

熱量子色力学 (QCD) とクォーク・グルーオンプラズマに関連する話題

牲川 章¹ (大阪市立大学理学部)

内容

- I 熱 QCD に基づくクォーク・グルーオンプラズマ物理のレビュー。
- II 摂動論の構築と一般化されたボルツマン方程式 (非平衡複素スカラー量子場系)。
- III 線形シグマ模型 (QCD のカイラル相転移の玩具模型)。

I クォーク・グルーオンプラズマ (QGP) 物理

I.1 導入

初期宇宙に“棲息”していたと考えられている QGP の、重イオン加速器による再生実験が Brookhaven 国立研究所 (米国) の Relativistic Heavy-Ion Collider (RHIC) で今まさに始まろうとしていて、欧州合同原子核研究機関 (CERN) では、実験に向けて Large Hadron Collider (LHC) の建設が進行中。

クォーク・グルーオン系を支配する力学は量子色力学 (Quantum Chromodynamics (QCD)) と呼ばれる $SU(3)$ カラーゲージ理論。クォークはカラーと呼ばれる“電荷” — $SU(3)$ の 3 次元表現 — をもっていて、この“電荷”にゲージ粒子であるグルーオン (量子電磁力学 (QED) の場合の光子に対応) が結合。又、光子と異なり、グルーオン自身もカラー“電荷” — $SU(3)$ の 8 次元表現 — をもっていてグルーオンの自己相互作用が (2 種類) 存在。クォークは 3 次元表現、グルーオンは 8 次元表現故、グルーオンの“電荷”の方がクォークの“電荷”より“大きい”。

QCD によれば、クォーク・グルーオン系は、QCD (又は、閉じ込め-非閉じ込め) 相転移により、図 1 に示すような相構造をもつ。図 1 の縦軸は温度 T で横軸はバリオン数 B に共役な化学ポテンシャル μ 。クォークのバリオン数は $+1/3$ で、反クォークは $-1/3$ なので、 B はクォーク数と反クォーク数の差の $1/3$ 倍。 $\mu = 0$ の時の相転移温度は ($k_B = 1$ なる単位をとって) 約 $T_c \sim 150$ MeV、 $T = 0$ の時の相転移化学ポテンシャルは約 $\mu_c \sim 500$ MeV。相転移曲線の内側は

¹ 電子メール住所: niegawa@sci.osaka-cu.ac.jp

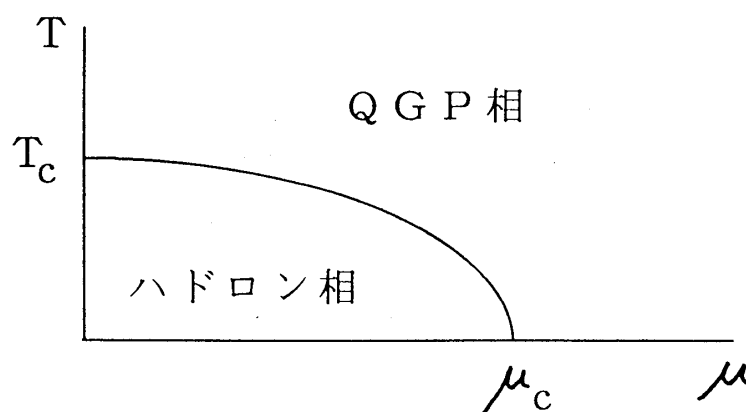


図 1: クォーク・グルーオン物質の相図。 T は温度で μ はバリオン数に共役な化学ポテンシャル。

ハドロ ン相と呼ばれ、ここではクォークや反クォークが結合してハドロ ン（陽子、中性子、パイ中間子等）が構成されている。ハドロ ンからクォークを単離しようとして、幾ら高いエネルギーを与えても単離不可能（クォークの閉じ込め）。相転移曲線の外側は QGP 相と呼ばれる、クォークとグルーオンのプラズマ状態。宇宙のビッグバンシナリオによれば、我が母なる宇宙が若々しく輝いていたある時期、QGP（と電子やニュートリ等）が“棲息”。

