光学における幾何学位相と量子相関

北野 正雄

京都大学工学部電子工学科

1 あらまし

1900年のPlanckの例を持ち出すまでもなく，光は量子論の発見やその理解の深化に大きく役立ってきた素材である．

近年再び，光を用いた量子論の基礎に関する実験が盛んに行なわれるようになってきた．実験技術の向上で，従来思考実験に過ぎなかったものが実際に行なえるようになったこと，また逆に技術の向上が量子論の微妙な部分の理解を必要としはじめたことなどが，その動機となっているようである．

ここでは，2つの例を取り上げたい．前半で光学の分野にあらわれる様々の幾何学量子位相 (Berry位相) について概説する．後半では，パラメトリック効果で発生する光子の対が示す量子相関について述べる．量子相関に起因する一見奇妙な干渉現象の初等的な解釈を行なう．

2 幾何学的量子位相

1984年の論文 [1] で、Berryは量子系のパラメータを断熱的に変化させてふたたび元へ戻したとき、波動関数に余分の位相が付加されることを指摘した．そして、この位相がパラメータ空間での変化の経路に沿った線積分あるいは経路が囲む面に関する面積分として表されることを示した．Berryはこの位相を幾何学的量子位相と名付けたが、一般にはBerryの位相と呼ばれている．

この発見をきっかけにして、Berryの位相に関するおびただしい数の論文が出版されている．特徴的なことはその分野が非常に多岐にわたっていることである．本稿で述べる光学の分野のみならず、力学、流体力学、分子・原子・原子核物理、相対論、固体物性、場の理論、電離層物理など枚挙に暇がない．これは、Berryの位相の普遍性の現れだと考えられる [2].

Berryの位相は非常に普遍的で有効な概念であり，最近は量子力学の教科書でも取り上げられるようになってきた．また，最近Y.-S. M. Wuらは，$H+H_2 \to H_2+H$ の反応断面積の計算において，従来, Berryの位相が無視されていたため，実験との不一致が目立っていたことを指摘した.[3]

さて、光学の分野では以下のような場合にBerryの位相が現れることが知られている [4].

1. 光ファイバーや鏡を用いて光の $\boldsymbol{k}$-ベクトルを変化させた場合 [5–7]. この場合、パラメータ空間は $\boldsymbol{k}=$ const の球面である.
2. 損失のない偏光素子 (波長板、回転素子) で偏光状態を変化させたとき．およそ30年前にPancharatnum [8] が異なる偏光の干渉の研究に関連して見いだしていたのが再発見された．この位相はポアンカレ球と深い関係がある.
3. 損失のある偏光素子 (偏光板) で偏光状態を変化させたとき [9]. この場合ポアンカレ球に代わって2葉双曲面が重要な役割をはたす.
4. 光子をsqueezeしたとき．Chiaoら [10] によって提案されているが実験的にはまだ実現されていない.
5. レーザビームを収束させた場合．Gauss (-Hermite) ビームは焦点付近でGüoy効果と呼ばれる位相変化を示す．Simonら [11] によって幾何学位相との関連が示された.
6. ランダムな屈折率を持つ媒質中の光伝搬.[12]

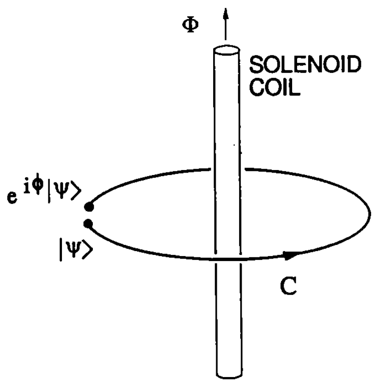

図 1: アハラノフ・ボーム効果

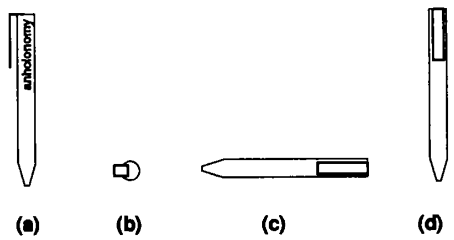

図 2: ペンの非ホロノミー

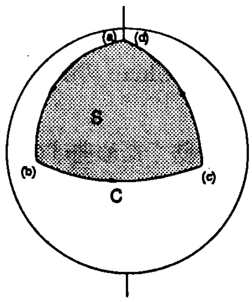

図 3: ペンの軌跡

3　非ホロノミー

系のパラメータを一巡したとき元へ戻らない量が存在する状況は非ホロノミー (anholonomy、非可積分性) と呼ばれる. 電磁場に関するゲージ構造は非ホロノミーの典型である. アハロノフ-ボーム効果 [13] において、無限長ソレノイドの回りを一巡した荷電粒子の波動関数は位相シフト

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{e}{\hbar c}\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (1) \\ &= \frac{e}{\hbar c}\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = e\Phi/\hbar c \end{aligned}$$

を受ける. ここで、e は電荷、Φ はソレノイドの磁束、$\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャルであり、積分はそれぞれ荷電粒子の軌跡 C およびそれに囲まれた面積 S に関して行なう (図 1).

非ホロノミーのもっと身近な例を、簡単な机上実験で示そう. 図 2(a) のようにペンをそのクリップが左になるように垂直に立てる. 次にペン先を中心にして手前に倒す (b). やはりペン先を中心に水平面内で反時計回りに 90° 回転させる (c). そしてペンを立てて元の状態に戻す (d). ペンはもとの位置に戻ったにも拘らずクリップはペン軸の回りに 90° 回転している. つまり非ホロノミーが現れている.

回転角 θ はペン尻が描いた閉路 C が張る立体角$\Omega(\mathrm{C})$に等しい (図 3). つまり、

$$\theta = \Omega(\mathrm{C}) = -\int_{\mathrm{S}} (\boldsymbol{R}/R^3)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \qquad (2)$$

と書ける. ここで、$\boldsymbol{R}$ はペンを表すベクトルである. このような回転を幾何学的回転とよぶことができる. 注意することは、一連の操作においてペン軸を軸まわりに積極的に回転したことはないにも拘らず、結果として軸の回転が得られたことである. このような非回転性の操作は幾何学の言葉を借りて “平行移動” (parallel transport) とよばれる.

上の式 (2) を式 (1) と比較すると、原点に磁荷 $-\hbar c/e$ をもつ磁気単極をおいた場合のアハラノフ-ボーム効果に対応づけることができる. このような仮想的な磁場 (ベクトルポテンシャル) を考えることは有効なので幾何学的位相の議論ではしばしば導入される.

4　Chiao の実験

Berkeley の Chiao らは光ファイバーを用いて光子に対する Berry の位相を測定した [5].

前節のペンの例に合わせるため、図 4 のように 3 ケ所で直角に曲げられた光ファイバーを考えよう. ただし、歪

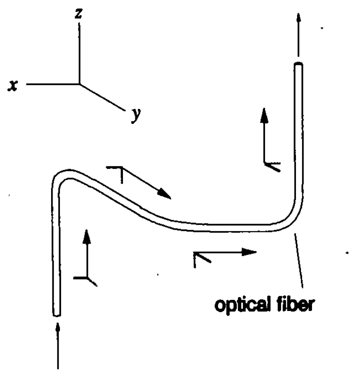

図 4: Chiao の実験

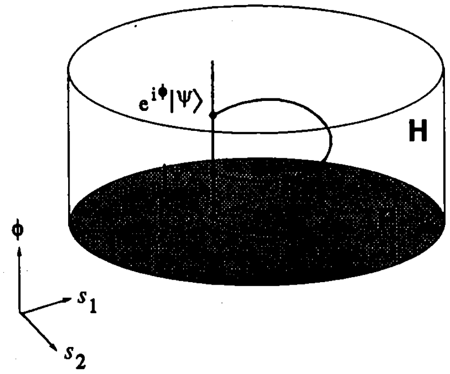

図 5: 状態空間のファイバー構造

みによる複屈折などを防ぐため曲げの部分は十分滑らかにしておく．下方から入射した光の $\boldsymbol{k}$-ベクトルは $z \to y \to -x \to z$ の順にゆっくり変化させられる．$\boldsymbol{k}$-ベクトルは球面上で図 3 と同様の閉路を描く．

入射偏光が x-方向に直線の場合を考えよう．出力の偏光が y-方向になることは図 4 中の矢印の根元の実線を追跡すれば明らかであろう．同様に破線を追えば y-偏光入射に対し、x-偏光が出てくることがわかる．これらから、このファイバーは偏光を 90° 回転させる回転素子になっていることがわかる．異方性媒質なしに旋光性が実現できているわけである．この回転角はファイバーの曲げ方の詳細、材質、コア径、波長などには無関係で、$\boldsymbol{k}$-ベクトルが球面上で描く閉路の立体角Ω(C) のみに依存する純幾何学的なものである．また、ファイバーの代わりに鏡で$\boldsymbol{k}$を変化させても同様の位相が得られる [6]．

ところで、よく知られているように光子はスピン 1 のボーズ粒子である．スピンの量子化軸は $\boldsymbol{k}$-ベクトル方向にとられ、$|m=+1>$ が右回り円偏光に、$|m=-1>$ が左回り円偏光に対応する．($m=0$ の不存在は光速で走る光の特殊事情である．) 旋光性は円複屈折すなわち左右円偏光に対する位相差と考えられるので、$\boldsymbol{k}$-ベクトルをファイバーで変化させることによって光子の状態は

$$|\boldsymbol{k}, m> \to e^{-im\Omega(C)}|\boldsymbol{k}, m>, (m=\pm 1) \qquad (3)$$

と変化したことになる．

一般に磁気量子数 m のスピン状態 $|m>$ を閉路 C に沿って動かすと$-m\Omega$(C) なる位相を獲得する [1]．この場合$-m\hbar c/e$ の大きさの “磁気単極” を考えればよいことがわかる．一方、磁気単極の大きさ g は Dirac の量子化条件 $g = N\hbar c/(2e)$ (N: 整数) [13] に従うが、上の仮想的磁気単極にこれをあてはめると、m は半整数でなければならないことがわかる．このように幾何学的考察により半整数スピンの存在が自然に導けることは大変興味深い．

