物性研究　72−2（1999−5）

確率的フィードバックを受ける力学系における間欠的振舞と1/fゆらぎ

1)橋本 昇　2)豊田規人
1)北海道医療大学　2)北海道情報大学

（1998年8月10日受理）

系の状態変数が各時刻においてGlauber-Lachs分布に従って確率的な値をとり、その値が更に次の時刻の分布の平均値を決めるようにフィードバックされる「状態に依存した確率的フィードバック」を受ける力学系を考える。この系の状態変数は、フィードバックの強さを制御するパラメータの適当な値の下で間欠的振舞いをし、この間欠性におけるラミナー長nの分布は $(1+n/C)^{-(2+\delta)}$ に比例する。ここで、δ はコントロールパラメータの値によって決まる正数でCは定数である。δ を0に近づけると、平均ラミナー長は発散するが、このとき状態変数のパワースペクトル密度(PSD)は低振動数側で1/f型になる。

確率的な力学模型が示す間欠性としては、結合カオス系をモデル化した相乗確率模型が示すオンオフ間欠性が知られているが、オンオフ間欠性ではラミナー長分布は指数-3/2のべき乗則に従い、PSDも低振動数側で$1/f^{1/2}$になる。我々の力学系が示す間欠性はラミナー長分布、PSDともオンオフ間欠性とは異なっており、確率模型が示す新しいタイプの間欠性と考えられる。

一方、我々の力学系におけるバースト長分布は、相加雑音を受けたオンオフ間欠性におけるラミナー長分布と同じ機構で決まることが示され、実際、数値シミュレーションによって得られたバースト長分布はバースト長が短い領域では指数-3/2のべき乗則に従い、バースト長の長い領域では指数関数的に減衰する。

§1．はじめに

我々は以前に、本来時間相関をもたないPoisson 過程を時間相関をもつように拡張した力学系として、次のような確率過程を考え、その性質を調べた[1]。

離散時刻$t=n\tau$ $(n=0,1,2,\cdots)$における系の状態が0または正の整数値をとる状態変数$x(t)$で表され、$x(t)$の値はPoisson分布

$$P\{x(t)=m \mid B(t)\}=\{B(t)\}^m \exp[-B(t)]/m! \tag{1}$$

に従って確率的に決まるが、この分布の平均値B(t)は1つ前の時刻の系の状態（出力）x(t-1)のフィードバックを受け、次のように時々刻々変化していくとする。

$$B(t)=B_0+\beta x(t-1)\{Q-x(t-1)\} \qquad \text{for } x(t-1)\leq Q$$
$$=B_0 \qquad \text{for } x(t-1)>Q \tag{2}$$

ここで、B_0, β, Qは系のコントロールパラメータで正の定数である。β, Qは系のフィードバックの強さを、B_0は系が”基底状態”x(t)=0をとり続ける確率を制御している。この系では、ある時刻における状態x(t)は次の時刻の状態変数の平均値のみを決めるようにフィードバックされている。従って、この系は相乗確率過程と同様な「状態に依存したゆらぎをもつ確率的フィードバック」機構をもつ力学系と言うことができる。相乗確率過程はオンオフ間欠性と呼ばれる間欠性を示すことが知られているが[2]、我々の力学系も制御変数の変化にともない、間欠的振舞いをする。

間欠性の議論で用いられるラミナー状態とバースト状態は今の場合x(t)=0とx(t)>0で定義するのが自然である。この力学系はQを固定したとき、”写像”(2)から予想されるように、$\beta_c\sim 1/Q$近傍でラミナー優勢の状態からバースト優勢の状態へ相転移的変化をすることが期待される。実際、コンピュータによる数値シミュレーションの結果、B(t)の長時間平均<B>はβの値と共にシグモイド関数的な変化をすることがわかった。この”相転移”では明確な転移点は存在せず、Q=30の場合$0.04 \lesssim \beta_c \lesssim 0.06$の範囲で緩やかにラミナー優勢の状態$\langle B\rangle\simeq 0$からバースト優勢の状態$\langle B\rangle \gtrsim 1$へ移行する。

このβの転移領域で、x(t)の時間変化はラミナーとバーストを繰り返す間欠的変化を見せるが、この間欠的変化では、ラミナー長分布は以下に述べるように指数関数型になる：いま、ある時刻tでラミナー状態が実現すると、(2)よりB(t+1)=B_0となり、次の時刻t+1でラミナー状態が実現する確率は$\exp[-B_0]$となる。従って、一旦ラミナー状態が実現すると、n離散時間ラミナー状態が継続する確率は$\exp[-nB_0]$となる。一方、バースト長分布はnが小さい領域では指数-3/2のべき乗的振舞いが見られ、nが大きくなるにつれて"shoulder"が現れ、その後指数関数的に減少する。

この模型ではラミナー状態ではフィードバックが0となる為、ラミナー状態の継続は純粋なPoisson過程となる。その結果、バーストとバーストの間に時間相関がなく、x(t)のパワースペクトル密度(PSD)も低振動数側で平坦になる。対照的に、相乗確率模型が示すオンオフ間欠性では、ラミナー長分布は指数-3/2のべき乗則に従い、そのPSDも低振動数領域で$\sim f^{-1/2}$、それより大きな振動数領域では$\sim f^{-1}$の振舞いをする[2]。

