

共鳴外力系における界面の運動

京大基研 水口毅

振動媒質に周期外力をかけた系は、パラメータによって双安定的あるいは振動的などの様々な性質を持つことが知られている。ここでは、特に双安定的な場合に見られる界面の様々な運動を現象論的に報告する。

1.1 モデル方程式

自然な振動数 ω_0 を持つ振動媒質に、ほぼ 2 倍の振動数 ($\omega_e = 2(\omega_0 + \Delta)$, $|\Delta| \ll 1$) の周期外力をかけた 1 次元系を考え、物理量 Q が $Q = W e^{i(\omega_0 + \Delta)t} + c.c.$ で表されるように複素振幅 W を導入する。この時、 W の従う方程式は以下のようになる。

$$\dot{W} = (1 + ic_0)W + (1 + ic_1)\partial_x^2 W - (1 + ic_2)|W|^2 W + \gamma W^* \quad (1.1)$$

ただし、 c_0, c_1, c_2 は実数パラメータ、 $\gamma > 0$ は外力の強さを表し、 W^* は W の複素共役を表す。また、振動数のずれ Δ は $\Delta = c_2 - c_0$ で与えられる。付加項 γW^* のため、複素 G L 方程式の持っていた W の位相に対する連続的な並進対称性は失われているが、変換 $W \rightarrow W e^{i\pi} = -W$ に対する離散的な対称性は保たれている。

1.2 一様状態の解析

方程式 (1.1) の散逸項を無視することにより、一様状態の解析を行なう。 $\dot{W} = 0$ とし、固定点を $W_0 = A_0 e^{i\phi_0}$ とし、固定点及びその線形安定性を求めた。その結果、条件

$$\begin{cases} \gamma^2 > \Delta^2 / (1 + c_2^2) & \text{if } c_2 \Delta < (1 + c_2^2)/2; \\ \gamma^2 > (1 + (2\Delta - c_2)^2)/4 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.2)$$

が満たされている場合に、2 個の安定固定点 $\pm A_0 e^{i\phi_0}$ が存在する。ただし、 A_0, ϕ_0 は次の式で与えられる。

$$A_0^2 = 1 + \gamma \cos 2\phi_0$$

$$\cos 2\phi_0 = \frac{1}{\gamma(1 + c_2^2)}(-c_2 \Delta + \sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2}), \quad \sin 2\phi_0 = \frac{1}{\gamma(1 + c_2^2)}(-\Delta - c_2 \sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2})$$

以下の議論では双安定性、すなわち (1.2) を仮定する。

2.1 Ising 型、Bloch 型、振動型界面

双安定な場合に空間的に広がった系を考えることにより、界面を論ずることができる。空間が 1 次元の場合、すでに知られている単独界面のタイプには、大きく分けて Ising 型、Bloch 型、振動型の三種類がある。

(i) 非変分効果がない場合：

$c_0 = c_1 = c_2 = 0$ の場合には、(1.1) はポテンシャル系となり、変換 $W \rightarrow -W$, $x \rightarrow -x$ に対して不変な Ising 型界面 (2.1a) と、そうでない Bloch 型界面 (2.1b) の 2 種類の解析解が知られている。

$$W_I(x) = \pm \sqrt{1 + \gamma} \tanh \sqrt{(1 + \gamma)/2} x \quad (2.1a)$$

$$W_B(x) = \pm \sqrt{1 + \gamma} \tanh \sqrt{2\gamma} x \pm i \sqrt{1 - 3\gamma} \operatorname{sech} \sqrt{2\gamma} x \quad (2.1b)$$

(ii) 弱い非変分効果がある場合：

$|c_0|, |c_1|, |c_2| \ll 1$ の時に Ising 型は動かないが、Bloch 型は一定速度でドリフトすることが示されている (Figure 1 参照)。

(iii) 強い非変分効果がある場合：

この場合には、Ising 型、Bloch 型の他に、様々なタイプの周期的に振動する界面も確認されている (Figure 2 参照). 我々はこの振動型の界面を特徴づけるために、 $\chi(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} W(|W_0|^2 - |W|^2) dx$ を導入し、アトラクターの断面を見ることによって、異なるタイプの間の分岐のタイプを明らかにした.