QGP 物理には、大別して次の 3 つのアプローチがある。

- 1) コンピュータによる格子 QCD の解析。
- 2) 熱 QCD（有効理論によるアプローチを含む）。
- 3) 現象論的アプローチ。

本章の目的は、2 番目のアプローチにより、これまでに得られた知見の紹介 [1]。

QED の場合は（場の量子論特有の）真空の分極により電荷が遮蔽されるが、QCD の場合はそれとは正反対の“逆遮蔽”がおこる。これにより、より短波長（高運動量）でカラー“電荷”を見ればより小さい（漸近自由性（asymptotic freedom））。この逆遮蔽は上述のグルーオンの自己相互作用からくる。クォーク-グルーオン間の相互作用は QED と同じ遮蔽効果をもたらすが、上述のようにグルーオンの“電荷”の方がクォークのそれより大きいため、逆遮蔽側が勝つ。この漸近自由性により、エネルギー、温度、化学ポテンシャルが大きくなればなるほど有効結合定数が小さくなり、摂動論的解析が有効となる。とはいえ、実際には、小さくなり方が対数的であるため、相転移曲線のかなり外側の領域でないと摂動論が有効であるとは言えない。

I.2 熱・化学平衡 QGP

理論的枠組みには、虚時間（松原）形式と実時間形式がある [2]。虚時間形式はギブス分布関数 $e^{-H/T}$ （ H は系のハミルトン関数）が“時間”を $-i/T$ だけ推進する演算子になっていることに着目し、純虚数時間を導入して定式化されたもの。この形式でグリーン関数を計算すると離散的虚

研究会報告

エネルギー（松原振動数）上での値がわかるので、物理的グリーン関数を得るにはそれを解析接続することになるが、外線が3本以上の場合は多変数解析関数の解析接続の問題となり難事。これに対して、実時間形式は字義どおり最初から実時間を用いた形式なので物理的グリーン関数の直接計算が可能。実時間形式には時間経路形式と熱場力学（Thermo Field Dynamics (TFD)）とがある。時間経路形式は複素時間平面に向きをもつ経路 $C_1 \oplus C_3 \oplus C_2 \oplus C_4$ ($C_1 = -\infty \rightarrow +\infty$, $C_3 = +\infty \rightarrow +\infty - i\xi/T$, $C_2 = +\infty - i\xi/T \rightarrow -\infty - i\xi/T$, $C_4 = -\infty - i\xi/T \rightarrow -\infty - i/T$ ($0 \leq \xi \leq 1$)) を採り、この時間経路上で定式化されたもの。終点の $-\infty - i/T$ の $-i/T$ はギブス分布関数 $e^{-H/T}$ の名残。実際の計算では、故あって、 $\xi = 0$ と $\xi = 1/2$ がよく用いられる。TFD は幾つかの公理の上に建設された形式。時間経路形式と TFD は同等ではないが、摂動論に関する限りは同等。

時間経路形式に戻る：グリーン関数の計算には、経路部分 C_3 と C_4 は本質的には寄与しない。従って理論は C_1 上の時間を変数とする場（物理的場、又はタイプ-1の場）と C_2 上の時間を変数とする場（タイプ-2の場、又は熱ゴースト場）の2成分理論。 C_2 上では時間は本質的には $+\infty$ から $-\infty$ に流れるため、タイプ-2の場は時間反転した世界に住んでいるといえる。グリーン関数は、真空理論の場の時間順序積を拡張した時間経路順序積の“熱真空”期待値として定義される（下の II.2 節参照）。外線の場のタイプが2種類あることに対応して N -点グリーン関数は 2^N 種類ある。計算の最後で、タイプ-1の場とタイプ-2の場を同定すると、独立なものは $2^N - 1$ 種類となり、それらの適当な一次結合をとることにより、遅延関数、先行関数等、様々なグリーン関数が構成できる。