我々は今回(1),(2)で与えられる模型（模型I）を拡張し、状態変数x(t)が長時間相関をもち、

PSDが1/f型になるようなモデル力学系（模型II）をつくることを試みる。具体的には、(1)におけるPoisson分布をPoisson分布を拡張したGlauber-Lachs(G-L)分布[3]で置き換え、新たに導入される自由度に過去のバースト状態を”記憶”させ、その”記憶”をラミナー状態の継続に反映させる。その結果、バーストとバーストの間に相関が生じ、1/f型のPSDが得られるはずである。"1/fゆらぎ"は自然界に幅広く存在し[4]、その発生メカニズムを巡って、多くの研究者の関心を引き付けている。様々な学問分野で普遍的に用いられるPoisson分布や、それを拡張したG-L分布に基づいて"1/fゆらぎ"を調べることは、我々の世界に幅広く存在する"1/fゆらぎ"を理解する上で意味のあることと思われる。

§2. モデル

前節で述べたように、離散時刻tにおいて状態変数x(t)が従う分布(1)を次のGlauber-Lachs分布で置き換える。

$$P\{x(t)=m \mid A(t),B(t)\}=[A(t)^m/\{1+A(t)\}^{m+1}]\exp[-B(t)/\{1+A(t)\}]$$

$$\times L_m[-B(t)/\{A(t)\{1+A(t)\}\}] \qquad (3)$$

ここで、A(t),B(t)は平均値を与えるパラメータで$\langle m\rangle=A(t)+B(t)$であり、A(t)=0（B(t)=0）とおくと(3)はPoisson（幾何）分布になる。$L_m(z)$はm次のラゲール多項式である。

模型Iの場合と同様に、A(t),B(t)は１つ前の時刻の状態（出力）のフィードバックを受けて、x(t-1)によって以下のように決められるとする。まず、B(t)に対しては(2)で$B_0=0$とおいた式を仮定する。A(t)に対しては過去のバースト状態を”記憶”するように次式を仮定する。

$$A(t+1)=A(t)+\gamma x(t)A(t)-\alpha A(t)^2 \qquad (4)$$

ここで、αとγは正の定数とする。(4)は連続時間の極限では$dA(t)/dt$を与える式になり、系の状態がA(t)の時間変化に”記憶”されることになる。

(i)ラミナー長分布

(4)を仮定すると以下に示すように、ラミナー長nの分布はn→大でべき乗則に従うことになる。模型Iの場合と同様に、ラミナー状態とバースト状態はそれぞれx(t)=0とx(t)>0で定義する。時刻t_0にラミナー状態が実現すると、$x(t_0)=0$であり$B(t_0+1)=0$となるので、時刻t_0+1にラミナー状態が出現する確率は(3)より

$$P\{x(t_0+1)=0 \mid A(t_0+1),0\}=1/\{1+A(t_0+1)\}$$

$$=\exp[-\ln\{1+A(t_0+1)\}]\cong\exp[-A(t_0+1)] \tag{5}$$

を得る。但し、$A(t_0+1)\ll1$を仮定した。従って、n離散時間ラミナーが継続する確率Λ_nは

$$\Lambda_n\cong\prod_{k=1}^{n}\exp[-A(t_0+k)]=\exp[-\Sigma A(t_0+k)] \tag{6}$$

となる。一方、(4)において$x(t)=0$とおくと漸化式

$$1/A(t_0+k+1)-1/A(t_0+k)=\alpha/\{1-\alpha A(t_0+k)\} \tag{7}$$

が得られ、この式から$\alpha A(t_0+k)\ll1$に対して$A(t_0+k)\cong1/\{\alpha k+1/A(t_0)\}$が得られるので、結局

$$\Lambda_n\cong\exp[-\sum_{k=1}^{n}\{1/\alpha(k+C)\}] \tag{8}$$

となる。但し、$1/\{\alpha A(t_0)\}\equiv C$とおいた。

Λ_nの$n\to$大における振舞いを評価するため、(8)の中の総和を積分で置き換えて計算すると、

$$\Lambda_n\cong\exp[-\ln[1+n/C]/\alpha]=1/(1+n/C)^{1/\alpha} \tag{9}$$

を得る。この式から規格化されたラミナー長分布は$\alpha<1$の場合

$$f_L(n)=(1/\alpha-1)/\{C(1+n/C)^{1/\alpha}\} \tag{10}$$

となる。

平均ラミナー長$\langle n_L\rangle$は$\alpha\geqq1/2\equiv\alpha_c$では発散するが、$\alpha<\alpha_c$では有限な値をとり

$$\langle n_L\rangle=\int_0^\infty dn\,n f_L(n)=\alpha C/\{2(\alpha_c-\alpha)\} \tag{11}$$

で与えられる。以下の議論ではαの値は(11)が成り立つ$\alpha<\alpha_c$に限ることにする。

(10)より模型IIにおけるラミナー長分布$f_L(n)$は$n\to$大と共に指数$-1/\alpha$のべき乗則に漸近することがわかる。従って、IIは単純な指数関数型であるIの分布とは明確に異なるラミナー長分布を持つことになる。但し、Cの値は$A(t_0)$に依存しており、$A(t)$は確率変数$x(t)$を含む方程式(4)によって時間発展するので、$A(t_0)$はt_0の値によって様々な値をとりうる。従って、(10)の中のCは$1/\{\alpha A(t_0)\}$の値のゆらぎを平均化した"effective"な定数と見なさなければならない。

