

くりこみ群になにができるか

田崎晴明¹

1 話の目的

私は、「統計物理の展望」で「くりこみ群になにができるか」という題の話をした。

これは、くりこみ群の考え方、あるいは、なぜくりこみ群によって普遍性が（部分的に）理解できそうなのかといった話題を、スピン系の臨界現象を例に解説する入門的なレビューだった。一口で言ってしまうと、既に幾多の教科書に載っているような話である。さらに、近年はめっきり流行ではなくなり、話題になるのが少なくなったトピックでさえある。

そのようなレビューを敢えて行った理由を簡潔に言えば、これがとても魅力的なテーマだからである。

物質が相転移を起こす際に様々な熱力学関数が特異性を示すという臨界現象は、現象そのものだけを見てもとても面白い。さらに、異なった系での臨界現象が共通の臨界指数を持つという普遍性が認識されるにいたって、これは超一流の魅力的な問題になる。そして、くりこみ群という理論的なアイデアにより、このような普遍性を理解する鍵が得られ、非常に限られた条件では、臨界現象の定量的な理解も可能になった。これは現代物理学の素晴らしい成果の一つであり、これに比肩する話題は数えるほどしかないと思っている。

しかし、残念なことだが、臨界現象の研究そのものが活発な研究のフロンティアでなくなってしまったために² 臨界現象とくりこみ群をめぐる成果が語られることはまれになってきたようだ。その結果、若い世代には、「密度行列くりこみ群」のような概念的には（我々のいう）くりこみ群と関連してはいるものの、かなり毛色の異なった実用的な技術には明るくても、ハードコアの理論としてのくりこみ群には馴染みが薄いという人も増えてきたという。この話の目的は、そういう若い世代のみなさんに、「こういう素晴らしいものがあつた。これから、発展する可能性はある。忘れないでほしい。」というメッセージを伝えることだった。

2 広い意味での普遍性について

先ず、非常に広い意味での普遍性 (universality) という概念について、私なりの意見をまとめておこう。

物理学を学んでいて、「何故こんなにうまくいくのだろう？」という驚きや疑問を感じたことはないだろうか？ くりこみ群と直接の関係もないし、かつ自分本位の話で申し訳ないが、私は何年か前に量子スピン系の Haldane gap というとても面白い問題を研究していた。これは当時のちょっとした流行で、場の理論的手法を用いた近似理論、計算機実験、（私も

¹ 171-8588 学習院大学理学部、hal.tasaki@gakushuin.ac.jp, <http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/>

² 問題が解決したわけではない。本当に難しい重要な問題は全て残されたままである。しかし、難しい問題というのは、確かに難しい。

参加した) 数理解物理的研究、そして、現実の系での実験など様々な方向から研究が進められていた。素晴らしいことに、これらの多彩なアプローチが実にうまくみ合って研究が進んでいった。場の理論的な手法で予想されたことが、計算機実験で確かめられ、さらに本当の実験でも確認される。厳密な理論をもとに立てられた予想が、計算機で確かめられ、さらに実験でみつかっていた奇妙な事実がそれをもとに見事に説明される。物理は一つだという(最近忘れられがちな)事実をはっきりと感じさせてくれた[1]。

こういう成功例を見ていて、ふと「何故こんなにうまくいくのだろうか?」と思ってしまう。確かに、近似理論、厳密な理論、計算機実験は、いずれも理想化したモデルを扱っている、これらのつじつまが合うのはもっともなことだろう³。しかし、実験と話が合うというのは、どういうことなのか? 理論的、数値実験的に研究されていたのは、一直線上にスピンがずらりと並んだ一次元量子スピン系である。現実には一次元的な系などはないから、実験で用いられたのは(三次元的な固まりの中で)ある一方向だけにスピンの結合が強い擬一次元系である。さらに、一口にスピン系とはいっても、現実の物質は Ni や Cl など何種類もの原子が実にややこしく絡み合っていて、そこには不純物だって混ざっているだろう。それでも、適切な実験(磁化測定、中性子散乱、ESR、NMR、比熱測定と何でもある!)を行えば、理論を通して「見て」いるのと同じ一次元スピン系のふるまいが、ありありと「見える」! これは、やはり不思議なことではないだろうか? 不純物の影響、磁性を担う電子の運動の自由度、複雑な分子構造、さらには、原子の内部の自由度、原子核内部の自由度…といったミクロなレベルでのいわば無限の詳細な要素は顔を出さないのだろうか? 実験結果を虚心坦懐に眺めれば、確かにこれらの無限の詳細は完全に静まり返っていて、その静かな背景の上に「スピン系」の自由度だけが生き生きと活動しているように思われるのである。