2.2 単独界面のカオティックな運動

単独界面が、上述のような様々な形の振動状態を実現することから、そのカオティックな運動も期待される. twisted boundary condition による数値実験で単独界面の運動を追跡し、 $A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |W|^2 dx$ の時系列から FFT によってスペクトルをとる方法をとった. その結果、スペクトルがブロードに広がっているパターンを発見した (Figure 3 参照).

2.3 時空間欠的な発展

振動数のずれ Δ を大きくすると、例えば、パラメータ $(c_0, c_1, c_2, \gamma) = (1.54, -0.5, 1, 0.4)$ においては、界面の分裂による増殖と対消滅による複雑な時空間パターンを得ることができる (Figure 4 参照). このパターンは、減衰型 KS 方程式や、結合写像系、セル・オートマトンなどで報告されている時空間欠的なパターンと酷似しており、転移点近傍で、スケーリングが巾に従うことが予測される. 条件 $(||W(x, t)| - |W_0||)/|W_0| < \delta = 0.1$ が満たされる部分を laminar 領域、それ以外を turbulent 領域として、時空間パターンにおける laminar 領域の分布のヒストグラムを得た. 転移点から遠いところ ($c_0 = 1.54$) では指数分布に良くのっているが、転移点近傍 ($c_0 = 1.378$) では、指数分布よりは巾分布に近い.

2.4 界面の集団振動現象

複数の界面が関与するもう一つの興味深い現象として、界面の集団振動現象がある. 例えば、パラメータを $(c_0, c_1, c_2, \gamma) = (2.2, 0.5, 1, 1)$ とすると、単独では Ising 型の界面 (十分遠方にある場合の相互作用は引力) だが、近くに来ると束縛振動状態を作る (Figure 5 参照). 3 個以上の束縛状態も可能だが、ぶつかるタイミングによっては、3 個 $\rightarrow$ 1 個などのように消滅してしまう.

2.5 時空間パルス

一樣状態の安定固定点と不安定固定点が極めて接近している場合一種の励起 (時空間的に局在しており、時空間パルスと呼ぶ) が見られる (Figure 6 参照). この励起は有限振幅の擾乱に対して起こり、界面对に成長することもあるが、周辺に擾乱を残して消えてしまう. しかし、それによって新たな励起が引き起こされ、結果として時空間的なパターンを作る. 初期条件を適当にとることにより、時空間パルスのみの状態を作ることできるが、0 の回りのランダムな初期条件からだと、界面解と共存する. 時空間的な周期パターンに緩和すると思われるが、詳しい解析はまだ行なわれていない.

今後は、相図の作成および空間を 2 次元以上に拡張した場合の界面の運動を研究する予定である.