(10)を実際の数値シミュレーションによって得られるラミナー長分布のデータと比較するときは、Cは"adjustable parameter"として扱う。

以上のことから、模型IIでは$\alpha \to \alpha_c$で平均ラミナー長が無限大になり、このときラミナー長分布はn大の領域で指数-2のべき乗則に従うことになる。又、$A(t_0)$の値はt_0以前の系の状態変化を"記憶"していることから、特にt_0直前のバースト状態とt_0から始まるラミナー状態の継続時間の間には明確な相関が生じると思われる。模型IIでは、この"記憶"効果と$\alpha \to \alpha_c$で平均ラミナー長が発散する結果、模型Iには存在しなかったような長時間に及ぶ状態変数間の相関が生じ、PSDが低振動数側で1/fの振舞いをすることが期待される。

(ii)バースト長分布

我々が仮定するコントロールパラメータの領域では、バースト状態においては殆どの区間で$A(t) \ll B(t)$が成り立っており、(3)は(1)のPoisson分布で近似することができる。つまり、バースト長分布に対しては、模型IIは$B_0 \ll 1$の場合の模型Iとほぼ同じ結果を与えると考えられる。そこで、(1)と$B_0=0$とおいた(2)に基づいてバースト長分布を求めてみる。

まず、時刻tにおける状態変数$x(t)$は平均値$B(t)$のPoisson分布に従う確率変数と定義されているので、$x(t)-B(t) \equiv f(t)$を考えると$f(t)$は平均値0の周りに分散$B(t)$で分布する確率変数ということになる。バーストの開始時と終了時の短い区間を除いて$B(t)>1$が成り立つと考えられるので、Poisson分布をGauss分布で置き換え、$x(t)$を連続変数とみなす近似をすると、$f(t)$は平均値0、分散$B(t)$のGauss分布に従う確率変数と見なすことができる。更に、$f(t)/\sqrt{B(t)} \equiv r(t)$で新しい確率変数$r(t)$を導入すると、$r(t)$は平均値0、分散1のGauss分布に従う確率変数になる。$x(t)=B(t)+\sqrt{B(t)}\,r(t)$を(2)に代入して$x(t)$を消去すると、$B(t)$に対する時間発展方程式

$$B(t+1)-B(t)=[\beta\{Q-r(t)^2\}-1+G\{B(t)\}r(t)]B(t)-\beta B(t)^2 \qquad (12)$$

を得る。ただし、$G\{B(t)\} \equiv \beta\{Q/\sqrt{B(t)}-2\sqrt{B(t)}\}$とおいた。$r(t)$は$\langle r(t)r(t')\rangle=\delta_{tt'}$を満たすGaussian white noiseである。(2)はまた、$x(t) \geqq 1$となるバースト期の大部分において、$B(t)$の値が

$$B_s \equiv \beta(Q-1) \;\leqq\; B(t) \;\leqq\; B_{re} \equiv \beta Q^2/4 \qquad (13)$$

の範囲にあることを示しているので、$B(t)$は変動範囲が(13)になるような境界条件の下で(12)に従って時間発展することになる。バーストの開始時と終了直後は$B(t)=0$なので、この模型においてバースト長を求める問題は、$B=B_s$から出発してB軸上で相乗性のnoiseを受けながらランダムな運動をし、$B=B_{th} \approx B_s$に達すると吸収される仮想的な粒子の寿命を求める問題とほぼ等価になる。

(12)は連続時間極限で相乗型のnoiseを受けたLangevin方程式になるが、非線形項を含み、解析的な解を求めるのは困難である。ここでの議論は、バースト長分布の大間かな形を求めるのが第一の目的なので、この目的を損なわない範囲で解析解が得られるように、(12)において次のような簡単化を行う。まず、Qの値は$Q>>\langle r(t)^2\rangle=1$を想定しているので(11)の中の$\beta\{Q-r(t)^2\}$は$\beta Q$で近似する。次に、$G\{B(t)\}$は$B(t)$の関数として$B_{th}\simeq 1\leqq B(t)\leqq B_{re}\simeq 10$に対して図1のように変化するが、これを図中に点線で示した$B(t)$の1次関数$F\{B(t)\}=a-bB(t)$で近似する（$Q=30, \beta=0.045$の場合$a\cong 0.6, b\cong 0.045$）。$F(B)$はBの値がB_{th}の近くで$G(B)$からずれが目だつが、$3\lesssim B$ではほぼ$G(B)$の変化を再現する。次節で述べる数値シミュレーションの結果では、極端に短いバースト状態を除けばバースト期ではほぼ$3\lesssim B(t)$であり、$G\{B(t)\}$を1次関数$F\{B(t)\}$で置き換える近似をしても、バースト長分布の定性的な形はそれほど大きくは変わらないものと思われる。そうすると(12)は

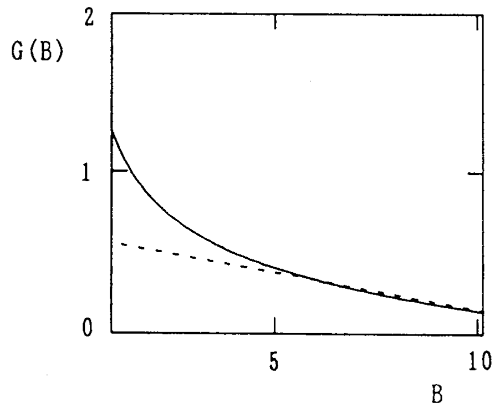

図1：$\beta=0.045$、$Q=30$の場合の$G(B)$ vs. B。
点線は$F(B)=0.6-0.045B$。

$$B(t+1)-B(t)=\{\beta Q-1+ar(t)\}B(t)-\{\beta+br(t)\}B(t)^2 \tag{14}$$

となり、aは相乗性のゆらぎの大きさを与えることがわかる。

$B(t)^2$の項は大部分の時間において$B(t)$の増加を抑える役割を果たしているが、βとbの値が$\beta Q-1$及びaに比べて1桁小さいため、この項の効果が効き始めるのは$B_{re}\lesssim B(t)$の領域である。我々は(12)の制限とこの項の効果をまとめて$B(t)=B_{re}$における完全反射の境界条件で置き換える。以上のことから、$B(t)$に対する時間発展方程式として結局