これこそが、(私見では)物理学を支える最も重要な概念である「普遍性(universality)」の一つの現れなのである⁴。「普遍性」とは、物理系の(マクロな)ふるまいの本質的な部分が、系の(ミクロな)詳細には依存しないという経験事実を指す⁵。「普遍性」は、物理学という営みを可能にするための不可欠な前提であると思う。仮に、実験で観測される結果に、非常に多くの詳細な要素が有意に関わってくるような状況があったとすると⁶、それを説明するためのモデルは現実の系と同じだけの詳細を持った極めて複雑なものになってしまう。そのようなひたすら複雑なモデルを解析して理解することはおそらく人類には不可能だし、そういうことが仮にできたとしても、人類の知的な趣味からして面白くはなさそうだ。ある程度理想化したモデルを用いて(人間にも面白い)研究することに意味があるのは、「普遍性」の一つの現れなのである。Haldane gap の研究で、実験家と数理解

³ 本当の事をいうと、場の理論的な手法がうまくいく背景には、普遍性があり、くりこみ群的なアイデアがある。

⁴ 専門家向けの注: ここで議論しているのは単なるエネルギースケールの分離であって、「普遍性」ではないという意見があるかもしれない。しかし、多自由度系ではエネルギースケールを分離するのはたやすいことではないので、そこにも「普遍性」という言葉で括りたい理解し切れていない要素があると思う。たとえエネルギースケールの分離がうまく行えたとしても、低エネルギーの有効理論が理想的なスピン系と一致するとは考えられないので、この段階でも「普遍性」は必要である。もちろん、「臨界現象の普遍性は、より深いものを持っている」という意見には私も賛成である。

⁵ 正確な歴史は知らないが、統計物理学での相転移と臨界現象の研究の過程ではじめて「普遍性」ということが明確に認識されたと言われている。3節を見よ。

⁶ これが度を越せば、実験は再現性を失い、科学の実験は不可能になる。

理学者が同じ問題を扱い、同じ面白さや興奮を味わうことができたのは、まさに「普遍性」のおかげなのである。

残念ながら、スピン系の実験で「普遍性」が見られる本当の理由を我々は理解していない。これらの実験が（あるいは、もっと広く、有史以来の科学が）成功裏に進んできたという経験事実が、「普遍性」の存在を示唆しているだけである。そういう意味で、「普遍性」の起源を理解しようとすることは、物理 (physics) の範囲から半歩外へ踏み出した “meta-physics” の領域に属するのかもしれない⁷。

それでも、物理学は「普遍性」を理解するための努力を続けるべきだと思う。「普遍性」の本当の意味を少しずつ理解することで、我々の科学はその限界を少しずつ広げ、より豊かで深いものになっていくと信じる。

3 臨界現象の普遍性について

研究会では、液相・気相転移や磁気相転移の実験のグラフを見てもらい、特に、相転移点近辺での物理量のふるまいの特異性を特徴づける臨界指数の実験データを示した。そして、異なった (Ising 型異方性を持つ) 磁性体での臨界指数、液相・気相臨界点における臨界指数、そして、計算機実験によって得られた 3 次元 Ising model の臨界指数がすべて等しい値を持つのではないかという驚くべき予想を述べた。これが、臨界指数の普遍性である。