5 状態空間のゲージ構造

前節の例を一般化しておこう [14]．量子力学において系の状態はヒルベルト空間 H の要素 (状態ベクトル) $|\psi>$ であらわされる．しかし、この表現には規格化 $<\psi|\psi>=1$ をおこなっても位相因子分だけの不定性がある．すなわち、$|\psi'>= e^{i\phi}|\psi>$ は $|\psi>$ と物理的には同じ状態を表している．このような 2 つの状態ベクトルは同じ密度行列をもつ．

$$\rho = |\psi><\psi| = |\psi'><\psi'| \qquad (4)$$

つまり、ベクトルの集合 $\{e^{i\phi}|\psi> \,|\, 0 \le \phi < 2\pi\} \subset$ H と密度行列ρは 1 対 1 に対応している．これを模式的に表したのが図 5 である．状態空間はちょうど霜柱のような構造をもっており、霜柱の一本一本が状態に対応している．このような状況は数学で言うファイバー束 [15] に対応している．同値な状態の集合をファイバー、密度行列ρの集合 P を基底集合、H をファイバー束と呼ぶことができる．

従来、状態ベクトルの位相因子の不定性は考える必要のないものであり、密度行列による記述にはこの不定性がなく好都合であると考えられてきた．しかし、Berryの位相はこの位相因子の不定性に深く関係しており、これから述べるように空間Hのファイバー構造の表象と考えられる．このように基本的な事象が量子力学の誕生以来、60年余りもの間殆んど気づかれずにいたのは、まったく不思議なことである．この事情は、Maxwell方程式のゲージ変換に対する認識とよく似ている．当初、ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$の不定性は単に面倒な問題と考えられてきたが、今日ではむしろ物理の基本原理として認識されている．

さて、隣接するファイバー間の関係(ファイバーの接続)を見るために、ある状態ベクトル$|\psi>\in$ H、および密度行列$\rho\in$ PのハミルトニアンHによる運動を考えよう．Hは2つの部分に分解できる．

$$H=H_{\rm d}+H_{\rm g} \tag{5}$$

この内、$H_{\rm d}$は$[H_{\rm d},\rho]=0$をみたし、ファイバーに沿った運動を表す．一方、$H_{\rm g}$はファイバーを渡る運動に対応する．このことはρの運動方程式

$${\rm i}\frac{\rm d}{{\rm d}t}\rho=[H,\rho]=[H_{\rm g},\rho] \tag{6}$$

から容易に理解される．つまり、$H_{\rm d}$はρの変化に寄与しない．

ここで便宜のためHに座標を導入する．ファイバーすなわちρを指定するための座標を$\{s_i\}$、各ファイバー上の座標をϕとする．すると、$H_{\rm g}{\rm d}t$による運動はP上の1形式(one form)

$${\rm d}\phi_{\rm g}=\sum_i A_i{\rm d}s_i \tag{7}$$

として表せる．また、$H_{\rm d}{\rm d}t$による位相変化は

$${\rm d}\phi_{\rm d}=-{\rm i}<\psi|H_{\rm d}|\psi>{\rm d}t=-{\rm i}<\psi|H|\psi>{\rm d}t \tag{8}$$

であり、動力学的位相と呼ばれる．

さてここで、時刻$t=0$に$|\psi(0)>$から出発して、時刻$t=T$に同じファイバーに戻ってくる運動を考える．つまり$|\psi(T)>={\rm e}^{{\rm i}\phi}|\psi(0)>$とする．この全移相量$\phi$は

$$\phi_{\rm d}=-{\rm i}\int_0^T<\psi|H|\psi>{\rm d}t \tag{9}$$

と

$$\begin{aligned}\phi_{\rm g}&=\int_C{\rm d}\phi_{\rm g}=\int_S{\rm d}({\rm d}\phi_{\rm g})\\&=\int_S\sum_{i>j}\frac{\partial A_i}{\partial s_j}{\rm d}s_i\wedge{\rm d}s_j\end{aligned} \tag{10}$$

の和になる．ここで、CはH内の軌跡$|\psi(t)>$ $(0\le t\le T)$をPに写像して得られる閉曲線、Sはその閉曲線で囲まれる曲面をそれぞれ表す$(C=\partial S)$．(10)式の変形にはストークスの定理: $\int_{\partial S}\omega=\int_S{\rm d}\omega$ (ωは微分形式）を用いた．ここで重要なことは$\phi_{\rm g}$がハミルトニアンHには直接依存せず、P上の経路Cのみによって決定されていることである．

各ファイバー毎に座標ϕの原点の取り方を

$$\phi\rightarrow\phi+\Lambda(s) \tag{11}$$

のように変えるとき、A_iは

$$A_i\rightarrow A_i+\frac{\partial\Lambda}{\partial s_i} \tag{12}$$

と変換される．しかし、このような変換をおこなっても$\phi_{\rm g}$は不変である(ゲージ不変性)．

なお、Berryが当初仮定した断熱条件は状態を一巡させるための一方法であって必須条件ではないことがこれまでの議論でわかる．

6　Pancharatnumの位相

前節の議論を光に対するもう一つのBerry位相に適用してみよう．状態空間Hとしてk-ベクトル一定の光の偏光状態を考える．このとき、密度行列の集合はポアンカレ球で表すことができる．ここで得られる幾何学的位相はPancharatnumの位相と呼ばれるものである．この位相は1956年Panchartnum[8]が異なった偏光間の干渉を研究して得たものであるが、Berryの位相として解釈できることが明らかになった[16]．

z軸方向に伝搬する光を考え、偏光状態の基底ベクトルとして直交する直線偏光$|x>$、$|y>$をとる．任意の偏光状態は

$$|\psi>=a_x|x>+a_y|y> \tag{13}$$

で表せる．ただし、$|a_x|^2+|a_y|^2=1$．この状態に対する密度行列はStokesのパラメータ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s} &= (s_1, s_2, s_3) \qquad (14) \\ &= (|a_x|^2-|a_y|^2, a_x a_y^* + a_x^* a_y, \mathrm{i}(a_x a_y^* - a_x^* a_y)) \end{aligned}$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \rho &= <\psi|\psi> = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+s_1 & s_2-\mathrm{i}s_3 \\ s_2+\mathrm{i}s_3 & 1-s_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}+\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{J} \qquad (15) \end{aligned}$$

と表せる．ただし、$\boldsymbol{J}$はパウリのスピン行列$\boldsymbol{\sigma}$を用いて$J_1=\sigma_z/2$, $J_2=\sigma_x/2$, $J_3=\sigma_y/2$と書け、交換関係

$$[J_i, J_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k \qquad (16)$$

をみたす．ϵ_{ijk}は反対称テンソルである．

$s_1^2+s_2^2+s_3^2=1$が成り立つから、密度行列の空間は単位球面と同一視できる．これがポアンカレ球である．極点($s_3=\pm1$)は左右円偏光を、赤道($s_3=0$)は直線偏光を、その他の点は楕円偏光を表す．また共役点($\boldsymbol{s}$と$-\boldsymbol{s}$)に対応する偏光は互いに直交している．

偏光状態は偏光素子を通過することで変化する．この場合、運動方程式は時間tの代わりに空間座標zに関するものになる．偏光素子としては、光の強度を保存するもののみを考える．

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}|\psi> = N|\psi> \qquad (17)$$

NはJones行列で$N=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{J}$と書ける．$B_1$、$B_2$はそれぞれ主軸が$x$軸、$x$軸から45°方向の位相板、$B_3$は回転素子に対応する．密度行列の運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{B}(z)\times\boldsymbol{s} \qquad (18)$$

となり、ポアンカレ球上の運動を与える．

さて、ポアンカレ球上の閉ループに関する幾何学的位相ϕ_{g}は，簡単な計算から，

$$\begin{aligned} \phi_{\mathrm{g}} &= 2^{-1}\int_{\mathrm{S}} s_3^{-1}\mathrm{d}s_1\wedge\mathrm{d}s_2 \\ &= 2^{-1}\int_{\mathrm{S}} \sin\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi \qquad (19) \end{aligned}$$

で与えられる．2番目の式は極座標で表したものである．容易に確かめられるようにs_3^{-1}は単位球面の面積要素である．つまり、ϕ_{g}はループが囲む球面の面積の半分になっている．この場合、光子はスピン1/2のように振舞う．

従来、ポアンカレ球は単に偏光を表すのに便利なパラメータ化の方法だと考えられてきたが、球の曲率は幾何学的位相を反映していたのである．

7 ローレンツ群

これまで述べてきたBerryの位相はいずれも球面に関連したものであった．したがって、これらは3次元回転群に関係した位相であるといえる．回転群の兄弟ともいえるローレンツ群に関連した位相の例[9]をここでは説明する．

不完全な直線偏光子の作用は直線偏光を基底にとると、

$$\begin{pmatrix} t_x & 0 \\ 0 & t_y \end{pmatrix} = t_a\begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa^{-1} \end{pmatrix} \qquad (20)$$

のようにあらわされる[17]．ここで、t_x (t_y)はx (y)成分に関する透過率である．この作用は等方的損失$t_{\mathrm{a}}=(t_x t_y)^{1/2}$と、その割合が$\kappa=(t_x/t_y)^{1/2}$で与えられる圧縮伸長の合成であらわされる．この面積を保存する圧縮伸長がローレンツ変換の特徴である．

さて、幾何的位相をみるためにここでは、図6を使おう．第1段階(図の1段目)で、猫の顔は横方向に伸ばされる．引き続いて45°、90°、135°方向に引き延ばしをおこなうと顔の形自体は元へもどっているが、全体は回転してしまっている．

前のペンの例と同じく一つ一つの操作は回転を含んでいないにも拘らず、全体として回転を生成しており、幾何学的回転と呼ぶことができる．

この結果は直線偏光子のみを用いて旋光性、すなわち回転子を実現できることを意味している．

ローレンツ変換の繰り返しにより生ずる回転はトーマス歳差運動として知られており、相対論的速度で軌道運動している電子と自由電子の磁気回転比の差を与える効果である．トーマス効果を正面から計算するとひどく複雑なものになるが、幾何学位相の考え方で非常に容易に捉えることができる．

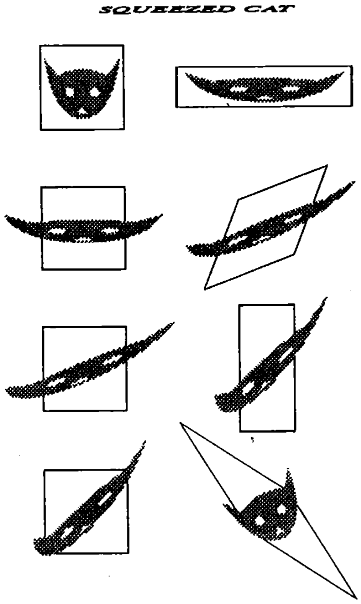

図 6: ローレンツ変換による回転

8 光子対の量子相関

本節以降, パラメトリック過程を用いて作られる光子対を例にとって, 1光子あるいは2光子状態に関する研究について解説する. とくに2光子状態の持つ非局所的相関について詳しく述べる.

