすず書房) .
- Hasegawa, M. and Tanemura, M. (1976) On the pattern of space division by territories. *Ann. Inst. Statist. Math.* **28B**, pp.509-519.
- Tanemura, M. and Hasegawa, M. (1980) Geometrical models of territory. I. — Models for synchronous and asynchronous settlement of territories. *J. Theor. Biol.* **82**, pp.477-496.
- Tarnai, T. (1989) Buckling patterns of shells and spherical honeycomb structures. *Computers Math. Appl.* **27**, pp.639-652.