これは、前節で述べた広義の普遍性よりは限定されているが、逆に極めて強烈で（少なくとも直感的には）より不可思議な現象である。磁性体、流体、統計モデルというかなり異なった物理系を舞台にして、定量的に等しい臨界現象が見られるのである。この事実は、これらの臨界現象の背後（あるいは頭上）には何らかの普遍的な構造があることを示唆している。特定の物理系を離れても存在し得る単一の「普遍的な構造」が、臨界点近傍の様々な系に「宿る」のだという思想が生まれる⁸。

この普遍的な構造を数理的にきちんと理解したいというのが、一つの目標になる。

4 くりこみ群の役割

くりこみ群は、臨界現象の背後にある「普遍的な構造」を「くりこみ変換の固定点とその周辺でのくりこみ群の流れ」という数学的な構造により理解する可能性を与えてくれる理論的な方法論、ないしは、ものの見方である。別の言い方をすれば、「くりこみ群」は、我々に「普遍性」について語る可能性を与えてくれる「ことば」である⁹。ここではくりこみ群の方法について述べる余裕はないので、いくつかの文献 [2, 3, 4] をご覧いただきたい。今日では、くりこみ群は、臨界現象を理解するためのもっとも強力な方法と認識され

⁷ 私は、「普遍性」は自然科学に存在基盤を与えてくれる（健全な）信仰であると思っている。ただし、全ての研究分野で「普遍性」が人類の味方をしてくれる（あるいは、してくれている）と信じるほど楽観的ではない。

⁸ 肉体に魂が「宿る」というのと同じ語法である。

⁹ 特別な場合に使える「ことば」は他にもある。たとえば conformal field theory は 2 次元の場の理論の普遍性を語る事については驚くほど強力な「ことば」である。

ている。

しかし、上で例にあげた現実的な三次元の磁性体、流体、Ising model の臨界現象の普遍性とそれを司る「普遍的な構造」がくりこみ群によってきちんと理解されたかというところではない。くりこみ群の哲学と方法がある描像を与えはしたが、それを数理的な理解にまで磨きあげるといふ計画は恐ろしく困難で、おそらくは、我々が未だ理解しきっていない本質的な要素がたくさんあると思われる。

もっとも厳密性の高い数理物理的な理解のレベルで議論すれば、くりこみ群によって臨界現象の問題が解決したのは、4 次元以上での非線形性のごく弱い φ^4 模型くらいのものである。三次元の磁性体、流体、Ising model の臨界現象の普遍性を理解したいという目標を思えば、あまりにもささやかな成果であるが、それでもこれらの「厳密なくりこみ群」の成果は数理物理学の分野でももっとも素晴らしくかつ困難なものの一つである。要するに、問題はそれほどまでに難しいということである。

そういう意味で、今後の課題は無限にあると言ってよいと思う。果たして既存のくりこみ群の哲学を発展させることで、3 次元の臨界現象を理解することができるのか？また、くりこみ群は、2 節で議論したような広い意味での普遍性を理解する¹⁰ 鍵になり得るのか？こういった問いに答えるためには、我々はまだまだ多くの本質的な問題を見だし、そして、解決して行かなくてはならないだろう。

参考文献

- [1] 勝又紘一、田崎晴明、編・著：「Haldane gap — スピン系におけるマクロな量子現象」（日本物理学会、新編論文選集 VIII）
- [2] 数理科学 1997 年 4 月号「くりこみ理論の地平」には、比較的読みやすい解説が集められている。
- [3] 田崎晴明：「くりこみ群とは何か」（パリティ 1996 年 6 月号）では、くりこみ群による臨界現象の扱いを簡単な Newton 力学の例を通して説明した。
- [4] 江沢洋、渡辺敬二、鈴木増雄、田崎晴明、「くりこみ群の方法」、岩波講座・現代の物理学 13 （岩波書店、1995）の第 3, 4 章は φ^4 模型のくりこみ群による扱いについての丁寧な解説だが、読みこなすのは困難かもしれない。

¹⁰ このような広い普遍性をどこまで理解しようと努力すべきなのかという本質的な問題もある。