このような少数光子の状態を記述するには, あまり使われることのない光子に対する シュレディンガー方程式 が便利である.

一般に電子の問題にはシュレディンガー方程式, 光子の問題には場の量子論が用いられる. これは, 光子数が物質との相互作用で容易に変化するためである. これに対し電子は日常的なエネルギーでは生成消滅はしないので, 粒子数を一定としたシュレディンガー方程式 で十分取り扱うことができる. (ただし, 素励起の問題では, 準粒子が生成消滅するので, 場の量子論が用いられる.)

場の量子論は粒子の生成消滅を扱え, しかも粒子数0の状態, すなわち真空状態も正しく扱える包括的かつ強力な理論である. しかし, 初学者にとっては理解しがたい処方箋の集まりのように受け取られる懸念がある. また内容の高度さに比べその表現が簡潔であるため, 皮相的理解や誤解を招く可能性も多い. とくに, 光子の波動的側面を読み取る際に問題は顕在化するようである.

そこで本稿では, 場の量子論の使用をあえて避け, 代わりに光子に対するシュレディンガー方程式 [18–20] を利用しようと思う. 光子のシュレディンガー方程式 はいろいろな場面で無意識のうちに利用はされているにも拘らず, 明示的に呼ばれることのない日陰者的存在である.

シュレディンガー方程式 を用いる場合は粒子数を問題に応じてアプリオリに与えなければならない. また, 実験では粒子数一定の状態の準備, 検出に工夫が必要である.

9 光の方程式

9.1 シュレディンガー方程式 と波動関数

マクスウェル方程式 から, (1つの) 光子にたいする シュレディンガー方程式 を導出してみよう. 自由電磁場にたいするマクスウェル方程式 (MKSA) は

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{B}' &= 0, &(21)\\ \mathrm{div}\boldsymbol{E} &= 0, &(22)\\ -\mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t}, &(23)\\ \mathrm{rot}\boldsymbol{B}' &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. &(24) \end{aligned}$$

ただし, $\boldsymbol{B}' = c\boldsymbol{B}$.

x-方向の平面波を考えよう. すなわち, $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B'_x}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0,\\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{1}{c}\frac{\partial B'_y}{\partial t}, & -\frac{\partial B'_z}{\partial x} &= \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t},\\ -\frac{\partial E_y}{\partial x} &= \frac{1}{c}\frac{\partial B'_z}{\partial t}, & \frac{\partial B'_y}{\partial x} &= \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t},\\ 0 &= \frac{1}{c}\frac{\partial B'_x}{\partial t}, & 0 &= \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}. \end{aligned}$$

となる.

よく知られているように, これらの方程式は2つずつ4つの組 (モード) に分けることができる. そのうちの2組は, B'_x, E_x に関するもので, それぞれ空間的に一様な静磁場, 静電場を表している. 残りの2組は (E_z, B'_y),

(E_y, B'_z) に関するもので，x-方向に伝搬する z-偏光，y-偏光のモードをそれぞれ表している．$(E, B') \equiv (E_z, B'_y)$ あるいは $\equiv (E_y, -B'_z)$ と定義すれば，それぞれのモードの方程式はいわゆる電信方程式になる;

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial B'}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B'}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{25}$$

電場，磁場の Fourier 変換

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E_k e^{ikx} dk,\ B'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B'_k e^{ikx} dk, \tag{26}$$

を導入し，さらに$\overline{B}_k \equiv \mathrm{sgn}(k) B'_k$ という量を導入すると，方程式は

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{B}_k}{\partial t} = i|k|E_k,\ \frac{1}{c}\frac{\partial E_k}{\partial t} = i|k|\overline{B}_k. \tag{27}$$

のようになる．ここで，$\mathrm{sgn}(k)$ は k の正負に応じて $+1$, -1 をとる関数である．[1]

式を 1 つにまとめるため，次のような量を導入する．

$$f_k \equiv \frac{1}{2iN(k)}(E_k - \overline{B}_k),\ g_k \equiv \frac{1}{2iN(k)}(E_k + \overline{B}_k). \tag{28}$$

$N(k) = N(-k)$ は規格化のための因子で，後で決定する．

$$\frac{1}{c}\frac{\partial f_k}{\partial t} = -i|k|f_k, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial g_k}{\partial t} = i|k|g_k. \tag{29}$$

$E(x)$, $B(x)$ が実数であることから，$f^*_{-k} = -g_k$, $g^*_{-k} = -f_k$ が成り立つので，上の 2 つの式は互いに複素共役であることがわかる．したがって，一方の式，たとえば f_k に関する式のみ考えればよい．

これは，$\hbar c|k| (= \hbar\omega_k)$ をハミルトニアン (エネルギー) H と見なせば，まさに運動量表示のシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(k) = H\psi(k) \tag{30}$$

の形をしている．[2]

[1] このような変数のとり方は，分散関係のω が正 (または負) の分枝を選んでいることに相当する．

[2] ここで，$\hbar$ を導入したことに関連して，以下のような反応が予想される．“もともと，$\hbar$ を含まない古典的なマクスウェル方程式 を無理に量子的な シュレディンガー方程式 に変形しようとするから，恣意的に $\hbar$ を導入しなければならないのである.” しかし，詳しく調べてみると，逆にシュレディンガー方程式 から$\hbar$ を消去できることがわかる [22]. (9.2節参照)

f_k を用いて E_k, $\overline{B}_k$ は，それぞれ

$$E_k = iN(k)(f_k - f^*_{-k}), \qquad \overline{B}_k = -iN(k)(f_k + f^*_{-k}), \tag{31}$$

と表すことが出来る．

f_k を波動関数と見なすためには，規格化因子 $N(k)$ を決めなければならない．そのために，電磁気学的エネルギー W_{EM} と量子力学的エネルギー W_{QM} を比較する．

W_{EM} は電磁界の全エネルギーで

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{EM}} &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int dx[E^2(x) + B'^2(x)] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int dx \int dk \int dk'(E_k E_{k'} - \overline{B}_k\overline{B}_{k'})e^{i(k+k')x} \\ &= \pi\varepsilon_0 \int dk(E_k E_{-k} - \overline{B}_k\overline{B}_{-k}) \\ &= 4\pi\varepsilon \int N^2(k) f_k f^*_k dk \end{aligned} \tag{32}$$

と書ける．一方，W_{QM} はハミルトニアン $H = \hbar c|k|$ の期待値として

$$W_{\mathrm{QM}} = \int f^*_k H f_k dk \tag{33}$$

のように書ける．これらを等置すると，

$$N(k) = \sqrt{\frac{\hbar c|k|}{4\pi\varepsilon}} \tag{34}$$

となる．

このようにして，規格化された f_k は (1 つの) 光子に対する (波数表示の) 波動関数と見なすことできる．

偏光も考慮した 3 次元の光子に対するシュレディンガー方程式 は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_\alpha(\boldsymbol{k}) = \hbar\omega\psi_\alpha(\boldsymbol{k}),\ \omega = c|\boldsymbol{k}| \tag{35}$$

である．添字 α $(= 1, 2)$ は偏光の自由度 (スピン) を表す．

なお, 1 次元の場合には, t と x の役割を入れ換えることも可能であり, とくに異方性媒質内の伝播を取り扱うときに便利である. たとえば,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(k) = -\sum_\beta \hbar k n_{\alpha\beta}\psi_\beta(k) \tag{36}$$

のような式がよく用いられる. ただし, $n_{\alpha\beta}$ は屈折率テンソルである.

このようにして, 波数空間, すなわち運動量空間における光子のシュレディンガー方程式 が得られたので, これを逆フーリエ変換して座標空間でのシュレディンガー方程式 を得たいと思うのが人情であるが, 残念ながらこれはうまく行かない [18, 19, 21].

波動関数 $\psi(k)$ の逆フーリエ変換 $\phi(x)$ と点 x における電場の間には, k-空間で因子 $N(k) \sim \sqrt{|k|}$ だけの違いがあるが, この違いは x-空間では局所的な関係で表すことができない. 光子を点 x に見いだす確率はその点での電場の2乗に比例するが, $\phi(x)$ にも同じ性質を持たせることは不可能である.

このような事情により, 実空間での光子の波動関数はつくれないのであるが, $N(k)$ が定数と見なせるような状況, すなわちスペクトルの広がり Δk がスペクトルの中心 $\bar{k}$ にくらべて十分小さい場合は, $\phi(x)$ と電場を同一視できる.

9.2 質量のある光子

このように, 不完全ながらも光子に関するシュレディンガー方程式 というものが存在することがわかった. しかし, 無理に類似性をつけたのではないかと, いぶかるむきもあるので, もしも, 光子に質量があったとしたら, 普通のシュレディンガー方程式が上の手続きで自然に得られることを示す.

静止質量を m とすると, k-空間での マクスウェル方程式は

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right] A(t,k) = 0 \tag{37}$$

のようなクライン–ゴルドン型の方程式 [23] になる. (質量が0でない場合, 電場や磁場は場の量として不適当なので, ベクトルポテンシャル A を使う.)

