

一次元重力多体系の緩和過程とカオスの遍歴

土屋俊夫 (京都大学宇宙物理学教室 / 学振PD)

郷田直輝 (大阪大学宇宙地球科学科)

小西哲郎 (名古屋大学物理学教室)

abstracts

恒星系の最も単純なモデルとして、1次元重力シート多体系を用い、この系の進化や緩和についての基礎過程の研究を行った。特に個々のシートの運動などの微視的なダイナミクスに注目した。その結果、系は動力学の平衡状態に落ち着いた後、最終的な熱的平衡状態に至るまでの間に、もう1段階、中間の緩和現象を示すことがわかった。この緩和では、個々のシートのエネルギーは十分混合されているにも関わらず、巨視的な分布は動力学の平衡状態の時と同じ分布を持っている。このことから、熱平衡状態に至る緩和は通常の拡散過程ではなく、位相空間の中の一部の領域に長い間閉じ込められており、その領域間をゆっくりとしたタイムスケールで行き来していると考えられる。この現象は、カオスの遍歴の一例になっていると考えられる。

1 1次元重力シート多体系

この系は、恒等な N 枚の無限に広がる一様なシートから成り、それぞれのシートはそれに垂直な方向にのみ運動し、衝突したときには互いにすり抜けあうとする。シートは互いの重力のみで運動し、そのハミルトニアンはつぎのように書かれる。

$$H = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + (2\pi G m^2) \sum_{i < j} |x_i - x_j|, \quad (1)$$

ここで、 m 、 v_i および x_i はそれぞれ、表面密度、 i 番目の粒子の速度と位置である。

このモデルでは、1枚のシートが作り出す重力はシートからの距離によらず一定になる。そのためこの系の中でのあるシートが受ける重力はそのシートの右と左にある他のシートの数の差だけで決まり、シートの交差が起こるまでは放物線の軌道を描く。したがってこの系の進化は2次方程式の解を繋いでいくことで求めることができる。この性質は、この系の進化を数値計算で追う際に、高速に、しかも高精度で計算できることを保証してくれる。この系を用いて熱平衡への緩和を数値的に調べる。

この系は系全体のエネルギーが保存され、virial平衡の条件(2倍の運動エネルギー=重力エネルギー)から、系の典型的な広がり、及び速度が決まる。系全体の質量やエネルギーを変えることは単に系の長さや時間のスケールを変えるだけなので、時間の単位として、

$$t_c = (1/4\pi GM)(4E/M)^{1/2} \quad (2)$$

をとると、この系の時間進化は全く同一になる。この時間は横断時間と呼ばれ、1枚のシートが系を横切る典型的な時間になっている。以下では時間はすべてこの横断時間を用いて測ることにする。

2 Numerical simulations

初期条件としてここでは water-bag 分布と呼ばれ、位相空間の中で $-x_0 \leq x \leq x_0$ および $-v_0 \leq v \leq v_0$ の長方形の領域内に一様な密度を持つ分布をとった。この分布は平衡状態ではないので、系はエントロピー最大で定義される熱平衡状態へ向かって進化していく。

我々はこの系は熱平衡に至るまでに幾つかの異なるステージを経験することを発見した [1, 2]。これらのステージは、タイムスケールによって分けることができる。以下にそのステージをまとめる。

● 動力的平衡への緩和

動的平衡状態は巨視的な分布の力の釣り合いによって決まる平衡状態で、virial 平衡とも呼ばれる。初期に非平衡な状態から出発した系は、横断時間の数倍ほどでこの動力的平衡状態に落ち着く。この時の緩和過程は "violent relaxation" [3] と呼ばれている。この動力的平衡状態では、シートに働く力は全系の平均場からの力として近似できる。そのため、一旦巨視的な分布が定常に落ち着くと各のシートのエネルギーは保存される。この平均場近似が成り立つ状態は「無衝突的」と呼ばれ、動力的平衡状態は無衝突ボルツマン方程式の定常解として与えられる。この解は無数に存在しており、巨視的分布も熱平衡の時の分布である、等温分布とは異なる分布で平衡になっている。

● 準平衡状態

動力的平衡状態にある系にあっても、離散的な分布による平均場からのずれは摂動として働き、長いタイムスケールでエネルギーが変化する。このプロセスは通常の拡散過程であり、そのタイムスケールはシートの数 N に依存して、ほぼ $N t_c$ となる。この時間の後には各のシートのエネルギーは十分混合

