

スピコヒーレント状態経路積分の連続時間形式における問題点

柴田 絢也¹

東北大学大学院 理学研究科 物理学専攻 物性理論研究室

連続時間形式におけるスピコヒーレント状態経路積分を用いて、遷移振幅を近似的に計算しようとする様々な問題が生じます。このことに関する内容は、以前、修士論文として「物性研究」[1]に掲載されていますし²、また論文[2]としても出版されています。この原稿も「物性研究」に掲載される予定で、ここで同じ事を述べても情報量としては全く増えませんが、何故、経路積分の小難しいことをぶつぶつ言っているのかという理由と、その後の研究成果を、少し述べたいと思います³。

1 問題を考えるに至った経緯

近年、巨視的トンネル現象は活発に研究されていますが、それに関する多くの文献に当たると必ず引用されている論文に Cladeira-Leggett の論文 [3] があります。そこには主に、巨視的な系のトンネル確率（崩壊率）に環境自由度がどのような影響を与えるかということが考察されています。ここでいう巨視的な系とは、“巨視的な運動”を特徴づける基本的な集団自由度を用いて表わされたものです。そして、ここではこの集団自由度に対する量子力学的振る舞いを、Schrödinger 方程式によって記述されると仮定して、議論を進めています。様々な系によって集団自由度は異なりますし、環境自由度との相互作用も双一次型の線形相互作用であるという保証もありません。したがって、この仮定が妥当であるかどうかを調べる為には、多自由度系から物理的考察によって、集団自由度とそれ以外の自由度（環境自由度）を選別しなくてはなりません。このような考察を十分に行わなければ、集団自由度の量子力学に対する正当性もあやふやになってしまいます。このように、微視的基礎付けを考えるのは重要なことだと思います。

巨視的トンネル現象が起ると考えられている候補系で、私が興味のあるものに、メソスコピック磁壁があります [4, 5]⁴。この系での集団自由度は、磁壁の中心座標とスピンの回転角に関する chirality の二つが理論的に考えられています [6, 7]。このことを念頭において、修士論文では、微視的観点から、つまり場の理論的考察から、集団自由度と環境自由度を選別し、そのような描像で系の遷移振幅をちゃんと評価するという目的で、研究を進めてきました。ここで、磁壁を表現するのに最も現実的だと思われる状態としてスピコヒーレント状態 [8]を採用し、遷移振幅をスピコヒーレント状態経路積分 [9, 10]を用いて解析しました。そして、ここで、連続時間形式におけるスピコヒーレント状態経路積分の問題点にぶつかったのです。

既存の理論 [6, 7] では、連続時間形式における経路積分を用いて、その中で集団自由度を導入して、この二つの自由度のどちらか一方を先に積分して、残った変数に対する有効作用を導出しています。そして、その有効作用の形は一自由度における Feynman 経路積分に表れる作用と形式的に同じになっています。このことから集団自由度に関して、トンネル現象を一自由度の量子力

¹E-mail: shibata@cmpt01.phys.tohoku.ac.jp

²「物性研究」に掲載された修士論文は、東北大学に提出した修士論文を、半分以上圧縮したもので、タイトルも違います。本当は「準一次元強磁性体における磁壁の量子力学」です。

³ここで、述べられていることに文句や質問がありましたら、どしどし連絡下さい。そして、いろいろ議論して下さい。

⁴何故、興味を持ったのかというと、指導教官である高木さん（先生と呼ぶないつも言っておられるので）が chirality の MQC に関する研究をなさっていたということにも関係ありますが、大学院入学当初から、巨視的トンネル現象、メソスコピック系、場の量子論、スピコヒーレント状態、スピコヒーレント状態経路積分、Berry の位相、ソリトン、集団座標の方法、などの言葉に惑わされ心を惹かれたというのが正直なところです。

学と全く同じように議論しています。最初、この論文を読んだ(式も全部最初から導出して)時、なるほど上手いことをするなと思いました。しかし、もともと計算しようとしていた量は、系の遷移振幅でしたから、有効作用だけを眺めていては駄目で、ちゃんと経路積分の積分測度にも注意を払う必要があります。一自由度の量子力学の類推を使うためには、積分測度の方もそれと同じ形をしていなくてはなりません。幸い、式をちゃんと導出しながら論文を読んできたので、それを調べてみました。しかし、一自由度の量子力学の場合とは全く異なる積分測度でした。最初は、どうせ計算を間違っただろうと思って、もう一度確かめてみたのですが、やっぱり違う。そして一ヶ月位、様々な文献に当たってみたり、屋上に行って青葉山を眺めながら、それでも分からず悶々としていたのですが、結局は連続時間形式の経路積分の定式化と、その用法に問題があるということに気が付きました。詳しくは、[1, 2]を参照して欲しいのですが、簡単に言うと、遷移振幅を、良く見られる連続時間形式におけるスピノコヒーレント状態経路積分で以下のように書いた時点で既に、始状態と終状態の情報が落とされてしまっているということです。

$$\langle n_F | e^{-i\hat{H}T/\hbar} | n_I \rangle = \int_{SCS} \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{SCS}[\theta, \phi] \right), \quad (1)$$

$$S_{SCS}[\theta, \phi] := \int_0^T dt \left\{ \hbar S(\cos \theta(t) - 1) \dot{\phi}(t) - H(\theta(t), \phi(t)) \right\}. \quad (2)$$