$$B(t+1)-B(t)=\{\beta Q-1+ar(t)\}B(t) \tag{15}$$

境界条件：$B(t)=B_{re}$で完全反射
　　　　　$B(t)=B_{th}$で完全吸収

を得る。(15)の長時間の振舞いは微分方程式

$$dB(t)/dt=\{\beta Q-1+ar(t)\}B(t) \tag{16}$$

で表されるが、ここで新しい変数$y(t)=\ln[B(t)]$を導入し、相乗型から相加型のLangevin方程式

$$dy(t)/dt=\beta Q-1+ar(t) \tag{17}$$

境界条件：$y(t)=y_{re}\equiv\ln[B_{re}]$で完全反射

$y(t)=y_{th}\equiv\ln[B_{th}]$で完全吸収

へ移る。(17)を満たす$y(t)$の確率分布関数を$f(t,y)$とすると、$f(t,y)$は次のFokker-Planck方程式を満たす[5]。

$$\partial f(t,y)/\partial t=-v\partial f(t,y)/\partial y+(D/2)\partial^2 f(t,y)/\partial y^2 \tag{18}$$

境界条件：$J(t,y_{re})=0$

$f(t,y_{th})=0$

ここで、$v\equiv\beta Q-1$、$D\equiv a^2$であり、$J(t,y)=vf(t,y)-(D/2)\partial f(t,y)/\partial y$は確率密度流を表す。

結局バースト長分布を求める問題は、y軸上で$y=y_s\approx y_{th}$から出発し、Gaussian white noiseを受けながらランダム運動をする粒子が$y=y_{th}$で完全吸収されてしまうまでの時間"first passage time"t_pの分布を求める問題に帰着されたことになる。この"first passage time"の分布は吸収境界における確率密度流$-J(t_p,y_{th})$に比例すると考えられるので[6]、(18)を初期条件$f(0,y)=\delta(y-y_s)$のもとで解いた解を用いて表すことができる。(18)の解は対応する固有値方程式を与えられた境界条件のもとで解くことにより得られるが、この解は$v=0$の場合以外は解析的に表すことができない[5]。しかし、我々の模型では元々$\beta Q\sim1$の近傍を問題にするので、バースト長分布の定性的な形を議論するためには$v=0$の解を用いれば十分と考えられる。

$v=0$の場合の解は

$$f(t,y)=(2/\sqrt{D\tau_d})\sum_{I=0}^{\infty}\sin[\kappa_I(y_s-y_{th})]\sin[\kappa_I(y-y_{th})\exp[-\lambda_I t], \tag{19}$$

$$\kappa_I=(I+1/2)\pi/(D\tau_d)^{1/2},\quad \lambda_I=(2I+1)^2\pi^2/(8\tau_d),\quad \tau_d=(y_{re}-y_{th})^2/D$$

と書ける[5]。これより$y_s\approx y_{th}$に対して

$$f_B(t)\sim -J(t,y_{th})=(\pi^2\eta/4\tau_d)\sum_{I=0}^{\infty}(2I+1)^2\exp[-\lambda_I t] \tag{20}$$

ただし、$\eta \equiv (y_s-y_{th})/(y_{re}-y_{th})<<1$である。(20)は$t<<\tau_d$、$t>>\tau_d$の場合それぞれべき乗的及び指数関数的振舞いをする：

$$f_B(t) \sim \eta\,(\tau_d/2\pi)^{1/2}t^{-3/2} \qquad (t<<\tau_d)$$
$$\sim \eta\,\{\pi^2/(4\tau_d)\}\exp[-\pi^2 t/(8\tau_d)] \qquad (t>>\tau_d) \qquad (21)$$

(21)より我々の模型のバースト長分布はt小の領域で指数-3/2のべき乗則、t大の領域で指数則に従うことがわかる。以上の議論はA. Cenys et al.[5]がnoisyオンオフ間欠性[7]と呼ばれる相加雑音を加えられたオンオフ間欠性のラミナー長分布を説明する為に用いた議論と本質的に同じであり、ここでの完全反射境界及び完全吸収境界は彼らの議論の"noise floor"と"laminar threshold"にそれぞれ対応している。その結果、我々の模型におけるバースト長分布はnoisyオンオフ間欠性のラミナー長分布と同じ構造をもち、(21)で表される特徴的な形をもつことになる[8]。

§3．数値シミュレーション

我々はコンピュータによって、時間発展が(2),(4)で与えられるG-L分布(3)に従い、0及び正の整数値をとる乱数を各時刻で発生させ、模型IIにおける状態変数x(t)の時間変化を数値的に調べてみた。