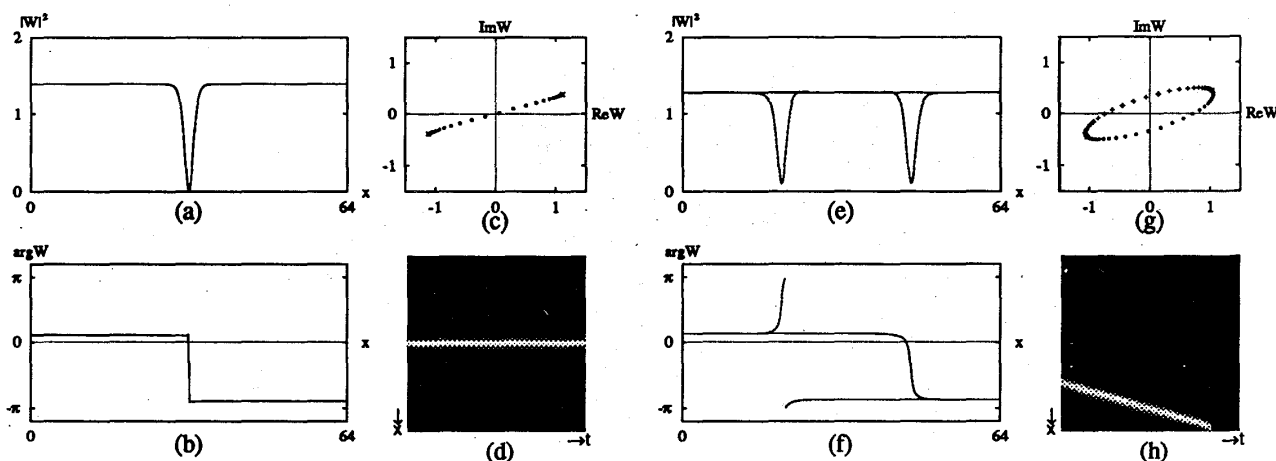


Figure 1: 非変分効果が弱い場合の Ising 型界面(a)~(d) と Bloch 型界面(e)~(h). (a)(e) 振幅, (b)(f) 位相, (c)(g) W 平面への投影で, いずれも $T = 100$ でのスナップショット. (d)(h) は $T = 100$ から $T = 200$ までの振幅の絶対値の時空パターンで, 黒いところは $|W|$ が大きく, 白いところは $|W|$ が小さい. 初期条件は系の中央に単キンクが来るように選んだ. $(c_0, c_1, c_2) = (-0.15, -0.1, 0.1)$ は共通で, Ising 型が $\gamma = 0.5$, Bloch 型が $\gamma = 0.4$. ただし, (e)(f) の実線及び (g) の●印は (h) の時空パターンの $T = 100$ に対するスナップショットであり, (e)(f) の点線及び (g) の+印は乱数を変えて異なる初期条件から出発したものである. 後者は逆方向に動く.

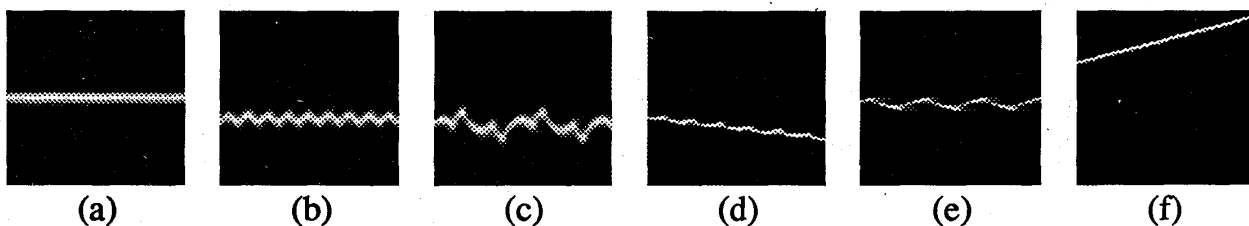


Figure 2: 非変分効果が強い場合の様々なタイプの界面. いずれも $T = 100$ から $T = 200$ までの振幅の絶対値の時空パターンで, 表示方法は, 図 1 の (d)(h) と同じ. 時間は左から右へ進む. $(c_0, c_1, c_2) = (1, -0.5, 1)$ が共通で, γ が, (a)0.28, (b)0.24, (c)0.2, (d)0.18, (e)0.09, (f)0.06. 初期条件は単キンク. システムサイズは (a)~(c) が 64 で, (d)~(f) が 256.

