遷移確率に基づいたカオス軌道の予測

慶大理工　岩崎 唯史
イリノイ大 UC　Alfred Hübler

1　序論

通常，観測データからそのデータ列を再現する方程式を構成するには，フーリエ展開が用いられる．しかし，カオスにノイズが加わっている時系列データに対してフーリエ展開を用いて方程式を再構成する方法は必ずしもよい結果を与えない [1]．また，最近カオス軌道を予測，制御するための方法が提案されているが，これらの方法を実際の系に適応する場合には，実用上ノイズの存在が問題となる．したがって，観測データを再現する方程式を再構成するためには，系のダイナミクスに対するノイズの効果をきちんと考慮する必要がある．

ここでの目的は，ノイズを含んだデータ列から運動方程式を正しく再構成するためのノイズの効果を考慮に入れた方法を構築することである．ただし，系のリアプノフ数，相関時間などに対する先見的知識はないとする．

以下では，ノイズを含んだ系のデータ列 x' は，次式の写像で生成されるとする．

$$x'_{n+1} = F(x'_n, p_{\rm ex}) + \delta_A, \quad (n = 1, 2, \ldots, N). \tag{1}$$

ここで，運動方程式 $F(x', p_{\rm ex})$ 中の $p_{\rm ex}$ は運動方程式のパラメータで，δ_A は系内のゆらぎによるノイズである．そして我々が測定するデータ列 x は，x' に測定装置に起因するノイズ δ_M が加わった

$$x_n = x'_n + \delta_M, \tag{2}$$

であるとする．系内のゆらぎによるノイズ δ_A は軌道そのものを変えてしまい，カオス軌道の長時間予測を困難なものにしてしまう原因であるが，一方，測定装置に起因するノイズ δ_M は系の時間発展に影響を与えることはなく，平均操作を行なうことによりデータ数 Nの増加と共にその影響は無視できる．二つのノイズ δ_A と δ_M を区別するのは，以上の様なノイズの影響の違いが以下の定式化に表れるからである．また，以下では δ_A, δ_M は共に分散が σ_A^2, σ_M^2 のガウス分布から生成される乱数として扱う．したがって，σ_A^2, σ_M^2 はそれぞれのノイズの大きさを表す目安となる．

ここでは，ダイナミクスを予測する方法として，ノイズが大きい時でも有効ある思われるモデル化による予測法に着目する [2]．モデル化による予測法とは，まず最初に時系列 x に対してモデル運動式 ($x_{n+1} = f(x_n, p)$：ノイズ無し) をたてる．ただし，p は $p_{\rm ex}$ に対する未知パラメータである．次に "予測誤差" $Q(p)$ を定義し，最後に $Q(p)$ を最小にするものを p の推測値 p_g とする．$Q(p)$ として通常平均自乗誤差

$$Q(N,p) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N-n+1} (x_{n+m} - f^m(x_n,p))^2, \quad f^m(x_n,p) \equiv \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m}(x_n,p), \tag{3}$$

が用いられる. (3) 式に, $m=1$ のシングルステップに対する予測誤差だけでなく, 可能なすべてのステップ $(m=1,2,\ldots N)$ 対する予測誤差を含めているのには, 二つの理由がある. まず第一の理由は, 観測データからダイナミクスに関する情報をフルに引き出すには, シングルステップのみの情報だけを用いていたのでは, 不十分であると思われるからである. これはデータ数 N が少ないときは特に重要な問題となる. 第二の理由は, 連続な時系列を扱う場合, もはや "シングルステップ" というものの定義自体に問題があるということである. 連続な時系列の Δt 間隔の観測データを扱うとした場合にも, 最適な Δt をどう選べばよいのかという問題が依然残る. (Δt は相関時間程度に選べばよいと思われるが, ここでは相関時間に対する先見的知識はないとしている.)

一方, (3) 式に可能なすべてのステップ対する予測誤差を同じ重みで含めた代償として, カオス軌道の長時間予測に対して誤った予測値を与えるという問題点が生じる (図 1 参照). これは,(3) 式中の長ステップに対する大きな予測誤差が, 軌道がカオス的な場合でも有効なシングルステップ [3] の情報を覆い隠してしまうためである (図 2 参照). このように, 平均自乗誤差は短時間予測に対しては有効であるが, カオス軌道に対する長時間予測にはむかず, その有効さはリアプノフ数, 相関時間によって異なるのである. したがって, 長時間にわたってカオス軌道を予測しようとする場合, $Q(N,p)$ に平均自乗誤差を用いるということを見直さなければならない.