コントロールパラメータの値は以下のように選んだ。まず、(2)においてはIの場合と比較するために、$B_0=0$とおく他はIで用いた値$Q=30$, $\beta=0.045$をそのまま用いた。(4)におけるαの値は長時間相関を与える$\alpha \approx \alpha_c=1/2$を考えているので$\alpha=0.48$ととり、$\gamma$の値を変化させてx(t)を計算し、そのPSDをFFTを用いて求めてみた。但し、PSDは区間$t=0\sim 2^{17}$において、異なる初期値及び異なる乱数系列から計算されたx(t)の時系列データを100セット用意し、それぞれのデータセットから得られるPSDを平均することにより求めた。その結果、$0.02 \lesssim \gamma \lesssim 0.04$の範囲でx(t)のPSDが低振動数側で1/f型になることがわかった。以下では$\gamma=0.032$に固定する。

以上のようにパラメータの値を選んだときの計算結果を以下に示す。図2にx(t), B(t), A(t)の典型的な時間変化を示す。この図から、x(t)とB(t)はほぼ同期してラミナー状態とバースト状態を交互に繰り返す間欠的変化をしているのがわかる。一方、A(t)は(4)から予想される様に、x(t)のバースト期には平均として増加し、ラミナー期にはほぼラミナー継続時間の逆数に比例して減少しているのが見てとれる。図3は区間$t=0\sim 2^{19}$における平均ラミナー長を$\alpha_c-\alpha$の関数として表したもので、実線は理論式(11)の結果を表す。(11)式においてCは弱いα依存性をもっていると考えられるが、簡単のためにここでは定数と見なし、後で述べる$\alpha=0.48$における

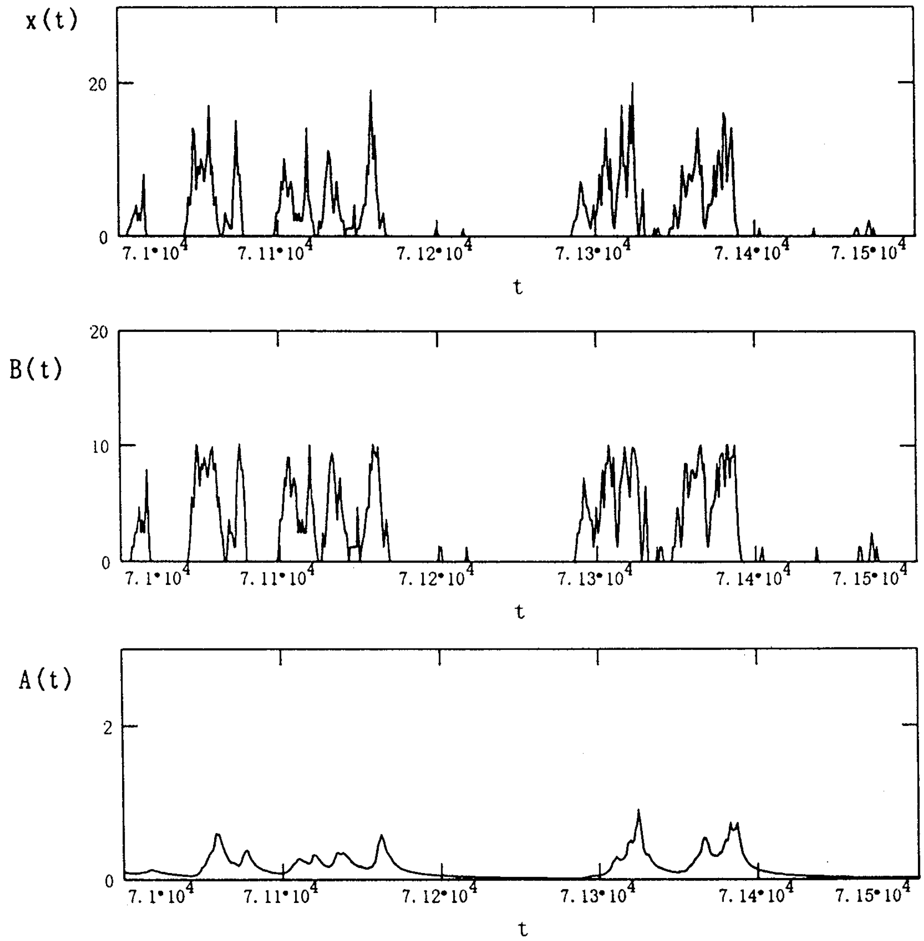

図2:X(t),B(t),A(t)の時間変化。

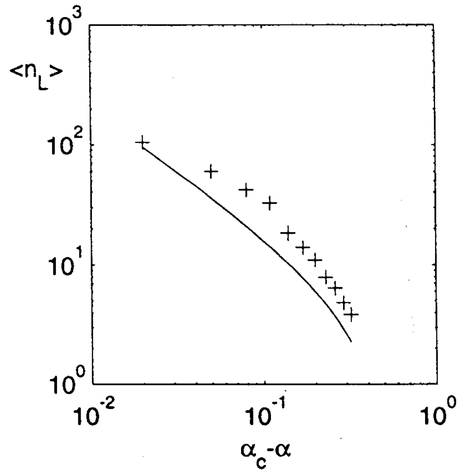

図3:平均ラミナー長$\langle n_L \rangle$ vs. $(\alpha_c-\alpha)$。実線は理論式(11)を表す。

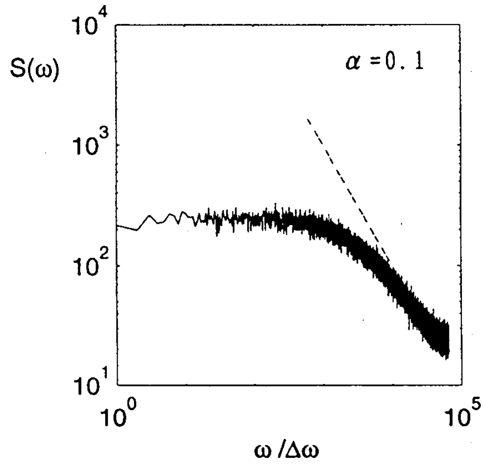

図4:x(t)のPSD $S(\omega)$ vs. $\omega/\Delta\omega$。但し、$\Delta\omega=2\pi/2^{17}$で、点線は$S(\omega)\sim\omega^{-1}$を表す。