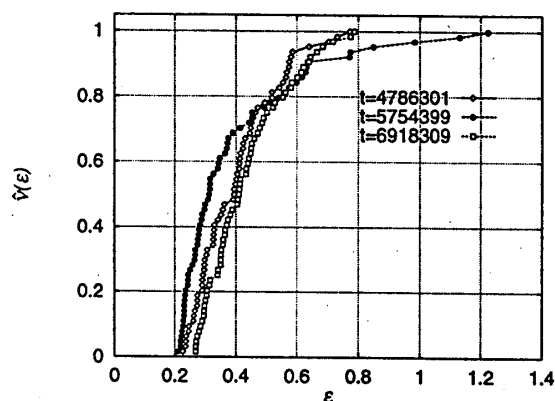


図 1: $N = 64$ の系のエネルギー分布の、3つの時刻でのスナップショット。横軸は1枚のシートのエネルギー、縦軸は横軸で示されたエネルギーよりも小さなエネルギーを持つシートの割合 (累積エネルギー分布) を表わしている。

され、等分配が成り立つ。つまり、微視的なダイナミクスでは系は緩和したように見えるが、それにもかかわらず、巨視的な分布は動力的平衡状態の時のままになっている。この巨視的な分布はエネルギーの拡散の時間を遥かに越えて安定に存在し続ける。我々はこの状態を「準平衡状態」と呼び、またこの準平衡状態への緩和は微視的運動状態のみに起こるので、これを微視的緩和と名付けた [1]。

● Itinerant Behavior between Quasi-Equilibria

準平衡状態は安定に長い間存在し続けるが、更に長い時間の後には巨視的な分布も変化する。図1にある1つのrunでのエネルギー分布の変化を示す。時刻 $t \approx 4.8 \times 10^6 t_c$ (○) ではエネルギー空間で狭い広がりしか持たない1つの準平衡状態にあったものが、 $t \approx 5.8 \times 10^6 t_c$ (●) では一旦、エネルギー空間で広がった別の分布 (遷移状態) に移った後、 $t \approx 6.9 \times 10^6 t_c$ (□) には再び元とよく似た分布に戻っている。このような遷移は次から次へと起こり、様々な

準平衡状態間を移り変わる。この遷移は決まった時間で起こるのではなく、確率的に起こり、遷移状態の寿命は巾的な分布を持っており、準平衡状態の寿命も cut-off のあるような巾的な分布になっている [4]。このような事実から我々はこの遷移はカオス現象に起因するものであり、「カオスの遍歴」と呼ばれる現象の1つになっていると考えている。

● 熱平衡状態への緩和

準平衡状態のうち、最大の寿命を持つものは先に紹介した water-bag 分布と呼ばれるもので、典型的な寿命として $4 \times 10^4 t_c$ を持つ。この時間よりも更に長いタイムスケール (例えば $10^6 N t_c$) で、系の巨視的分布の遍歴現象を平均すると、平均された分布は熱平衡状態での分布である「等温分布」になる。したがって、このタイムスケールで、系は熱的に緩和したと考えられる。この緩和は巨視的分布が等温分布になることなので、準平衡状態への緩和である、微視的緩和に対して、巨視的緩和と名付けた。

3 緩和の物理機構

Violent relaxation は Lynden-Bell[3] によって提唱されたもので、無衝突系において、粒子同士の散乱による緩和が効かない状態でも、系の平均場がはげしく変化することにより、粒子のエネルギーが変化して何らかの平衡状態が達成され则认为られている。violent relaxation により動力学平衡状態に落ち着いた後は、離散的な分布から来るランダム力または平均場の微少な揺らぎによって、粒子の軌道の拡散が起こり、熱的な緩和が達成される、というのが従来の考え方であった。

しかしながら、我々のシミュレーションによって見つけた、準平衡状態への緩和(微視

的緩和)は、この描像では理解できない。準平衡状態は2つの相反する性質を持っている。1つは、粒子の混合が十分起こり、エネルギーの等分配が成り立つなど、微視的運動状態だけを観測すると熱平衡状態と同じ性質を持っている。実際、位相空間での軌道の拡散現象は起こっている。もう1つの性質は、巨視的分布だけをみると、動力学平衡状態(無衝突の平衡状態)になっており、熱平衡状態の等温分布とは異なっていることである。

