セルオートマトンのエントロピーと多重度

行木孝夫
東京大学数理科学研究科

有限集合 A の無限直積空間 $X = A^{\mathbf{Z}^D}$ をとる。連続写像$\tau : X \mapsto X$が次を満たす時、セルオートマトンとよぶ。

定義 1. $\Lambda \subset \mathbf{Z}^D$を与えられた有限格子、$f$を$\Lambda$から A への写像として、任意の $x \in X$について一様に $(\tau x)_i = f(x_{i+j}; j \in \Lambda)$ となる。この fを局所写像と呼ぶ。

従って、セルオートマトンは空間的に一様な規則で時間発展を決める力学系とみなすことができる。

歴史的に見ればセルオートマトンとは自己組織化する系を実現するモデルとして提唱されたものであるが[7]、1980年代にはカオス的な力学系としての興味から集中的に数値解析が行なわれている[8]。しかし、力学系として見た場合、その一般的な性質はほとんどわかっていない。次の事実は基本的である。

定理 2. *[2]* $\tau : A^{\mathbf{Z}^D} \to A^{\mathbf{Z}^D}$は平行移動と可換な連続写像とする。このとき、$\tau$は定義 *1.*の性質を持つ。

このように、平行移動可換な連続写像としてセルオートマトンを一般的に捉える時、セル力学系と呼ぶことにする。ベルヌイシフトを不変集合とする場合の挙動とアトラクタに関する分類とがいくつか知られている。

定理 3. *[6]* $A = \{0,1\}$ とする。$\tau : A^{\mathbf{Z}} \to A^{\mathbf{Z}}$をセル力学系として、その局所写像がブール表現で $x_r + F(x_{r+1} \cdots x_{s-1}) + x_s$ $(r < 0 < s)$ と書けるならば、τは 2^{s-r}個の記号を持つ片側ベルヌイシフトに同型となる。

この定理の設定の下で、シフト不変かつτ不変で開集合について正値をとる確率測度は一様ベルヌイ測度のみである [4]。

定理 4. *[3]* 任意のセル力学系$\tau : A^{\mathbf{Z}^D} \to A^{\mathbf{Z}^D}$は次のいずれか一つを満たす。

1. 最小のアトラクタ Xが一意に定まり、Xはτの全てのアトラクタに含まれる。Xはシフト不変、その吸引域は *open* かつ *dense* であり、全測度を持つ。

2. 最小の擬アトラクタ Q が一意に定まり、Q はτの全てのアトラクタに含まれる。Q はシフト不変。さらに二つの場合がある。

   (a) Q の吸引域は全測度を持つ。

   (b) τの全ての鎖回帰集合の吸引域は零測度である。

3. τは共通部分を持たない二つのアトラクタを持つ。この場合、τには最小の擬アトラクタが非加算無限個存在する。τの全ての鎖回帰集合の吸引域は零測度である。

この定理は、局所写像を与えた時にセル力学系のアトラクタがどれに分類されるかを決めるアルゴリズムを与えてはいない。それは今後の課題である。

次に問題となるのは極限集合としてのアトラクタへ落ちて行く道筋である。それを、セル力学系のベルヌイからの繰り返しで生じるシフト不変集合のエントロピーで評価してみよう [5]。

エントロピーの時間発展を、$\nu = \mu \circ \tau^{-1}$として $h_\mu \to h_\nu$で定義する。つまり、エントロピーは格子上の確率測度の時間発展を反映するものと考える。まず、エントロピーの定義を与えよう。

定義 5. μを平行移動不変なX上の確率測度とする。エントロピーh_μは

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{a_{-n},\cdots,a_n\in A}\mu[a_{-n},\cdots,a_n]\log\mu[a_{-n},\cdots,a_n]$$

と定義する。ここで、$[a_{-n},\cdots,a_n]=\{x=(x_i)_{i\in\mathbf{Z}}\in A^{\mathbf{Z}};x_{-n}=a_{-n}\cdots x_n=a_n\}$であり、$\mu[a_{-n},\cdots,a_n]$は単語$a_{-n},\cdots,a_n$の出現確率を表す。

エントロピーの時間発展について、

$$h_\mu(X,\sigma)\le h_\nu(X,\sigma)+\int_Y h_d d\nu.$$

ここで、$d(w)=\#f_{|w|}^{-1}(w)$は単語wの多重度といい、$f_{|w|}(w)$はwを像にもつ単語の全体を表す。$d(w)$の指数関数的な発散のレートは次の極限であり、

$$h_d(y)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log d(w_n(y)) \tag{1}$$

これは$\nu-a.e.$で定数である。また、確率測度として配位空間の平衡状態を与えるGibbs測度をとれば、この不等式の等号が成立する。$A^{\mathbf{Z}}$上のGibbs測度とは、$A^{\mathbf{Z}}$上の連続関数$U(x)$を決めた時に$P,C_1,C_2>0$として

$$C_1\le\frac{\mu([x_0\cdots x_{m-1}])}{\exp(-mP-\sum_{i=0}^{m-1}U(\sigma^i x))}\le C_2$$

となるものである[1]。ここで$(\sigma x)_j=x_{j+1}$はシフト写像であり、Gibbs測度はポテンシャル関数Uによる歪みのもとで一様な単語の出現確率を表している。

本稿の設定のもとでエントロピーが非増加になることは自明だが、この不等式はエントロピーの減少率を力学系の局所的な構造から説明していると解釈できる。アトラクタの構造との関係は簡単な場合にしかわかっていない。また、空間的な位相エントロピーの減少率がアトラクタではないシフト不変集合の位相エントロピーで決まってくることが予想されている。

参考文献

[1] R.Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Springer lecture note on mathematics vol.470

[2] G.A.Hedlund, *Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical System*, Math. Systems Theory 3 (1969) 320-375

[3] M.Hurley, *Attractors in Cellular Automata*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 10 (1990) 131-140

[4] M.Miyamoto, *An equilibrium state for a one-dimensional life game*, J. Math. Kyoto Univ. 19-3 (1979) 525-540

[5] T.Namiki, *The Degree function and Cellular Dynamics*, Proc. Japan Acad., 71 Ser. A (1995)

[6] M.Nasu, *Textile Systems for Endomorphisms and Automorphisms of the Shift*, to appear in Memoirs of American Mathematical Society.

[7] J.von Neumann, *Theory of Self Reproducing Automata*, Univ. Illinois Press (1966)

[8] S.Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific (1984)