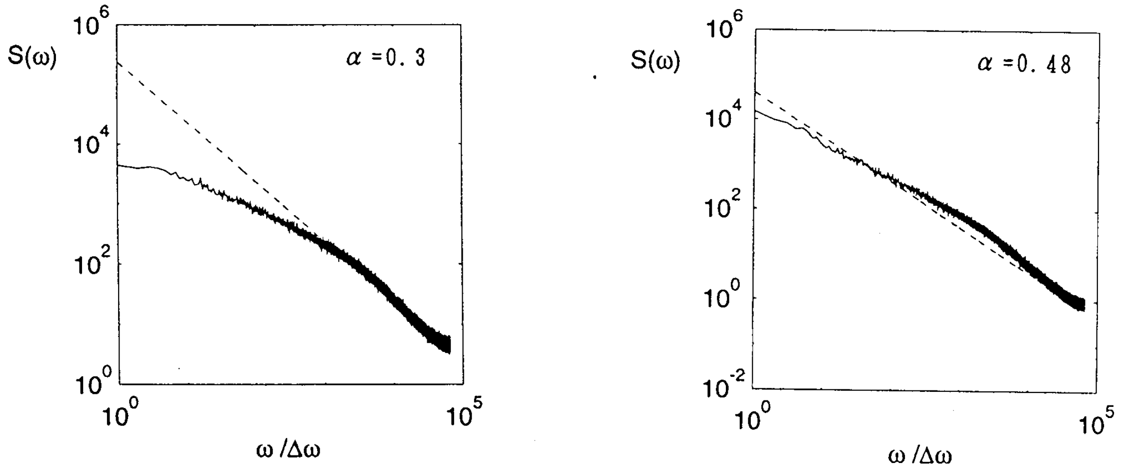

図4:x(t)のPSD S(ω) vs. ω/Δω。但し、$\Delta\omega=2\pi/2^{17}$で、点線は$S(\omega)\sim\omega^{-1}$を表す。

(10)とラミナー長分布の数値データとの比較から得られた値C=8を用いた。$\alpha_c-\alpha$が大きくなるにつれて理論式とデータとの不一致が目立つようになるが、これはCのα依存性を無視したためと考えられる。図4はα=0.1,0.3,0.48に対するPSDである。(11)から予想されるように、αがα_cに近づくにつれて平均ラミナー長が発散し、それに応じてPSDの低振動数成分が増大して1/f型になる様子がわかる。

模型IIの$\alpha\approx\alpha_c$における1/f型のPSDはA(t)の”記憶”効果とラミナー長が$\sim 1/n^2$のべき乗分布になることによって、Iには存在しなかったバースト状態とラミナー状態間の長時間相関が生じたためと考えられる。そこで我々は、模型IとII両方の場合について、バーストの継続時間n_Bとその直後のラミナーの継続時間n_Lの散布図を作成して比較してみた（図5）。その結果、Iにおいてはn_Bとn_Lの相関は殆ど見られないのに対して、IIにおいてはn_Bとn_Lの間に明確な負の