これらの現象は次のようなモデルを考えるとうまく説明することができる。

熱平衡状態である等温分布は、位相空間中のエネルギー一定面を軌道が等密度で分布している状態として与えられる。動力学平衡状態は位相空間中の限られた領域に系を表わす位相点があるときにのみ実現される。このような領域は位相空間の中に無数にあり、それぞれが違った動力学平衡状態に対応している。これらの領域はそれぞれ有限の広がりを持っており、初期に非平衡状態から出発した位相点は violent relaxation の後にある1つの領域のなかに取り込まれて動力学平衡状態が達成される。動力学平衡状態は個々の粒子のエネルギーが保存されている状態で、エネルギー空間でみると1点に留まっている。これは逆に、位相点の動きが無視できるほどの短い時間で見たものが動力学平衡状態であるということが出来る。

更に時間が経つと、位相点は平均場の揺らぎによって拡散を受け、位相空間内を広がっていく。ここまでは通常の多体系の緩和現象と同じであるが、重力系の場合、動力学平衡状態を実現する領域はその周囲を何らかのバリアーで囲まれており、軌道はこのバリアー内では十分拡散が起こっても、このバリアーによって軌道はこの領域内に長い間束縛されている。軌道はこの領域内をほぼエルゴード的に覆うため、微視的運動状態では緩和しているように見える。これが準平衡状態である。したがってこのバ

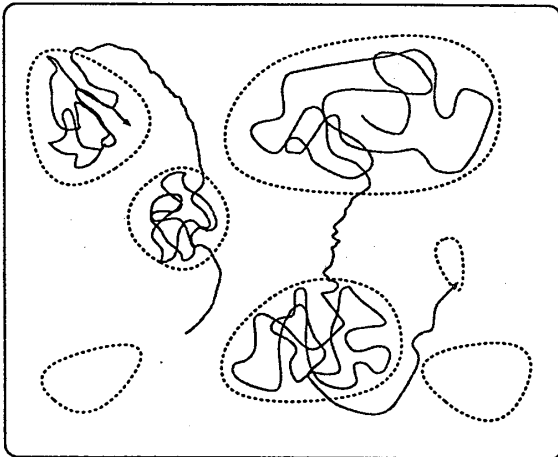


図 2: 位相空間内の軌道についての概念図。破線で囲まれた領域が準平衡状態に対応する。

リアーで囲まれた領域はそれぞれ1つの準平衡状態に対応している。

バリアーには外に通じる小さな窓があり、位相点がこの領域の中を運動している間にこの窓を見つけたときに、位相点はある準平衡状態を表わす領域から離れて、遷移状態へと移り、また別の準平衡状態の領域を見つけたときにその中に取り込まれる。(図2参照。) この遷移は系の巨視的な分布の変化を伴う。この遷移は位相点がバリアーにある窓を見つけたときにのみ起こるので、準平衡状態の寿命が確率的な分布をすることも説明ができる。

これらの領域間を移り変わる遍歴現象を更に長いタイムスケールで平均すると軌道は位相空間内のエネルギー一定平面をエルゴード的に覆いつくすこととなる。この時系は熱平衡状態となる。

もしこの描像が正しいとすると、大自由度系においても位相空間に軌道の拡散を妨げる何らかの構造が残っていることになる。また、シートの数(自由度)を増やすと、準平衡状態の数や寿命は更に増えることもわかっており、自由度を大きくすると更にこのような位相空間内の構造がはっきりと現れることを示唆している。

ここで見られた遅い緩和現象は、重力系

だけではなく、力の法則を変えた別の系でもみられることが最近になって報告されている [5]。しかし、このような遅い緩和の原因、特に重力系においては、上記で説明した、位相空間内のバリアーの正体などまだよくわかっていない。これらは統計力学の基礎問題にもつながる問題であり、今後更に詳しく調べていく必要があると考える。

参考文献

- [1] T. Tsuchiya, T. Konishi, and N. Gouda, *Phys. Rev. E*, **50**, 2607 (1994).
- [2] T. Tsuchiya, N. Gouda, and T. Konishi, *Phys. Rev. E*, **53**, 2210 (1996).
- [3] D. Lynden-Bell, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **136**, 101 (1967).
- [4] T. Tsuchiya, N. Gouda, and T. Konishi, *Astrophys. Space Science*, (1998) in press.
- [5] Lj. Milanović, H. A. Posch and W. Thirring, *Phys. Rev. E*, **57**, 2763 (1998).