したがって、遷移振幅を正しく評価することは出来ません⁵。遷移振幅を正しく評価するためには、離散時間形式でちゃんと考える必要があります。また用法に関する問題は、離散時間形式でも使い方を誤まれば問題になります。それは、スピノコヒーレント状態、ボゾンコヒーレント状態経路積分において、どちらかの変数(上の式で言えば、 θ か ϕ) を、先に積分してしまうことです。形式的には、積分する事は出来るのですが、その時、Feynman 経路積分形式に移行するということは間違いだと思います⁶。

ここまでが、連続時間形式におけるスピノコヒーレント状態経路積分の問題点を考えるに至った経緯です。論文や教科書に載っている公式を無批判に汎用すると痛い目に会うということを、修士論文を書くにあたって身をもって経験した、非常に教訓的な出来事でありました。それ以来、常に疑いの目を持って論文を読むようになってしまい、性格が悪くなったような気がします。

2 磁壁の量子力学

その後、連続時間形式におけるスピノコヒーレント状態経路積分には問題がある、ならば、ちゃんと離散時間形式で問題を扱い、メゾスコピック磁壁における系の遷移振幅を評価しようということに時間が費やされました。一自由度のスピンの問題などは、離散時間形式で正しく計算することが出来ていましたから、多自由度系においても、本質的なことは変わりません。二つ存在する集団自由度をどのように扱うかが問題になります。既存の理論ではどちらか一方を、計算の途中の段階で積分してしまいましたが、本来は、同時に扱うべきです。したがって、今迄の一自由度の描像が本当に正しいのかという疑問があります。そこで先ず、トンネル現象を考察する前にもっと簡単な状況を考えました。そして、その場合の遷移振幅を評価することが出来ました。詳しい議論は、別に譲るとして、現時点での結果として、今迄の一自由度描像とは異なるということ

⁵連続時間形式で、スピノコヒーレント状態経路積分を(おそらく)厳密に定義してある論文[11]があります。しかし、実際応用として具体的な系を考えて、近似的に計算していく時に、これを用いるのは複雑すぎて現実的ではないように思います。それならむしろ、離散時間形式でちゃんと計算していけば、なんら曖昧な点は存在しませんから、その方が良いでしょう。

⁶この様な経路積分の用法は磁壁の問題に限らず、スピンのトンネルなどの問題にも見受けられます。はたして、本当にそれで良いのかと思うのですが、論文にも教科書にも何もコメントなしに書いてあるので、初学者には分かりません。誰か教えて下さい。

研究会報告

す。これは、磁壁の量子力学的振る舞いを考える時に、磁壁中心ならその一自由度のみによる粒子的な描像で、磁壁は考えることが出来ないということです。つまり、実際トンネル現象を考える時に、Caldeira-Leggett model のような問題に帰着することは、恐らく出来ないのではないかと思います。これは、更に議論する必要がありますから、今後の研究で明らかにしたいと思います。

若手研究者が文章という残る形で発表できる機会はなかなかありません。ですから、難しい数式を書き連ねてもどうせあまり読んでもらえないだろう、ならば、研究の背景を伝えられれば良いのではないかと考えました。「物性研究」は、各研究室で良く読まれている雑誌だと思いますので、あまり堅苦しくなく少し砕けた感じで書かせてもらいました。幸い、編集委員である私と同部屋の本堂さんがそのように書いても構わないと言ってくれたので、それが励みになりました。感謝致します。

参考文献

- [1] 柴田絢也, 修士論文「A Note on (Spin-)Coherent-State Path Integral」, 物性研究 1998 年 9 月号 p.743.
- [2] J. Shibata and S. Takagi, Int. J. Mod. Phys. B (1999). to be published.
quant-phys/9807005 *A Note on (Spin-) Coherent-State Path Integral*
- [3] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Ann. Phys. (N.Y) **149**, 347 (1983).
- [4] P. C. E. Stamp, E. M. Chudnovsky, and B. Barbra, Int. J. Mod. Phys. B **6**, 1355 (1992).
- [5] *Quantum Tunneling of Magnetization*, Proceedings of the NATO workshop, Chichilianne, France, 1994, edited by L. Gunther and B. Barbara (Kluwer Academic, Norwell, MA, 1995).
- [6] H-B. Braun and D. Loss, Phys. Rev. B **53**, 3237 (1996).
- [7] S. Takagi and G. Tatara, Phys. Rev. B **54**, 9920 (1996).
- [8] J. M. Radcliffe, J. Phys. A **4**, 313 (1971).
- [9] J. R. Klauder, Phys. Rev. D **19**, 2349 (1979).
- [10] E. Fradkin, *Field Teories of Condensed Matter Systems* (Addison-Wesley, 1991).
この教科書は良く論文などにも引用されています。スピニコヒーレント状態経路積分に関する説明は、あまりにもナイーブで、私を含めて、初学者にとっては、非常に混乱するところがあると思うのですが、どうでしょうか？ これを読んだ方、感想を聞かせて下さい。
- [11] I. Daubechies and J. R. Klauder, *J. Math Phys.* **26**, 2239 (1985).