運動エネルギー$\hbar^2k^2/m$ が静止質量のエネルギー mc^2 より十分小さいと近似 (非相対論的近似) し, 以下のような量を導入する.

$$0 < \kappa \equiv \frac{mc}{\hbar}\left(1 + \frac{\hbar^2k^2}{m^2c^2}\right)^{1/2} \simeq \frac{mc}{\hbar}\left(1 + \frac{\hbar^2k^2}{2m^2c^2}\right), \tag{38}$$

すると, 式 ([?]) は

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}\kappa\right) A(t,k) \;=\; 0, \tag{39}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{i}\kappa\right) A(t,k) \;=\; 0 \tag{40}$$

のような, 2つの式になる. このうち, 式 (39) は,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}A(t,k) = \left[\frac{\hbar^2k^2}{2m} + mc^2\right] A(t,k) \tag{41}$$

であり, 普通のシュレディンガー方程式 と同じ形をしている. ここで mc^2 は質量エネルギーに対応しているが, エネルギーの原点をとり直すことで, 除くこともできる.

ところで, 式 (40) は式 (39) の複素共役になっているが, これは, 負エネルギーの解に対応し, いわゆる反粒子を表している.

また正規化因子 $N(k)$ はこの近似の範囲では k に依存しないので, $A(x)$ と $\phi(x)$ の対応はよい. すなわち, 実空間のシュレディンガー方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + mc^2\right]\phi(x) \tag{42}$$

をつくることができる.

このようにもし光子が質量を持っていたとすると, 非相対論近似により自然にシュレディンガー方程式 に到達することが分かった. しかし, この場合でも, コンプトン波長 $2\pi\hbar/mc$ より小さい領域に波動を局在化させようとすると, シュレディンガー方程式は破綻する. これは物理的にいうと粒子の生成消滅がおこるためであり, このような状況では場の量子論を使うべきである.

なお, 電子の場合, クライン–ゴルドン方程式に相当するものは, ディラック方程式であるが, ここで, 述べたのと同じ手続きで, シュレディンガー方程式 に変形することが可能である.

10 2光子状態と対称性

10.1 2光子波動関数

2光子に対するシュレディンガー方程式は

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \hbar c(\omega_1+\omega_2)\psi_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) \tag{43}$$

と書ける [19]. ただし, $\omega_i = c|\boldsymbol{k}_i|$ $(i=1,2)$. ここで $|\psi|^2$ は1つの光子を波数 $\boldsymbol{k}_1$, 偏光 α_1 にもう一つの光子を $\boldsymbol{k}_2$, α_2 に見いだす確率を与える. 光子同士は直接は相互

作用しないので，ハミルトニアンはそれぞれの光子に対するものの和になっている．

光子はボーズ粒子なので波動関数は粒子の置換に関して対称でなければならない．すなわち，

$$\psi_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)=\psi_{\alpha_2\alpha_1}(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1) \tag{44}$$

量子力学において同一の2粒子からなる系の状態は粒子の置換に対して対称または反対称でなければならないとされている．すなわち，

$$\Phi(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_a(x_1)\phi_b(x_2)\pm\phi_b(x_1)\phi_a(x_2)] \tag{45}$$

のように表せる．これは粒子の無区別性から要請される．

このような記述はどの量子力学の教科書にもある．また，2電子系であるヘリウム原子の振舞いは反対称化によってはじめて正しく導かれる．しかし，対称化の意味，すなわち式(45)の意味は必ずしも明白ではない．区別できないと言いながら，x_1, x_2 と区別しているのではないか? 粒子の置換は具体的にはどのように行うのか? 遠く離れた粒子，例えば月の電子と目の前の電子は本当に区別できないのか? 区別がつかないとしても，なぜ，そのような遠方のもの同士を対称化の対象にしなければならないのか?

10.2 Leinaas-Myrheim の対称化 [24]

Leinaas と Myrheim はこれらの疑問を解消するため興味深い考察を行っている．彼らのモデルは非常に幾何学的なものであり，2光子の問題に直感的見通しを与えるので，紹介する．

まず，最も簡単な1次元上の2粒子を考える．古典的粒子の配置は平面上の点 (x_1,x_2) で表すことができる．ところが，粒子が区別出来ないとすると，(x_1,x_2) と (x_2,x_1) は同一の配置を表していることになる．この冗長を避けるため，全平面の代わりに，半平面 $x_1\geq x_2$ を可能な配置を表す空間と考えたほうが自然であろう (図7)． 2つの粒子の衝突あるいはすりぬけはこの平面上の軌跡が境界壁 $x_1=x_2$ で反射されることに対応している．

このような区別できない2粒子 (質量 m) を量子的に扱うには，半平面上の波動関数$\phi(x_1,x_2)$ とハミルトニアン

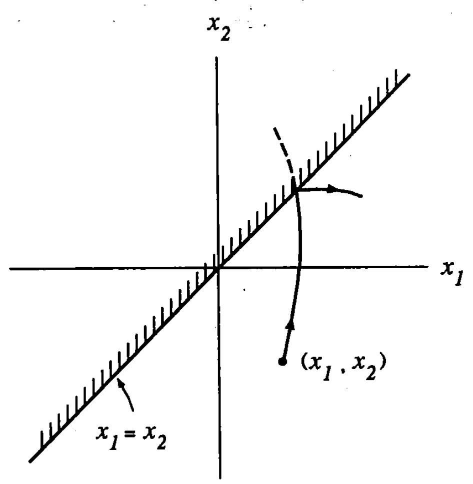

図 7: Leinaas-Myrheim の配置空間．1次元上の区別できない2粒子の配置を $x_1\geq x_2$ の半平面の点で表す．

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) \tag{46}$$

を考えるのが自然であろう．壁での境界条件を決めるため，座標を重心座標 $x=(x_1+x_2)/2$ と相対座標 $z=x_1-x_2\ (\geq 0)$ に変換し，波動関数を $\overline{\phi}(x,z)$ で表す．すると，ハミルトニアンは

$$H=-\frac{\hbar^2}{4m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{47}$$

となる．さて，壁での損失がない，すなわち確率が保存されるためには，

$$\overline{\phi}^*(x,0)\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial z}(x,0)-\frac{\partial\overline{\phi}^*}{\partial z}(x,0)\overline{\phi}(x,0)=0 \tag{48}$$

が成り立つ必要がある．この境界条件は

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial z}(x,0)=\eta\overline{\phi}(x,0) \tag{49}$$

と書くこともできる．ここで η は x に依存しない実数のパラメータである．η は系のすべての波動関数に対して一定でなければならない (超選択則)．η の異なる関数の和は式(49)の形の境界条件を満足せず，重ね合わせの原理に反するからである．

η は粒子が近づいたときの振舞い，すなわち多体効果あるいは統計性を決めるパラメータということができる．

$\eta=0$, すなわち $\partial\overline{\phi}/\partial z=0$ がボソンに$\eta^{-1}=0$, すなわち $\overline{\phi}=0$ がフェルミオンに対応していることは容易に理解できる.

全平面で波動方程式を解いてから, 壁での境界条件を満足する解 $\overline{\phi}(x,z)\pm\overline{\phi}(x,-z)$ をつくる手順 (鏡像法) が通常の対称化の手続きに他ならない.

Leinaas–Myrheim の方法は対称化の意味やその帰結を幾何学的に明らかにするものである. (先に述べた対称化に関連した疑問がどのように解消されたかは, 各自チェックしてください.) さらにここでの例に見られるように, $\eta\neq 0$, $\eta^{-1}\neq 0$, すなわち, ボソンでもフェルミオンでもない粒子の存在を示唆している.

さて, 空間次元が 1 次元以上の場合を考えよう. 一般に n-次元空間 R_n に N 個の区別できない粒子があるとしよう. N-粒子の交換を表す置換群を S_N と表すと, 配位空間は $\mathrm{R}_n^N/\mathrm{S}_N$ である. 粒子系の重心座標は R_n で表せるので,

$$\mathrm{R}_n^N/\mathrm{S}_N=\mathrm{R}_n\times r(n,N)$$

のような分解が可能である. ここで, $r(n,N)$ は N-粒子の相対位置を表す空間である.

$r(n,N)$ は局所的には R_n^{N-1} と同型であるが, 後に示すように大域的にはそうではない.

古典的な粒子は広がりがないので大域的な構造に影響を受けないが, 量子力学の波動関数は本質的な影響を受ける.

2 粒子 ($N=2$) の場合を例に $r(n,N)$ を調べてみよう. $r(1,2)$ は既に示したように, 半直線である (図 8(a)). なお, 原点 O は特異点で波動方程式が成り立たないので, 境界条件を別途考える必要があった.

$r(2,2)$ は平面上の 2 粒子の相対位置であるから, 一方の粒子を原点に固定した平面であることが容易にわかる (図 8(b)). しかし, 原点について対称な点 (A, A') は同一の配置を表しているので, $r(2,2)$ は半平面になる. 半平面の境界線上で, 原点に関して対称な点 (B,B') は, やはり同一配置を表していることを考慮すると, 結局, 図 8(b') のような円錐が $r(2,2)$ を表していることになる.

さて, ここで, 2 粒子を入れ換えるプロセスを考えよう. 粒子の入れ換えは $r(2,2)$ の閉曲線によって与えられる. (原点を通らない) 閉曲線は原点 O の回りを何回まわるか (winding number N_w) によって分類される (homotopy). なお, 粒子の入れ換えの操作は群をなすが, このような群は組紐群 (braid group) と呼ばれるものである.

閉曲線に沿って波動関数 ψ を一巡させると,

$$\psi\rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\psi$$

のような位相変化を受けるが, $\beta=N_\mathrm{w}\xi$ となっていれば, 閉曲線の分類とよい対応がつく (組紐群の表現). ξ は粒子 (表現) を特徴づけるパラメータになる.

また, ここに示した円錐は, 無限長ソレノイドコイルに対するアハラノフ–ボーム効果におけるゲージ構造と全く同じであり, ソレノイドコイルの磁束を Φ とすれば, $\xi=e\Phi/\hbar c$ なる関係が成り立つ.