2 遷移確率分布の導入とその時間発展

まず, ノイズの効果を考慮するために次のような x_n から m ステップで x_{n+m} へ移る遷移確率分布を考える.

$$T(x_n,x_{n+m},p)=\int dx_{n+m-1}T(x_n,x_{n+m-1},p)\times\frac{\exp\left[-\frac{(x_{n+m}-f(x_{n+m-1},p))^2}{2(\sigma_A^2+\sigma_M^2)}\right]}{\sqrt{2\pi(\sigma_A^2+\sigma_M^2)}} \tag{4}$$

(4) 式は, 各ステップでのノイズの分布を分散 $\sigma_A^2+\sigma_M^2$ のガウス分布とし, 途中の $n+1$ から $n+m-1$ ステップまでのノイズの効果を, 経路積分における中間積分と同じようにして取り込んでいる. (4) 式より m ステップの遷移確率分布を求めるには $m-1$ 回の積分を行なわなければならないが, x_{n+k} を $f^k(x_n,p)$ のまわりの 1 次までで展開し積分すると,(4) 式の遷移確率分布は次式のような中心が $f^m(x_n,p)$ で分散が $\sigma^2(m,n,p)$ のガウス分布関数型となる.

$$T(x_n,x_{n+m},p)=\exp\left[-\frac{(x_{n+m}-f^m(x_n,p))^2}{2\sigma^2(m,n,p)}\right]\Big/\sqrt{2\pi\sigma^2(m,n,p)}\,. \tag{5}$$

ただし, 分散 $\sigma^2(m,n,p)$ はステップ毎に異なり, その時間発展は,

$$\sigma'^2(m+1,n,p) = \sigma_A^2+\sigma'^2(m,n,p)\left.\frac{\partial f(x,p)}{\partial x}\right|^2_{x=x_{n+m}}, \tag{6}$$

$$\sigma^2(m,n,p) = \sigma_M^2+\sigma'^2(m,n,p), \tag{7}$$

という漸化式で与えられる. 系内のダイナミクス x' に対する分散$\sigma'^2(m,n,p)$ の式 (6) は (1) 式に対応していて, 右辺第一項は毎ステップ加えれる系内のゆらぎ δ_A によるノイズ効

果を，右辺第二項は過去のノイズの履歴の効果を反映している．また，測定データ x に対する分散 $\sigma^2(m,n,p)$ の式 (7) は (2) 式に対応していて，右辺第一項は毎ステップ加えられる測定器によるノイズ効果 δ_M を反映している．そして，分散 $\sigma^2(m,n,p)$ はこの二種類のノイズの効果による局所的な軌道の広がりを表している．

次に，上の遷移確率分布に基づいて "予測誤差" $Q(N,p)$ を定義する．モデル化による予測法では，$Q(N,p)$ を最小にする p をその推測値とするので，$p=p_{\mathrm{ex}}$ で $Q(N,p)$ が最小値をとるようなものでなければならない．ここでは，$p=p_{\mathrm{ex}}$ のときにすべての可能なステップ長の遷移確率分布 $T(x_n,x_{n+m},p)$ のピーク位置 $f^m(x_n,p)$ が測定データ x_{n+m} の値と一致すると考え，次のように $T(x_n,x_{n+m},p)$ の x_{n+m} での値の積により $Q(N,p)$ を定義する．

$$
\begin{aligned}
Q(N,p) &= -\log\left\{\prod_{n=1}^{N}\prod_{m=1}^{N-n+1} T(x_n,x_{n+m},p)\right\} \\
&\sim \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N-n+1}\frac{(x_{n+m}-f^m(x_n,p))^2}{2\sigma^2(m,n,p)}. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

結果，各ステップの予測誤差 $(x_{n+m}-f^m(x_n,p))^2$ がステップ毎に異なる重み $1/\sigma^2(m,n,p)$ で加えられる和の形となる．$\sigma^2(m,n,p)$ はノイズの存在下で x_{n+m} に対する推測値 $f^m(x_n,p)$ がどれぐらい信頼できるかという幅を表しているとも考えられ，(8) 式中では，それがステップ長とともに大きくなる．これは，長ステップの予測誤差の和に対するカットオフの役割をしている．ただしここで，分布関数の規格化因子からくる $\log\sigma^2(m,n,p)$ という項を落し，(8) 式の和には含めていない．これは，分散 $\sigma^2(m,n,p)$ は分布の中心 $f^m(x_n,p)$ との比の形で現われることが重要であり，特に長ステップの予測時には，単調増加する $\log\sigma^2(m,n,p)$ の項の寄与が，$Q(N,p)$ に対する (8) 式中の各項の寄与を覆い隠してしまうからである (図２参照)．

ここで，(6) 式中の $\partial f(x,p)/\partial x$ の軌道平均値であるリアプノフ数 λ を先見的に知っている場合，軌道の広がりを表す $\sigma^2(m,n,p)$ を $\exp(2\lambda m)$ で置き換えることが考えられる．しかし，この置き換えには以下のような問題点がある．