以上概観した理論を用いた熱 QCD の研究により、これまでに得られた知見に関しては文献 [1, 2] を、それらに掲げられている引用文献と共に、ご参照頂くとして、ここではそれらに関連した幾つかのキーワードを若干の説明と共に掲げるに留める。因みに、QGP の温度／密度ではクォーク質量は無視できる故、熱 QCD ではクォーク質量は零としている。尚、以下の項目の大部分は 1-ループ図の寄与の解析による。

- 硬 (hard) 運動量： $O(T)$ の運動量。
- 軟 (soft) 運動量： $O(gT)$ の運動量 (g はゲージ結合定数で、クォークやグルーオンのカラー“電荷”は、この g に比例)。
- Plasmon: 真空理論には現れない軟グルーオンの（4次元の）縦波（集団）モードで、分散関係を表す図2の左図で‘L’と印したモード。
- Plasmino:² クォーク質量が零の場合、真空理論には現れない軟クォークの集団モードで、分散関係を表す図2の右図で‘-’と印したモード。この‘-’は、ヘリシティとカイラリ

² この項目の前半の語彙等については、III 章の脚注参照。

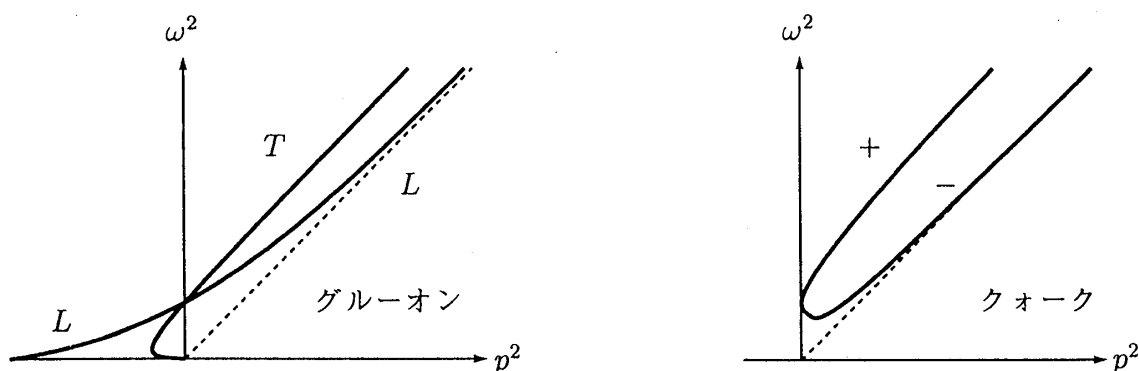


図 2: 軟グルーオン、及び軟クォークの分散曲線。 $\omega = \omega(p)$ はモードのエネルギー。‘T’ はグルーオンの横波モード、‘L’ は（4 次元的）縦波モード、‘+’（‘-’）はヘリシティ・カイラリティー比が +1（-1）のクォークモード。グルーオンの図の $p^2 > 0$ 側は伝播モード、 $p^2 < 0$ 側の曲線で表されたモードは、 p が純虚数故、（遮蔽長 $|p|^{-1}$ ）で遮蔽されるモード。

ティーの比が -1 を意味する。図から読みとれるように、このモードの群速度 $v_g(p)$ ($p = |\mathbf{p}|$ は運動量の大きさ) は、 p の関数として、 $v_g(0) < 0$ から始まり、 p が大きくなるに連れ 0 を切り、正に転じて後、増大し光速 ($\omega = p$) に近づいていく。