$r(3,2)$ は相対距離を固定すると見やすい. 図に示すように, 半球面で赤道上の共役点 (B,B') を同一視したものになる. この場合, 閉曲線は 2 種類に分類される. たとえば, 図 8(c') にしめす, A から始まって A (A') に戻る 2 巻きの曲線は, 連続的に変形して 1 点に縮めることができる. (B, B' を矢印の方向に動かしてゆけばよい.) すなわち, $N_\mathrm{w}=0,1$ しか存在しないのである. この場合, $\xi=0$, または $\xi=\pi$ でなければならないことは, 容易にわかる.

$\xi=0$ は粒子の交換で符号が変わらないボゾンに, $\xi=\pi$ は符号が反転するフェルミオンに対応する. ところで, 既に見たように, 2 次元の場合は ξ は任意の値が取れる. これは, 2 次元ではボゾンでもフェルミオンでもない粒子が存在できることを意味する. このような粒子はξとして任意の値がとれることからエニオン (anyon) と名付けられている. [3]

粒子の統計性といった基本的な性質が, 空間の幾何学に支配されていることは大変興味深いことである.

11　双子の光子

11.1　パラメトリック蛍光

[3]実際の空間は 3 次元なのでこのような議論は無意味に思われるかもしれないが, 固体中では電子の運動が 2 次元に制限されている場合があり, 電子 (の集合) などがエニオンとして振舞う可能性がある.

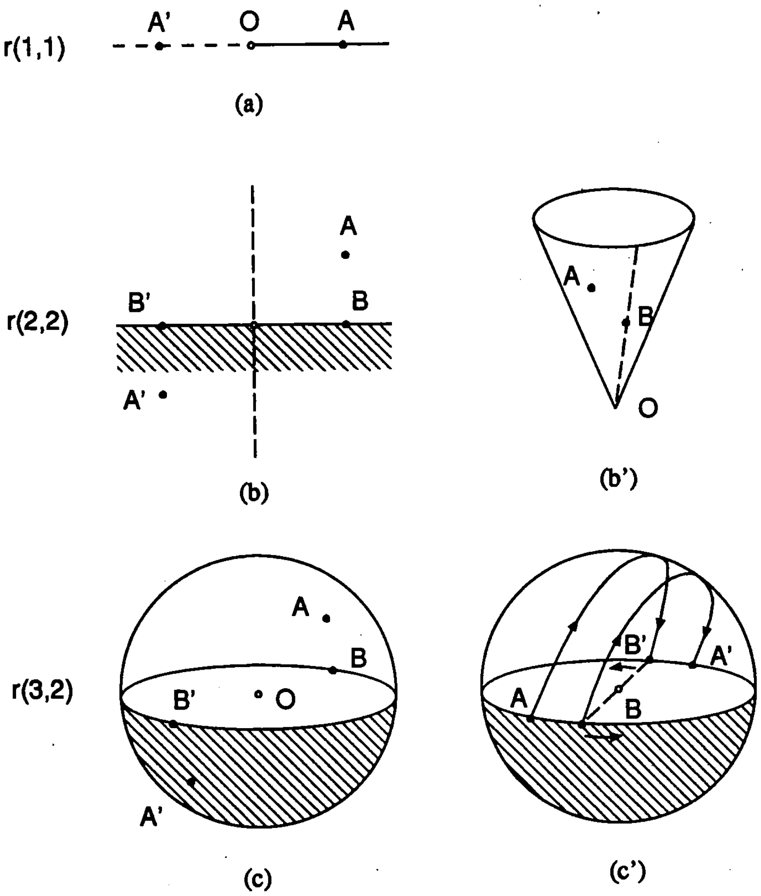

図 8: $r(n,N)$ の幾何学的構造

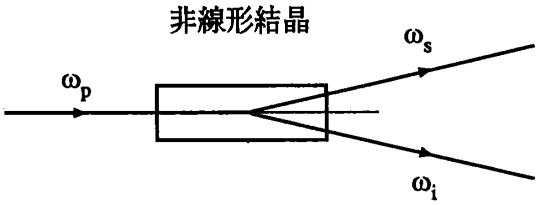

図 9: パラメトリック蛍光.

KDP などの 2 次の非線形性 ($\chi^{(2)}$) をもつ結晶に周波数ω_p のポンプ光を入射すると,

$$\omega_s + \omega_i = \omega_p \tag{50}$$

という関係をみたすシグナル光 ω_s とアイドラー光 ω_i が発生する (図 9). これはポンプ光子が吸収され, 代わりにシグナル光子とアイドラー光子が同時に放出されたと考えることができる. [4]

これらの光子には以下のような性質がある.

(1) 2 つの光子はほぼ同時に発生する.

(2) それぞれ光子の周波数 (エネルギー) は確定していないが, その和は一定 (ω_p) である.

[4] パラメトリック増幅はポンプ光の存在下で, シグナル光を入射すると, 増幅される現象である. そのとき, 付随的にアイドラー光が発生する. パラメトリック蛍光は入射シグナル光がない状態で, ポンプ光子が 2 つに分裂する現象である. したがって, シグナル光とアイドラー光の役割は対称であり, 区別できないが, 便宜のため, そのような用語が用いられる.

(3) 位相整合の条件から, 2 つの光子は異なった方向に放出される.

このように, 2 つの光子の間には相関が見られるので, 双子の光子あるいは光子対 (photon pair) と呼ばれる [25, 26].

11.2　2 光子相関

双子の光子に対する波動関数 $\psi(k_1, k_2)$ を現象論的に求め, その特徴を調べよう. まず, スペクトルに関する性質 (2) から, 波動関数の広がりは図 3(a) のようになっていると考えられる. それぞれの光子の波数の広がり ($\Delta k_1 = \Delta k_2 \sim \Delta k_-/\sqrt{2}$) は大きいが, 波数の和 ($k_1+k_2$) は広がり ($\Delta k_+$) が小さく, ほぼ一定 ($\omega_p/c = 2k_0$) である. Δk_- は位相整合条件や検出器の前に置かれる干渉フイルターのバンド幅で決まり, Δk_+ はポンプ光のスペクトル広がり, すなわちコヒーレンス長できまる.

波数領域での波動関数をフーリエ変換すれば空間領域での波動関数$\phi(x_1, x_2)$ が求まる. 結果は図 10(b) に示すように, 対角線方向に長い波束になる. 波束の広がりは $\Delta x_\pm = 2/\Delta k_\pm$ である. 特徴的なのは, それぞれの光子は空間的に広がっているにも拘らず, 一方の光子をある点に見いだすと, 他方の光子は必ず対応する点の近傍の狭い範囲に見いだされることである.

時間軸でみればこれは双子の光子の同時性 (性質 (1)) を意味している. これは双子光子の持っている量子相関のうち最も重要なものである. この性質と性質 (3) を利用して, 一方の光子を検出することにより, 時間あるいは空間的に局在した 1 光子状態を準備することが可能となる [27]. これは, 1 光子に対する Berry の位相の検証 [28] などに利用されている.

図 10(a) の波動関数は 1 光子の波動関数の積 $\psi_1(k_1)\psi_2(k_2)$ の形には書けない. このような状態は "もつれた状態" (entangled state) と呼ばれる. 対称化の操作も "もつれ" (entanglement) をもたらす.

状態のもつれは 2 つ以上の部分系からなる系における状態の重ね合わせの帰結であるが, われわれの日常感覚 (たとえば局所的実在性) からは理解しにくい結果をもたらす. 特に, 部分系が相互作用のないほど空間的に離れている場合にその不可思議さは顕著である.

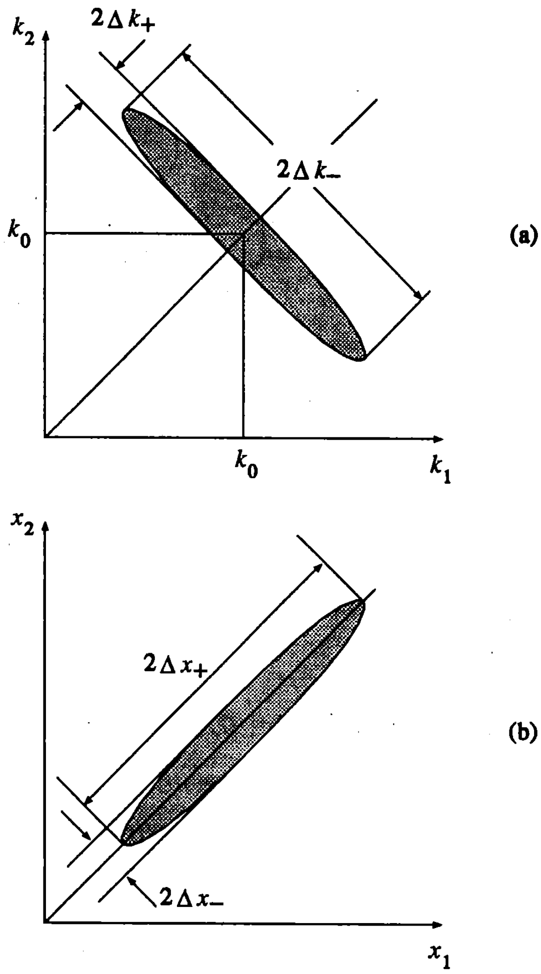

図 10: 双子光子の波動関数の広がり. (a) k-空間 (b) x-空間. $\Delta k_- \ll \Delta k_+$, $\Delta x_\pm = 2/\Delta k_\pm$.

有名な Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) のパラドックスは状態のもつれに関するものである [29].

先に述べたように, 光子対の一方の位置を測定すると, 他方の光子の位置を正確に (Δx_- の精度で) 確定することができる. 日常感覚によれば, 一方の光子に対する測定の影響が遠く隔たった他方の光子に及ぶはずはないと考えるのが自然である. つまり, 測定には無関係に他方の光子の位置は確定していたと考えざるをえない. 同様の議論から, 波数も Δk_+ の精度で確定していたと考えなければならない. しかし, これらを認めると, $\Delta x_- \Delta k_+ \ll 1$ であるため, 不確定性原理と矛盾する結果が出る.