- 軌道の平均的広がり方を特徴付けるリアプノフ数による置き換えという平均操作は，データ列 x_n の並び方 (生成順序) から，ダイナミクスの生成則に対する情報を十分に引き出すことはできない．

- $\lambda\approx 0$ (カオスの縁) の場合，軌道は指数関数的ではなく冪的に広がり，平均的な取扱は有効でない．

一方，(8) 式中の軌道の広がり $\sigma^2(m,n,p)$ は (6)，(7) 式よりダイナミクスの種類に応じて自動的に決まり，ダイナミクスの種類 (カオス的，カオスの縁，周期的) によらず全く同様に扱うことができる．$\sigma^2(m,n,p)$ は $|\partial f(x,p)/\partial x|<1$ の部分では小さいままであるが，$|\partial f(x,p)/\partial x|>1$ の部分ではステップ毎に大きくなっていく．

3 結果

(8) 式の有効性を調べるために, (1) 式の $F(x'_n, p_{\rm ex})$, および $F(x', p_{\rm ex})$ に対するモデル方程式 $f(x,p)$ が共にロジスティク写像

$$
\begin{aligned}
F(x', p_{\rm ex}) &= p_{\rm ex}\, x'\,(1-x'), \\
f(x,p) &= p\, x\,(1-x),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

である場合に対してシミュレーションを行なった. 特にここでは, $p_{\rm ex} = 3.8$ (カオス軌道), $p_{\rm ex} = 3.57281$ (カオスの縁) そして $p_{\rm ex} = 3.5$ (周期軌道) について, ノイズの大きさを変えた時の予測誤差を調べた.

まず, 平均自乗誤差 ((3) 式) を用いてカオス軌道を予測した場合のデータ数 (予測するステップ長) N 依存性を図 1 に示す. (9) 式のように $F(x', p_{\rm ex})$ と $f(x,p)$ を同じ関数型にしているにもかかわらず, 長ステップ予測 ($N > 50$) に対して $p_g \sim 2.9$ (周期軌道) という誤った予測値を与えているのが分かる.

また, 図 2 に $Q(N,p)$ として平均自乗誤差 ((3) 式), 遷移確率を考慮し $1/\sigma^2(m,n,p)$ 重みをつけたものおよび (8) 式に $\log \sigma^2(m,n,p)$ の項を加えたものとした時の各々のパラメータ p 依存性を示す. (8) 式の $\sigma^2(m,n,p)$ が長ステップにおける大きな予測誤差を抑え, カットオフの役割をしていて, 平均自乗誤差の場合と比較すると, $p_{\rm ex} = 3.8$ に鋭いピークを保っている. また,(8) 式中で $\log \sigma^2(m,n,p)$ の項を落した有効性がそのピークの鋭さから分かる.

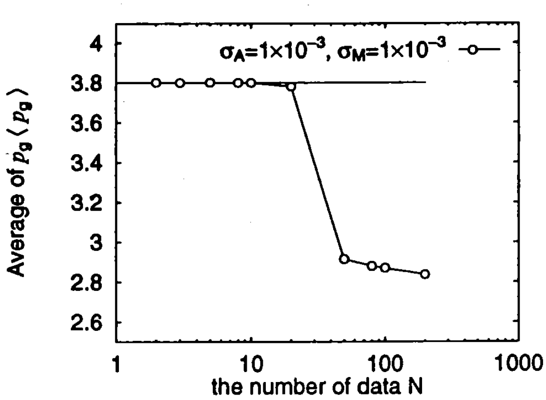

図 1 $Q(N,p)$ に平均自乗誤差を用いた時の推測値 p_g の平均値. 異なる初期値 x'_1 とノイズ列から生成した 1000 組のデータ列 $\{x_n\}(n = 1, 2, \ldots, N)$ 各々に対して $Q(N,p)$ を最小にする p_g を求めた. ($p_{\rm ex} = 3.8$.)

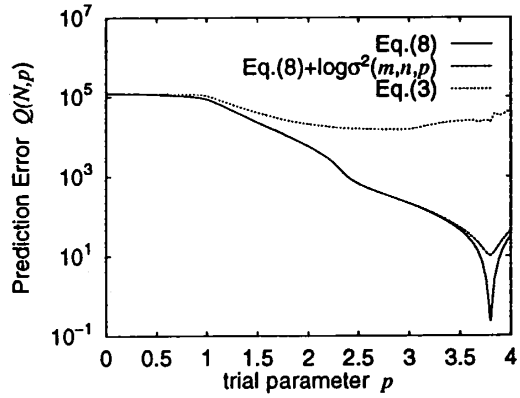

図 2 p 対 $Q(N,p)$ のプロット. (8) 式と比較するために (3) 式を $\sigma_A^2 + \sigma_M^2$ で規格化した. $Q(N,p)$ を最小にする p が $p_{\rm ex}$ に対する推測値 p_g を与える. ($p_{\rm ex} = 3.8, N = 100, \sigma_A = 1 \times 10^{-3}, \sigma_M = 1 \times 10^{-3}$.)