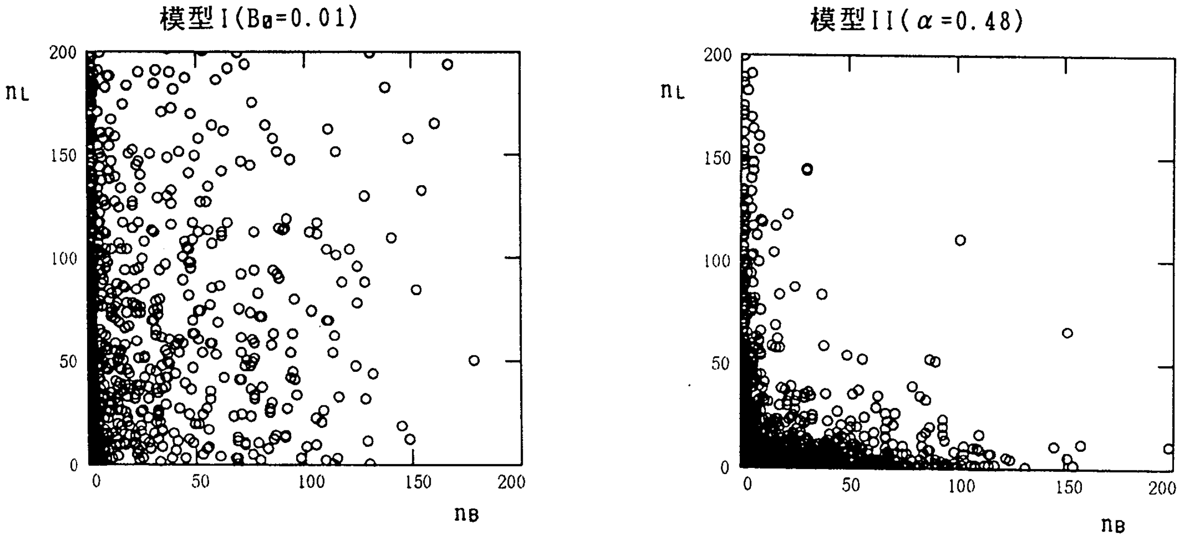

図5:模型IとIIにおけるバーストの継続時間n_Bとその直後のラミナーの継続時間n_Lの散布図。

相関が見られた。これは長いバーストの直後のラミナー継続時間は短い傾向にあることを示しており、バースト間に"引力"が作用していることを意味している。

図6と7に$\alpha=0.48$のときの区間$t=0\sim 2^{22}$におけるラミナー長分布とバースト長分布を示す。ラミナー長分布に対する理論式(10)は$n>>C$の領域でべき乗的に振舞うことを予言する。$n \lesssim 100$に対しては、$C\approx 8$と選ぶと数値シミュレーションのデータをほぼ再現することがわかる。べき乗的振舞いが予言される$100 \lesssim n$の領域になるとデータ数が少なくなるため、理論式への収束は悪くなり、理論式の予言$\sim n^{-1/\alpha}$との明確な一致は確認できなくなる。しかし、数値シミュレーションから得られたこの領域におけるラミナー長分布は、指数$-1/\alpha$のべき乗的振舞いと少なくとも矛盾はしておらず、Iの場合の指数関数型とは明らかに異なった分布になる。

一方、バースト長分布の方は、n小の領域で$\sim n^{-3/2}$のべき乗則に従い、中間領域の"shoulder"を経てn大の領域で指数関数的に減少する。このような特徴的な振舞いは模型Iの場合と同じであり、§2で導いた理論式(20)の予言（図7中の曲線）と定性的に一致する。ただし、(20)に基づくバースト長分布の計算では各パラメータの値を以下のように決めた。まず、(13)より$B_s=1.3$、$B_{re}=10.1$である。B_{th}の値は$B_{th}<B_s$でB_sに近い値という制限があるので、$B_{th}=0.9$[*)]ととる。そうすると、$\eta=\ln[B_s/B_{th}]/\ln[B_{re}/B_{th}]=0.15$となり、また$D=a^2=0.36$を用いると$\tau_d=\{\ln[B_{re}/B_{th}]/a\}^2=16.2$が得られる。(20)は"shoulder"部分の高さを数値シミュレーションの結果

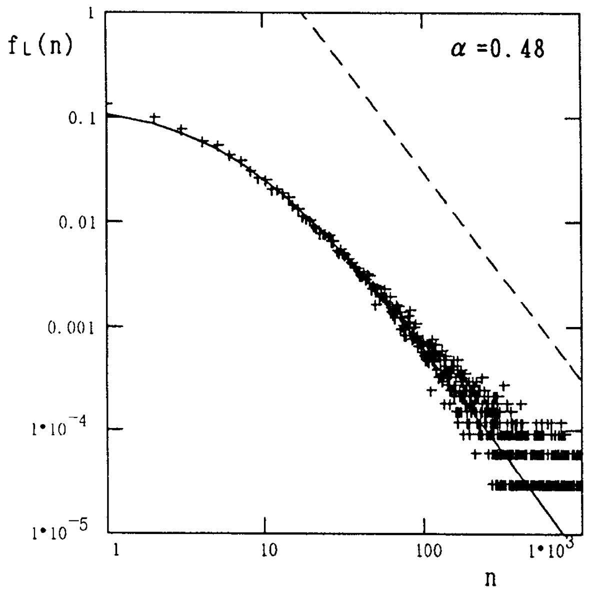

図6:ラミナー長分布$f_L(n)$ vs. n。実線は理論式(10)、点線は$f_L(n)\sim n^{-2}$を表す。

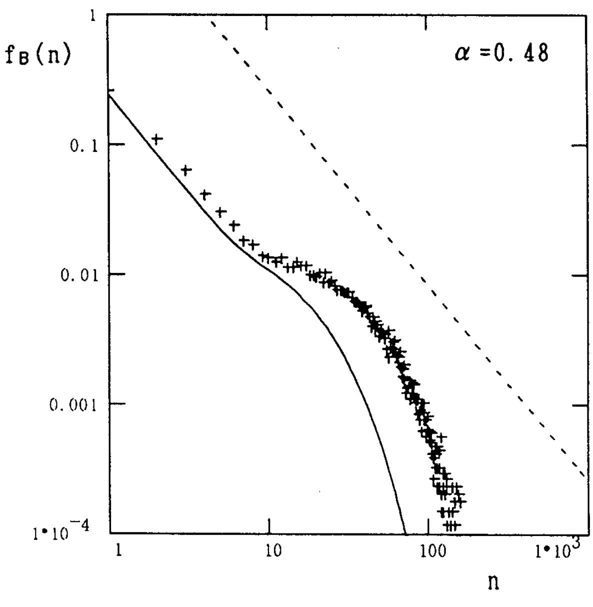

図7:バースト長分布$f_B(n)$ vs. n。実線は理論式(20)、点線は$f_B(n)\sim n^{-3/2}$を表す。

---

*) B_{th}の値にはB_sの近傍という条件の下で任意性があるが、B_{th}の値を変化させると主にηの値が変わり、log-log平面上で分布はその形を殆ど変えずに上下に平行移動する。ここでは、n小の領域でデータを再現するように$B_{th}=0.9$ととった。