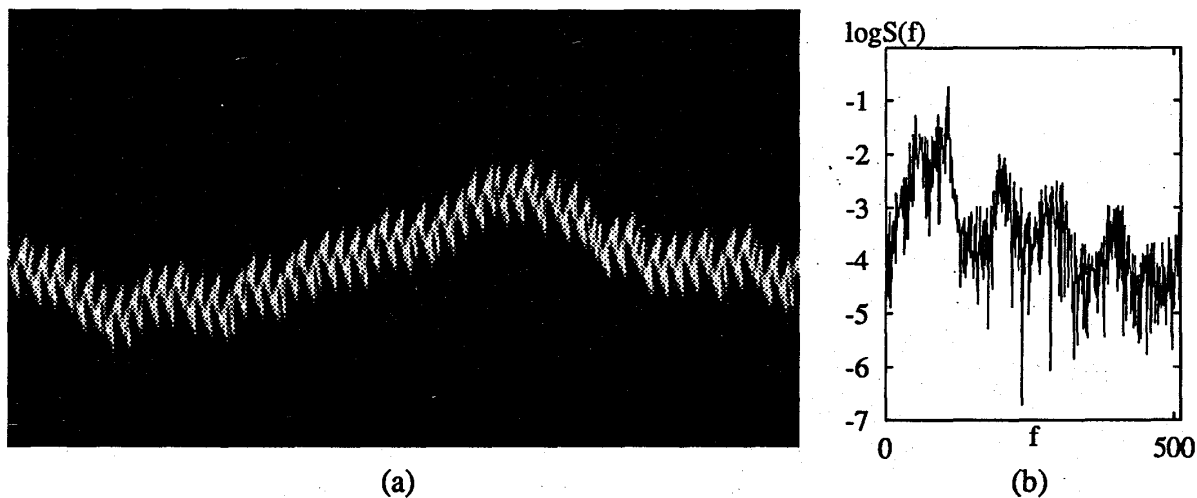


Figure 3: 単独界面のカオティックな運動. (a) $T = 500$ から $T = 1500$ までの時空パターンと (b) $A(t)$ のフーリエスペクトル. $(c_0, c_1, c_2, \gamma) = (1.6, -0.5, 1, 0.6)$. 時間は左から右へ進む. 初期条件は単キンク. システムサイズは 100.