(8) 式を用いたときのカオス軌道の予測値をデータ数 N に対してプロットしたものが図 3 である. また, $p_{\rm ex} = 3.8, 3.57281, 3.5$ に対しての予測値 p_g の標準偏差をプロットしたのが図 4 および図 5 である. 図 3 , 4 , 5 より (8) 式を用いたダイナミクスの予測は, ダイナミクスの種類によらず, ノイズの大きさのオーダーの誤差内で正しい値 $p_{\rm ex}$ を得ることができている.

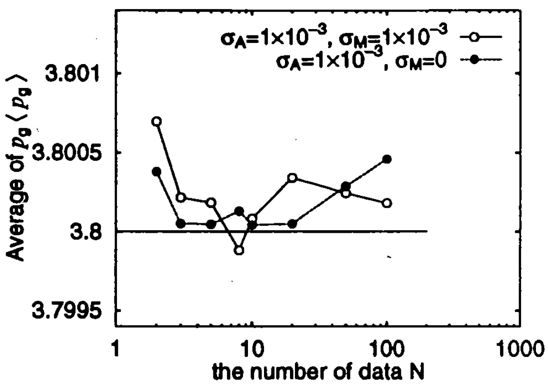

図 3　図 1 の時と同様, 異なる 1000 組のデータ列の各々に対して, 遷移確率に基づいて求めた推測値 p_g の平均値. ($p_{\rm ex}=3.8$.)

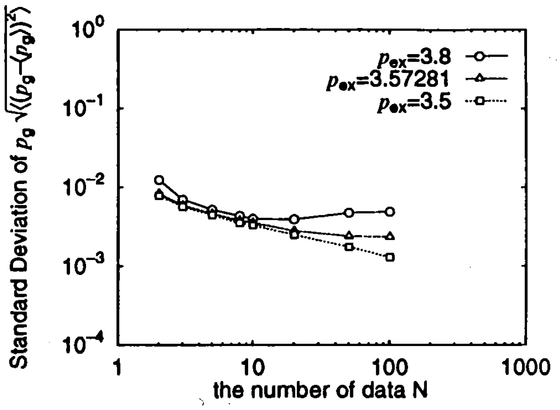

図 4　推測値 p_g の標準偏差. ($\sigma_A=1\times10^{-3},\sigma_M=1\times10^{-3}$.)

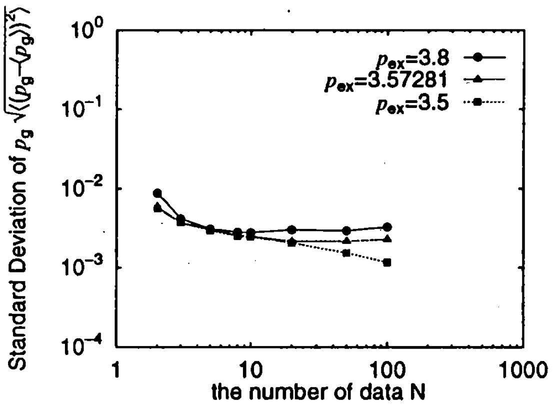

図 5　推測値 p_g の標準偏差. ($\sigma_A=1\times10^{-3},\sigma_M=0$.)

4　まとめ

予測誤差を軌道的描像からではなく, 確率的描像に立って定義した. そのようにして定義した (8) 式は, 任意のダイナミクスに対して有効であることが分かった. (8) 式ですべての $\sigma^2(m,n,p)$ を一定値とおくと (3) 式と等価となる. これを確率的描像に立って考えると, すべてのステップ長の遷移確率を同等に扱っているという点で, 平均自乗誤差はカオス軌道の予測にはむいていないといえる. 遷移確率に基づいたこの方法はデータ列の生成順序からもダイナミクスの生成則に対する情報を引き出しているので, 間欠性カオスのダイナミクスの予測等に対しても有効であると思われる.

参考文献

[1] A. Hübler and D. Pines, Center for Complex System Research Technical Report CCSR-93-2 (1993).

[2] A. Hübler and E. Lüscher, Naturwissenschaften **76**, 67 (1986); J. Cremers and A. Hübler, Z. Naturforsch **42**a, 797 (1986).

[3] D. Pierre, A. Hübler and D. Pines, preprint (1993).