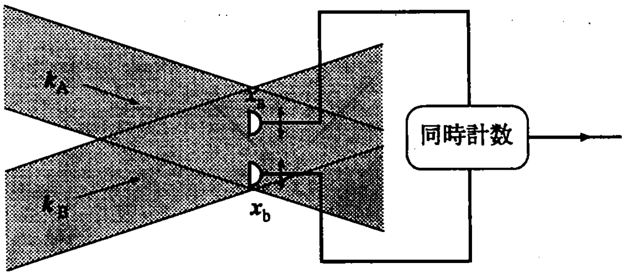

図 11: Ghosh-Mandel の実験. 2 つの光子のビームが交差するところに, 検出器を 2 つおいて同時計数を行なう.

これが EPR のパラドックスである.

量子力学の標準的解釈では, 他方の光子の位置あるいは波数が確定するのは, 対応する測定を一方の光子について行なって結果を得た時点であるとして, 矛盾を避けている.

11.3 Ghosh–Mandel の実験 [30]

双子の光子の見せる不思議な振舞いのうちもっとも簡単に理解できる例として Ghosh と Mandel の実験を取り上げよう. パラメトリック過程で発生させた 2 つの光ビームを図 12 のように交差させることを考える. ビーム a とビーム b にはそれぞれ光子がひとつずつ含まれている. また, それぞれのスペクトルは干渉フィルターを用いて単色と見做せるほど十分制限してあるものとする. (そのため, 光子対の同時性はかなり損なわれている.) すると 2 光子の対称化された波動関数は座標空間で

$$\phi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{A}\boldsymbol{x}_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{B}\boldsymbol{x}_2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{B}\boldsymbol{x}_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{A}\boldsymbol{x}_2}\right] \tag{51}$$

ここで $\boldsymbol{k}_\mathrm{A}$, $\boldsymbol{k}_\mathrm{B}$ はそれぞれのビームの波数ベクトルで $|\boldsymbol{k}_\mathrm{A}|=|\boldsymbol{k}_\mathrm{B}|=k_0$.

さて, 点 $\boldsymbol{x}_\mathrm{a}$ と点 $\boldsymbol{x}_\mathrm{b}$ で光子がそれぞれ 1 つずつ見いだされる確率は

$$|\phi(\boldsymbol{x}_\mathrm{a},\boldsymbol{x}_\mathrm{b})|^2=1+\cos\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{x}_\mathrm{a}-\boldsymbol{x}_\mathrm{b}) \tag{52}$$

に比例する. ただし, $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{k}_\mathrm{A}-\boldsymbol{k}_\mathrm{B}$. この計算は全く簡単であるが, その結果の意味することは必ずしも単純ではない. 式の形は 2 つのコヒーレントなビームの普通の (2 次の) 干渉のように見える. しかし, 2 つのビームの光子は別々のものなので (Dirac が言うように) 干渉はしない.

ここで問題にしている 2 光子の干渉は検出器を 2 つ用い同時計数 (coincidence) の事象を記録することにより測定される. (同時計数で得られる干渉は強度干渉あるいは 4 次の干渉に相当する.)

式 (52) は検出器の相対位置を変化させると, 同時計数率が正弦波状に変化することを意味している. とくに, $\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{x}_\mathrm{a}-\boldsymbol{x}_\mathrm{b})=n\pi$ (n: 奇数) となる位置ではそれぞれの検出器は同時に光子を検出することはない. つまり, $\boldsymbol{x}_\mathrm{a}$ で光子を見いだした時には, $\boldsymbol{x}_\mathrm{b}$ にもう 1 つの光子を見い出すことは決してない.

Leinaas-Myrheim の描像がこの 2 光子干渉の理解に役立つ. $\boldsymbol{K}$ 方向に x-軸をとり,

$$\boldsymbol{k}_\mathrm{A}=(k_x,k_y,k_z),\ \boldsymbol{k}_\mathrm{B}=(-k_x,k_y,k_z)$$
$$\boldsymbol{x}_1=(x_1,y,z),\ \boldsymbol{x}_2=(x_2,y,z) \tag{53}$$

とおくと, 式 (51) は

$$\phi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(k_y y+k_z z)}}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x(-x_1+x_2)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x(x_1-x_2)}\right] \tag{54}$$

となり, (x_1,x_2)-平面の波として表される. 第 1 項と第 2 項は互いに逆方向に伝搬する平面波であるが, これは図 12(b) に示すように, 境界 $x_1=x_2$ での入射波 (I) と反射波 (II) と見なすことができる. なお, 図 12(a) は k-空間での波動関数である. これら 2 つの波が干渉して定在波を生じている.

干渉しているのが 2 光子波動関数であること, そして, 対称化の結果生じた波が干渉に寄与していることが興味深い点である. このようにして, Ghosh-Mandel の 2 光子干渉の直感的描像が得られ. しかし, 2 次元配置空間という架空空間における波が, そこでの仮想的な壁で反射されたため生じたという意味では直感から遠いところの現象である.

11.3.1 古典的強度干渉との比較

双子の光子を使わない場合にも類似の 2 光子干渉が見られることに注意しよう. レーザーからの光を 2 つに分け,

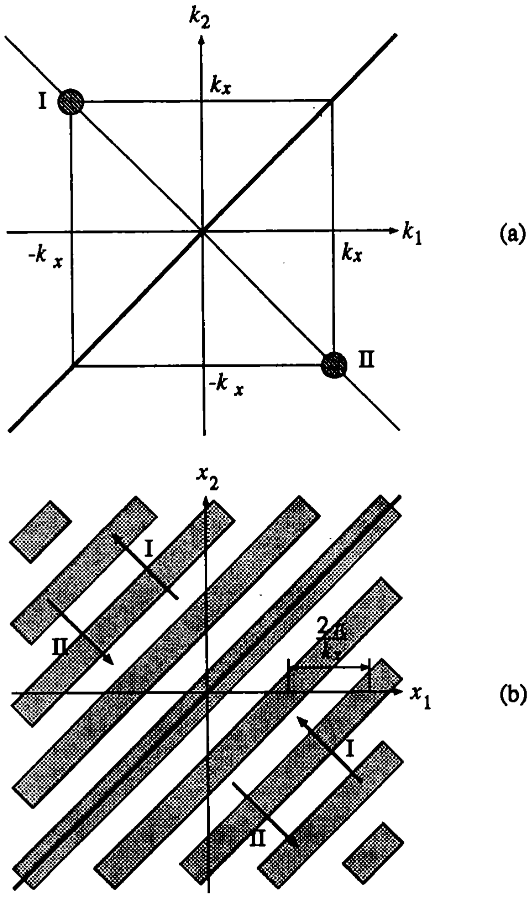

図 12: Ghosh-Mandel の 2 光子干渉における波動関数の様子. (a) k-空間では対称化の要請から 2 つのデルタ関数の重ね合わせになっている. (b) x-空間では 2 つの平面波が干渉して定在波となっている.

ビーム a, b を作ると, 通常の 2 次の干渉縞

$$I(x;\xi) = 1 + \cos(Kx + \xi) \tag{55}$$

が見られる. ξ はビーム間の位相差に対応する量である. ξ がランダムにゆらいでいるとすると, 平均化によって 2 次の干渉は消えるが, 強度相関は

$$< I(x_1;\xi)I(x_2;\xi) >_\xi = 1 + \frac{1}{2}\cos K(x_1 - x_2) \tag{56}$$

となり 4 次の干渉縞は残る. これは式 (52) と余弦関数の前の 1/2 を除いて同じである. つまり, 干渉の鮮明度 (visibility) が 50%か 100%かの違いなのであるが, この差は重大である [31].

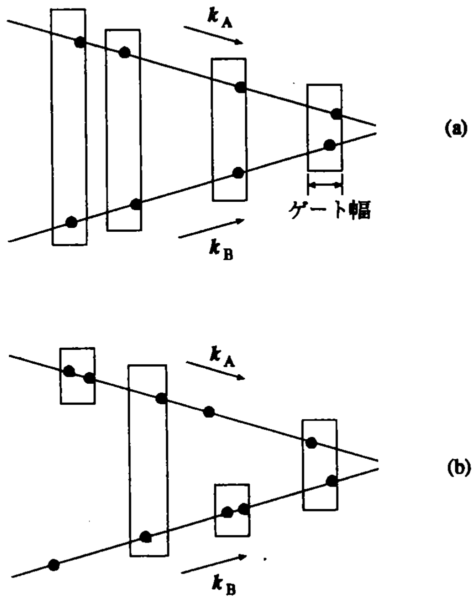

図 13: (a) Ghosh-Mandel の干渉と (b) 古典的強度干渉との比較. 同時計数される光子の対を囲ってある.

この古典的な強度干渉を量子論で説明してみよう. 図 13(a) のように, 双子光子を用いた場合には, 2 つのビームの光子の並び方にはよい相関があり, 同時計数にはそれぞれのビームから 1 つずつの光子が寄与している. それに対し普通の光源の場合, 図 13(b) に示すように, 一方のビームからの 2 光子を計数する場合があり, これは干渉に寄与しない. そのため鮮明度が 50%に低下するのである.

図 13(a) の場合, ND フイルターで一方のビームの光子を間引いても, 依然として 100%の鮮明度が得られることは興味深い.

双子光子を用いない図 13(b) の状況は, 本質的にもつれていないので, 古典モデルで説明可能なのである. しかし, もつれた状態に起因する鮮明度 100%の干渉に対する古典的解釈は存在しない. 逆にいえば, 古典的と思われている干渉も実は量子論に起源を求めることができるのである.