より低く与えるが、これは(20)が元々v=0(βQ=1)に対する式であり、また定性的な議論を目的として、様々な近似を重ねて導かれた式であるためと考えられる。

§4. まとめ

我々は以前に提案した”自己相互作用”をするPoisson分布に基づいた力学模型Iにおいて、分布をG-L分布に拡張することにより、新たに導入された自由度を利用して状態変数が長時間相関を持つ力学模型IIをつくることができた。IIはIと同様に制御パラメータの適当な値の下で状態変数が間欠的振舞いをする。この間欠性において、バースト長分布はIと本質的な違いがなくバースト長が短い領域では指数-3/2のべき乗的振舞いをし、バースト長の長い領域では指数関数的に減少する。ラミナー長分布は指数関数型のIとは異なり、$\sim(1+n/C)^{-2}$で与えられる。その結果、状態変数のPSDは低振動数側で、Iでは平坦であったのに対して、IIでは1/f型になった。

確率的振舞いの起源を問題にしなければ、我々の模型が表す力学系の実質的な自由度はA(t)とB(t)の2変数なので、我々の力学系は少数自由度系と見なせる。少数自由度の力学系が示す主な間欠性として、Pomeau-Mannevilleによって分類されたタイプI-IIIの間欠性[9]と結合カオス系が示すオンオフ間欠性[2]があるが、この中でタイプIIの間欠性は分岐点近傍でラミナー長分布が指数-2のべき乗則に従い、我々の模型と同じ漸近形をもつ[10]。しかし、タイプI-IIIの間欠性はどれもポアンカレ断面上の固定点が不安定化し、周期運動が崩壊する過程で現れるもので、ラミナーの初期状態にランダムネスは存在するが、ラミナー状態の継続自体は1変数の微分方程式によって決定論的に決まる。従って、これらの間欠性はラミナー状態の時間発展が確率過程で与えられる我々の間欠性とは本質的に異なる。一方、オンオフ間欠性は状態変数の時間発展が相乗確率過程と見なすことができ、確率模型で扱うことができる。我々の模型においても、バースト状態の時間発展は相乗確率過程と見なすことができ、その結果我々の模型のバースト長分布と相加雑音が加わった場合のオンオフ間欠性のラミナー長分布[7]が類似の構造をもつことが明らかになった。この様な関連性はあるが、オンオフ間欠性ではラミナー長分布が基本的には指数-3/2のべき乗則で特徴づけられ、PSDも低振動数側で$1/f^{1/2}$になるなど、間欠性を特徴づける統計量が我々の模型の場合とは異なっている。以上のことから、我々の模型が示す間欠性はラミナー状態継続のメカニズムや出現確率及び状態変数の時間相関等がこれまで知られている間欠性とは異なっており、少数自由度の力学系が示す新しいタイプの間欠性と考えられる。

ここで扱った模型と現実の力学系との対応は、現段階では明確でなく、我々の模型を直ちに現実の系が示す間欠的振舞いや、ゆらぎの説明に適用することはできない。しかし、G-L分布は元々レーザー系における光子数分布を説明するために導入された分布であり、我々の力学系もレーザー系と共通する次のような性質[11]を持っている：(i)状態変数が0及び正の整数値をと

る (ii)確率的フィードバックによる秩序形成 (iii)制御パラメータの変動に伴う”相転移”的変化等。特に、dyeレーザーのように発振閾値近傍で光子数ゆらぎが増大する[12]ような系を扱うためには、通常の回転波近似によるVan der Pol方程式に相乗性の雑音を導入する必要性が指摘されている[13]。このような系では、我々の力学系と同様な「状態に依存した確率的フィードバック」が行われている可能性があり、我々は今後今回の模型を基に、発振閾値近傍で大きな光子数ゆらぎを示すレーザー系の動作をモデル化するような力学模型の構築をめざすつもりである。

参考文献

[1]橋本昇、豊田規人:1997年日本物理学会秋の分科会 講演概要集（第3分冊）817.

[2]藤坂博一、福島和洋、井上政義、山田知司:日本物理学会誌51(1996)813及びその参考文献.

[3]R.J. Glauber, in:Physics of Quantum Electronics, ed. P.L. Kelley et al. (McGraw-Hill, New York, 1966).
G. Lachs:Phys. Rev. 138B(1965)1012.

[4]武者利光:ゆらぎの世界（講談社、1980）.
武者利光:応用物理46(1977)1144.

[5]A. Cenys, A.N. Anagnostopoulos and G.L. Bleris:Phys. Lett. A224(1997)346.

[6]R.L. Stratonovich:Topics in Theory of Random Noise(Gordon and Breach, New York, 1963)Vol.I.

[7]N. Platt, S.M. Hammel and J.F. Heagy:Phys. Rev. Lett. 72(1994)3498.

[8]相加雑音を含む相乗確率模型のラミナー長分布と我々の模型のバースト長分布の類似性を御指摘下さった中尾裕也氏に感謝します。

[9]Y. Pomeau and P. Manneville:Commun. Math. Phys. 74(1980)189.

[10]H. G. Schuster:Deterministic Chaos, 3rd ed.(VCH, New York, 1995).

[11]霜田光一他:量子エレクトロニクス（上）（裳華房、1972）.

[12]K. Kaminishi, R. Roy, R. Short and L. Mandel:Phys. Rev. A24(1981)370.

[13]R. Graham, M. Höhnerbach and A. Schenzle:Phys. Rev. Lett. 48(1982)1396.