研究会報告

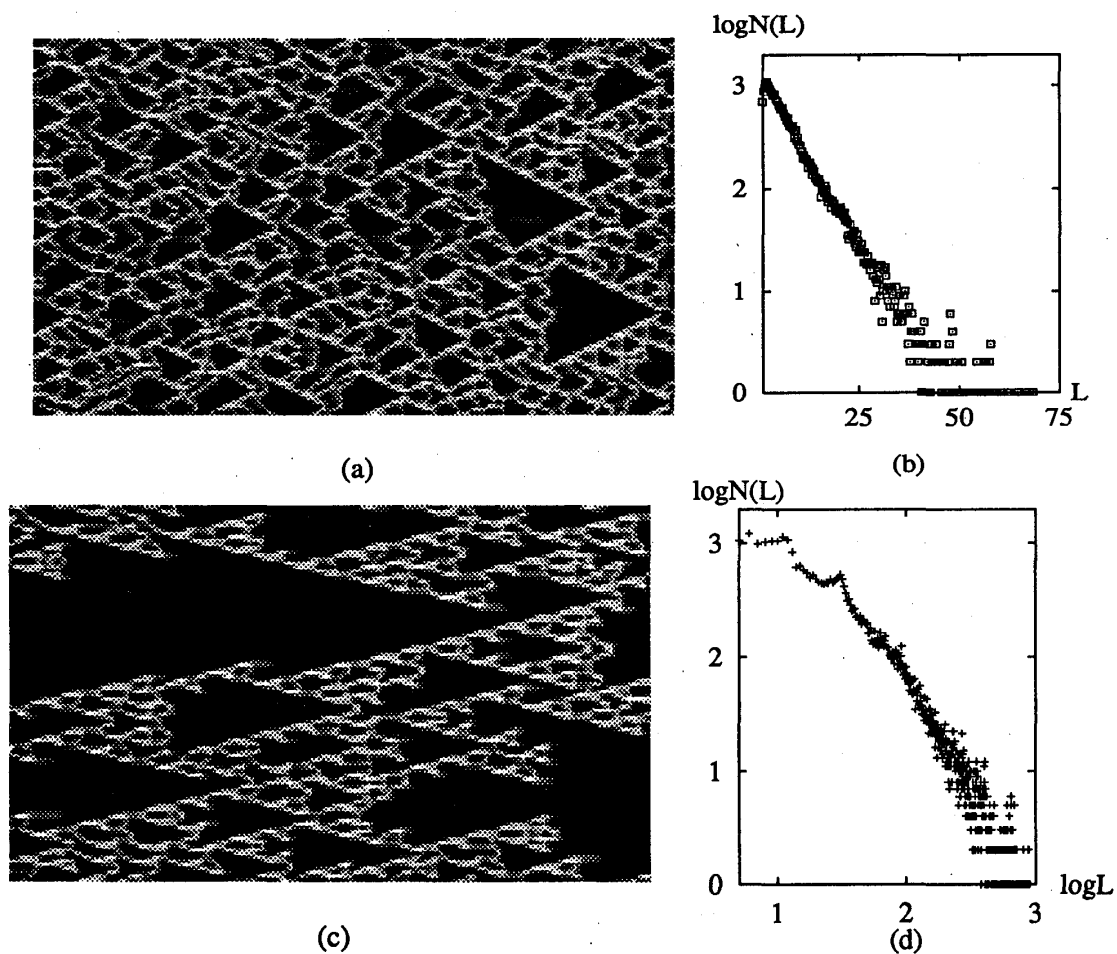


Figure 4: 時空間欠的な発展. 時空間パターン(a)(c)とlaminar領域のヒストグラム(b)(d). (a),(b)は $(c_0, c_1, c_2, \gamma) = (1.54, -0.5, 1, 0.4)$. (c),(d)は $(1.378, -0.5, 1, 0.4)$ で、転移点近傍. 初期条件は $W = 0$ に微小な擾乱を加えた. 時空間パターンはシステムサイズ1000のうち250だけ, $T = 1000 \sim 1500$ のうち $T = 1000 \sim 1200$ だけを表示.

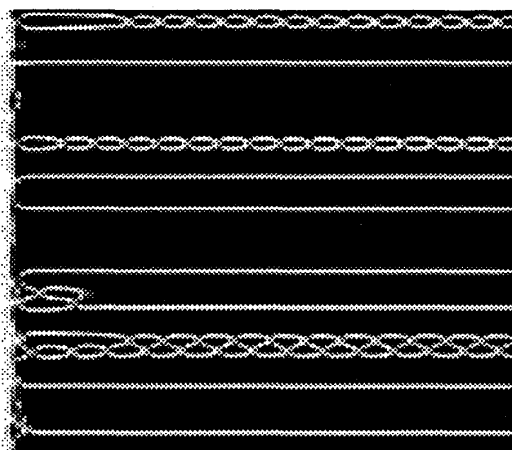


Figure 5: 界面の集団振動現象の時空間パターン ($T = 0 \sim 200$). $(c_0, c_1, c_2, \gamma) = (2.2, 0.5, 1, 1)$. 初期条件は $W = 0$ に微小な擾乱を加えた. システムサイズは200.

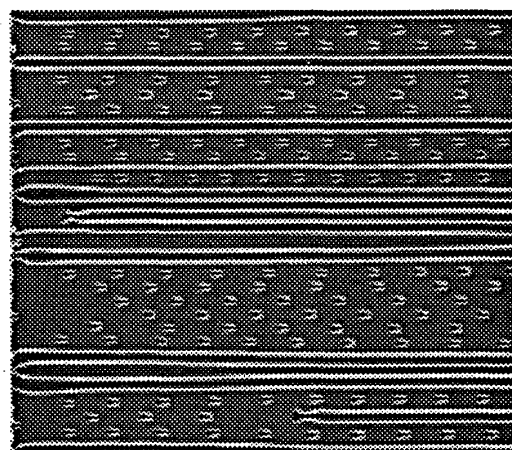


Figure 6: 時空間パルスと界面の時空間パターン ($T = 0 \sim 500$). $(c_0, c_1, c_2, \gamma) = (0.6, -1, 1, 0.283)$. 初期条件は $W = 0$ に微小な擾乱を加えた. システムサイズは400.