ところで, ボーズ粒子に対する壁での境界条件 $\partial\phi/\partial z = 0$ は, 壁面で干渉が強め合うようなものであったことを思いだそう. 一般に波数 $\boldsymbol{K}$ に広がりがあると,

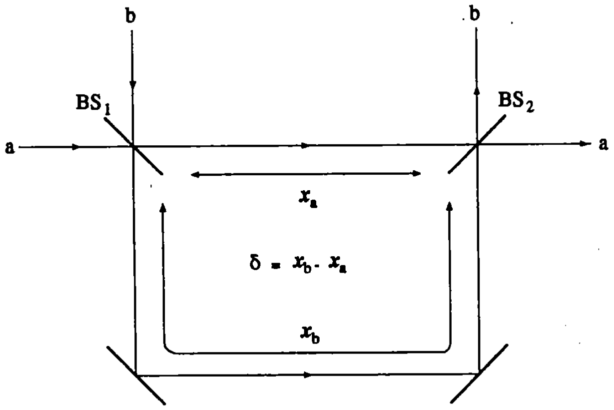

図 14: マッハ-ツェンダー干渉計. ビームスプリッター BS_1, BS_2, 光路差 δ の作用はユニタリー変換で表すことができる.

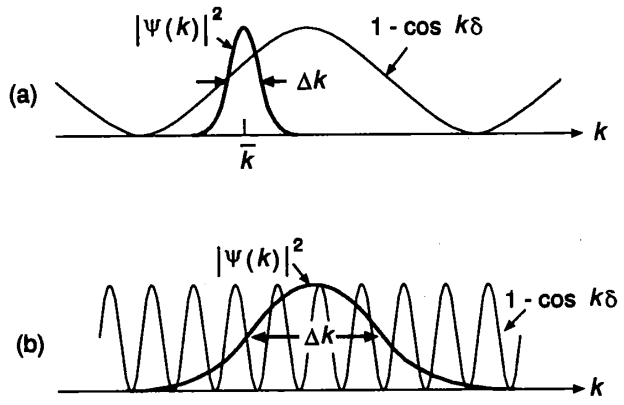

図 15: 式 (61) の被積分関数. (a) $\delta \ll \Delta k^{-1}$ の場合 (b) $\delta \gg \Delta k^{-1}$ の場合

干渉縞は消えてしまうが, 壁面 $(x_1 = x_2)$ での強め合う干渉は残る. 通常の干渉における光路差 0 での白色干渉縞に相当するこの干渉は光子の集群 (bunching) に相当する [32].

12　2 光子干渉計

2 光子状態をさらに詳しく調べるには干渉計が必要である. 干渉計による波動関数の変化をまず 1 光子の場合について復習しておこう.

図 14 に示すようなマッハ-ツェンダー干渉計を考えると, 2 つのビーム a, b を考えればよいことがわかる. したがって, 波動関数を $\psi_\alpha(k)$ $(\alpha = \mathrm{a}, \mathrm{b})$ と表すことにする. 添字 α はビームを区別するものであるが, 形の上ではスピンあるいは偏光に対する添字と同じである. (実際, 干渉計の動作は回転群を用いて幾何学的に記述することができる [33].)

ビームスプリッターや, 干渉計内の光路差によってもたらされる変化は 2×2 のユニタリー行列 $U_{\alpha\beta}$ を用いて

$$\psi'_\alpha = \sum_\beta U_{\alpha\beta}\psi_\beta \tag{57}$$

のように表される. 具体的に表すと, 1:1 のビームスプリッターは

$$\begin{bmatrix} \psi'_\mathrm{a} \\ \psi'_\mathrm{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_\mathrm{a} \\ \psi_\mathrm{b} \end{bmatrix} \tag{58}$$

光路差は

$$\begin{bmatrix} \psi'_\mathrm{a} \\ \psi'_\mathrm{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_\mathrm{a}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_\mathrm{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_\mathrm{a} \\ \psi_\mathrm{b} \end{bmatrix} \tag{59}$$

のように表すことができる.

ポート a から $\psi(k)$ が入射した場合を考えると,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{BS}_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\delta} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_\mathrm{a}} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_\mathrm{b}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{BS}_2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_\mathrm{a}}}{2} \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta} \\ 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta} \end{bmatrix} \tag{60}$$

のように波動関数が変化する. 共通因子 $\psi(k)$ は省略した. ここで $\delta = x_\mathrm{b} - x_\mathrm{a}$ は光路差である.

これより, 出力 a, b で光子を検出する確率 P_a, P_b は

$$P_\mathrm{a} = 1 - P_\mathrm{b} = \frac{1}{2}\int |\psi(k)|^2 (1 - \cos k\delta)\mathrm{d}k \tag{61}$$

となる.

図 15 から分かるように, この積分は光路差 δ が干渉長 Δk^{-1} より十分小さい場合は, $|\psi(k)|^2$ がデルタ関数 $\delta(k - \bar{k})$ と見做せて, $P_\mathrm{a} = 1 - \cos \bar{k}\delta$ となり, δ の変化に応じて干渉が見える. 一方, $\delta \gg \Delta k^{-1}$ では $\cos k\delta$ が

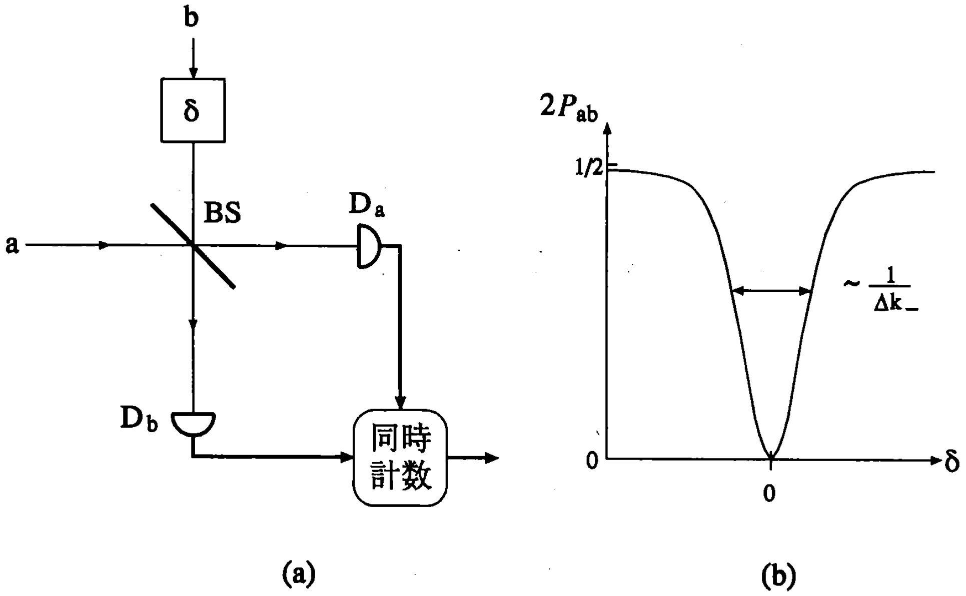

図 16: 双子光子の同時性の測定. (a) 実験装置. (b) 実験結果.

k について速く振動するので 0 と見做せて $P_a = \frac{1}{2}$ となり, 干渉は見られない.

2 光子 2 ビーム系の波動関数は 1 光子の場合を参考にして$\psi_{\alpha_1\alpha_2}(k_1,k_2)$ $(\alpha_1,\alpha_2=a,b)$ と書ける.

系の変化は

$$\psi'_{\alpha_1\alpha_2}=\sum_{\beta_1}\sum_{\beta_2}U_{\alpha_1\beta_1}U_{\alpha_2\beta_2}\psi_{\beta_1\beta_2} \tag{62}$$

のように書ける. 具体的には, ビームスプリッターは

$$\begin{bmatrix}\psi'_{aa}\\ \psi'_{ab}\\ \psi'_{ba}\\ \psi'_{bb}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_{aa}\\ \psi_{ab}\\ \psi_{ba}\\ \psi_{bb}\end{bmatrix} \tag{63}$$

と表され, 光路差は

$$\psi'_{\alpha\beta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x_\alpha+k_2x_\beta)}\psi_{\alpha\beta}\ (\alpha,\beta=\mathrm{a},\mathrm{b}) \tag{64}$$

となる.

以上の準備により 2 つの場合を調べてみよう. この 2 つの場合は, それぞれ, 図 10 の波動関数の (k_1-k_2)-軸, (k_1+k_2)-軸方向を調べることに対応している.

12.1　光子の時間差の測定

図 16(a) のような装置で, ポート a, b にひとつずつ光子が入った場合を考える [34]. すなわち, 光路差 δ, ビームスプリッター BS により, 波動関数は

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{\delta}\begin{bmatrix}0\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2\delta}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\delta}\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{\mathrm{BS}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2\delta}}{2}\begin{bmatrix}-1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1-k_2)\delta}\\1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1-k_2)\delta}\\-1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1-k_2)\delta}\\1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1-k_2)\delta}\end{bmatrix} \tag{65}$$

のように変化する. ただし, 共通因子 $\psi(k_1,k_2)/\sqrt{2}$ は省略した.

$\delta=0$ の場合, 出力は $[-1,0,0,1]^{\mathrm{T}}\psi(k_1,k_2)/\sqrt{2}$ となる. ($^{\mathrm{T}}$ は行列の転置を意味する.) これは 2 つの光子が a または b のチャンネルにかたよって検出されることを意味する. つまり, a, b における同時計数の確率 $P_{ab}=\int|\psi_{ab}|^2\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2$ は 0 となる. しかし, 光路差 $|\delta|$ を増加させてゆくと, 同時計数の確率が次第にふえてゆき, 図 16(b) のようなデータがえられる. この曲線の幅は $\psi(k_1,k_2)$ の k_1-k_2 方向への広がりΔk_- に反比例する. 時間領域で考えると, これは 2 つの光子の同時性を計っていることになる. Hong ら [34] は, 100 fs という

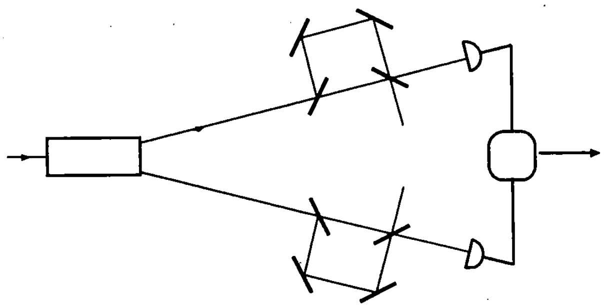

図 17: Franson の干渉計

データを得ているが, これは干渉フィルターのバンド幅とよい対応を示している.

なお, この時間幅は同時計数のためのゲート時間とは異なるものであることに注意しておく. 後者は異なる光子対を分離するため設定されるもので, 通常 ns のオーダーである (図 13参照).

12.2 2 光子コヒーレンスの測定

干渉計のポート a に 2 つの光子が入った場合を考える [35, 36]. すなわち, ビームスプリッターと光路差により

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{BS}_1} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\delta} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2\delta} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\delta} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1+k_2)\delta} \end{bmatrix} \tag{66}$$

となる. 第 2 のビームスプリッター BS_2 により

$$\psi_{\mathrm{bb}} = \frac{1}{4}[1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2\delta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\delta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1+k_2)\delta}]\psi \tag{67}$$

となる. 光路差 δ が小さい間は $P_{\mathrm{bb}} = \int |\psi_{\mathrm{bb}}|^2 \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2$ は複雑な変化をするが, 1 光子の干渉長 (Δk_+^{-1}) より大きくなると,

$$P_{\mathrm{bb}} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{2}\cos 2k_0\delta\right] \tag{68}$$

のような干渉が見られる. 式 (67) の第 1, 4 項の間のこの干渉は驚くべきことに, パラメトリック蛍光のポンプ光に対応する周期と干渉長さを持っている. 式の導出過程からわかるように, 第 1 項は 2 光子がともに通路 a を通る振幅, 第 4 項は通路 b を通る振幅に対応している. つまり, 2 光子がまとまりとして干渉したと考えることができる. そのため, 2 光子に分かれる前の情報を保持したまま干渉しているのである.

すこし注意すれば, 2 つの独立した干渉計にそれぞれ 1 つずつの光子を入れても, 全く同じ干渉が見られることがわかる (図 17). この興味深い干渉は EPR タイプの実験として, Franson[37, 38] によって提案されたものであるが, 実際に Kwiat ら [35], Ou ら [36] によって観測されている.

12.3 パラメトリック分裂した光子対の干渉

Zou ら [39] はビームスプリッタで分けられたポンプ光で励起された 2 つのパラメトリック結晶からのシグナル蛍光同士が干渉することを実験的に示した (図 18).

通常, 2 つのシグナル蛍光 $\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2$ は互いにコヒーレントでないため干渉しない. すなわち, 光路差を変化させても, 検出器での光電子検出レートは変わらない. しかし, ポンプビーム $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2$ がコヒーレントである場合は干渉しうる. ただし, そのためには, 2 つのアイドラビーム $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2$ が空間的に厳密に重なるようアライメントする必要がある. アライメントをずらしたり, i_1 を NL2 の手前で遮ったりすると, 干渉しなくなる. (i_1 は十分弱く NL2 を通過する際, 誘導パラメトリック効果などは起こしえず, そのまま通過することに注意.) パラメトリック効果で分裂したアイドラ光を操作することで, シグナル光の干渉をコントロールできることは, 直観に反するため, 様々の不自然な解釈を生んでいるようである.

シグナル, アイドラの対は互いに空間的に隔たっていても一体のものと考える必要があり, 双方の自由度 (それぞれの波数ベクトルの方向) を一致させたとき, 始めて干渉が見られるのである. これは通常の光の干渉においても, 偏光を一致させないと干渉縞が見られないことに対応している.

これまでの例で見てきたように, 双子の光子は互いに空間的に隔たっていても, 相関を保持しており, 2 光子波動関数を用いて一体のものとして記述しないと説明のつかない振舞いをする. このことは古典的直観に反するため, 2 つの光子を独立したものとして記述しようという試みがなされてきた. いわゆる, "(局所的) 隠れた変数理論" と呼ばれるものである. しかし, このような試みは,

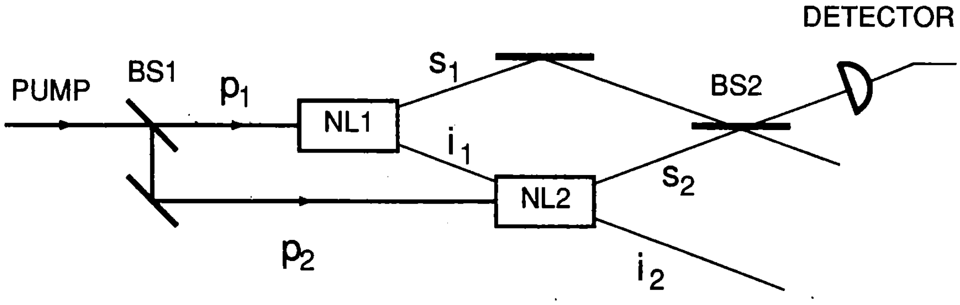

図 18: パラメトリック分裂した光子対の干渉

2 光子相関を用いた一連の実験によりその殆んどが却下されてきた [40–44]. 最近, 隠れた変数理論に対するさらに厳しいテストとして 3 光子の相関を用いた実験が提案されている [45, 46].

参考文献

[1] M. V. Berry, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **392**, 45 (1984).

[2] A. Shapere and F. Wilzek (eds.), *Geometric Phases in Physics* (World Scientific, Singapore, 1989).

[3] Y.-S. M. Wu and A. Kuppermann, Chem. Phys. Lett. **201**, 178 (1993).

[4] R. Y. Chiao, in *Proceedings of the 3rd International Symposium on Foundations of Quantum Mechanics* (Physical Society of Japan, Tokyo, 1989), p.80.

[5] T. Tomita and R. Y. Chiao, Phys. Rev. Lett. **57**, 937 (1986); R. Y. Chiao and Y.-S. Wu, Phys. Rev. Lett. **57**, 933 (1986).

[6] M. Kitano, T. Yabuzaki, and T. Ogawa, Phys. Rev. Lett. **58**, 523 (1987).

[7] M. V. Berry, Nature **326**, 278 (1987); R. Y. Chiao, A. Antaramian, K. M. Ganga, H. Jiao, S. R. Wilkinson, H. Nathel, Phys. Rev. Lett. **60**, 1214 (1988).

[8] S. Panchartnum, Proc. Indian Acad. Sci. **A44**, 247 (1956).

[9] M. Kitano and T. Yabuzaki, Phys. Lett. A **142**, 321 (1989).

[10] R. Y. Chiao and T. F. Jordan, Phys. Lett. A **132**, 77 (1988);

[11] R. Simon and N. Mukunda: Phys. Rev. Lett. **70**, 880 (1993).

[12] M. Kitano (preprint).

[13] 例えば、J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison Wesley, Redwood City, 1985) p. 136.

[14] Y. Aharonov and J. Anandan, Phys. Rev. Lett. **58**, 1593 (1987).

[15] B. F. Schutz, *Geometrical Method of Mathematical Physics*, (Cambridge University Press, 1980).

[16] S. Ramaseshan and R. Nityananda, Curr. Sci. **55**, 1225 (1986).

[17] H. Takenaka, Nouvell Revue d'Optique **4**, 37 (1973).

[18] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg: *Photons and Atoms*, p. 23 (Wiley, 1989).

[19] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii: *Quantum Electrodynamics*, Chap. 1 (Interscience, 1965).

[20] M. Horne, A. Shimony and A. Zeilinger: *Quantum Coherence*, ed. J. A. Anandan, p. 356 (World Scientific, Singapore, 1990).

[21] T. D. Newton and E. P. Wigner: Rev. Mod. Phys. **21**, 400 (1949).

[22] 高橋 康: 古典場から量子場への道, p. 80 (講談社, 1979).

[23] W. Greiner: *Relativistic Quantum Mechanics — Wave Equations*, Chap. 1 (Springer, 1990).

[24] J. M. Leinaas and J. Myrheim: Nuovo Cimento **37B**, 1 (1977).

[25] Z. Y. Ou and L. Mandel: Quantum Opt. **2**, 71 (1990).

[26] 松岡正浩: 光学 **20**, 332 (1991).

[27] E. R. Pike and S. Sarkar: Quantum Opt. **1**, 61 (1989).

[28] P. G. Kwiat and R. Y. Chiao: Phys. Rev. Lett. **66**, 588 (1991).

[29] A. Einstein, B. Podolski and N. Rosen: Phys. Rev. **47**, 777 (1935).

[30] R. Ghosh and L. Mandel: Phys. Rev. Lett. **59**, 1903 (1987).

[31] Z. Y. Ou and L. Mandel: Phys. Rev. Lett. **62**, 2941 (1989).

[32] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss: Proc. Roy. Soc. **A242**, 300 (1957).

[33] B. Yurke, S. L. McCall and J. R. Klauder: Phys. Rev. **A 33**, 4033 (1986).

[34] C. K. Hong, Z. Y. Ou and L. Mandel: Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987).

[35] P. G. Kwiat, W. A. Vareka, C. K. Hong, H. Nethel and R. Y. Chiao: Phys. Rev. **A 41**, 2910 (1990).

[36] Z. Y. Ou, X. Y. Zou, L. J. Wang and L. Mandel: Phys. Rev. Lett. **65**, 321 (1990).

[37] J. D. Franson: Phys. Rev. Lett. **89**, 2205 (1989).

[38] J. D. Franson: Phys. Rev. Lett. **67**, 290 (1991).

[39] X. Y. Zou, L. J. Wang, and L. Mandel: Phys. Rev. Lett. **67**, 318 (1991).

[40] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger: Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).

[41] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger: Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).

[42] Z. Y. Ou and L. Mandel: Phys. Rev. Lett. **61**, 50 (1988).

[43] S. M. Tan and D. F. Walls: Opt. Commun. **71**, 235 (1989).

[44] L. J. Wang, X. Y. Zou and L. Mandel: Phys. Rev. Lett. **66**, 1111 (1991).

[45] D. M. Greenberger, M. H. Horne and Zeilinger: *Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, ed. M. Kafatos, p. 69 (Kluwer Academic, Dordrecht, 1989).

[46] B. Yurke and D. Stoler, Phys. Rev. Lett. **68**, 1251 (1992).