- ランダウ減衰：プラズマ物理に現れるランダウ減衰が、グルーオン／クォークに対しておこる。関連する基本過程：QGP 中の空間的（space-like）運動量（図 2 の領域 $p^2 > \omega^2$ ）をもつ仮想グルーオン／クォークが熱分布しているクォーク／グルーオンに蹴飛ばされて（質量殻（on-shell）上の）物理的粒子となる。
- デバイ質量：グルーオンの（4 次元的）縦波モードにデバイ質量が出現。グルーオンの横波モードには（1-ループでは）デバイ質量は現れない。クォークにもデバイ質量様の質量が現れる。
- Dynamical screening：デバイ（様）質量による“カラー電場”の遮蔽。
- 硬熱ループ予加算法（Hard-Thermal-Loop (HTL) resummation scheme）：2 点振幅、及び、ある種の多点振幅では、全ての外線の運動量が soft の場合、それらへの 1-ループ図の寄与が最低次（樹枝図）の寄与と同じオーダーになるので、それら 1-ループ図の寄与を最低次の寄与に加えたものを摂動の最低次として扱う、改良された摂動論。
- 硬熱ループ予加算有効作用：すぐ上の「摂動の最低次」を生成する作用（action）。
- 質量特異性：真空理論同様、零質量場を含む理論特有の質量特異性（エネルギー分母 = 0 に対応）の存在。

最後に、熱 QCD の残された問題、及び今後の問題点の整理 [1]。

研究会報告

- 質量特異性の問題を別にして、硬運動量領域では、時間経路形式、又は熱場力学で構成したナイーブな摂動論をそのまま使って良い。
- 軟運動量領域では（1-ループ計算から構成された硬熱ループ予加算法で）改良された摂動論を使用。
- 改良された摂動論でも、グルーオンの横波モードにはデバイ質量が誘起されないため、赤外領域に“敏感”な量の中には、赤外遮蔽が（十分には）なく発散が残るものがある。グルーオンの横波モードには、“次のオーダー” $O(g^2T)$ でデバイ質量が現れると考えられている。かくして、次の目標は超軟領域（ $p \leq O(g^2T)$ ）を扱える（硬熱ループ予加算法の次のオーダーの）予加算法の開発。
- 上述のように質量特異性は真空理論同様随所に出現。この問題は、形式的には Kinoshita-Lee-Nauenberg の定理によって解決されるが、硬熱ループ予加算法とマッチした形で具体的に計算可能な形に著した処方箋は未だ書かれていない。

I.3 非平衡 QGP

非平衡系は虚時間形式では扱えない。非平衡系の扱いには平衡系の場合の時間経路形式の元になった閉時間経路形式 [3] と、熱場力学の拡張である非平衡熱場力学（nonequilibrium thermo field dynamics）[4] がある。前者は、II.2 節の図 3 に示す、複素時間平面上にとった閉経路³ $-\infty \rightarrow +\infty \rightarrow -\infty$ 上で定式化された理論で、後者は幾つかの“公理”の上に定式化された正準形式の理論。

重イオン衝突で生成される QGP は膨張しつつ光子やレプトン対を放射しながら冷えていき、QCD 相転移、カイラル相転移（III 章の脚注参照）を経て、パイ中間子等のハドロンを放射しつつ更に冷えていき、遂には消滅する非平衡系。このように QGP を非平衡系として熱 QCD で“真正面”から扱う研究は最近始まったばかり。重イオン衝突シナリオから予測されるクォーク／グルーオン分布関数で特徴づけられる QGP 系で生起する諸々の過程の反応率の計算はほぼ終了。これらの反応の結果として、クォーク／グルーオンの分布関数が変化するが、それを律するボルツマン方程式に基づく研究が始まろうとしている [5]。

QCD のカイラル相転移を模した玩具模型として、Gell-Mann-Lévy のシグマ模型が復活し、カイラル対称な世界から相転移を経てパイ中間子を放射しながら系が冷えていく様が多く研究者によって議論されている。これに関しては、後の III 章で改めて扱う。

³ I.2 節で触れた時間経路 $C_1 \oplus C_3 \oplus C_2 \oplus C_4$ で $\xi = 0$ とし、“ボルツマンの尻尾” C_4 を切り落としたもの。

II 摂動論の構築とボルツマン方程式（非平衡複素スカラー量子場系）

II.1 導入

この章の目的は、相対論的複素スカラー量子場理論を例にとり、平衡に近い準一様系、又は準定常非平衡系を扱う摂動論の構築（詳細は [6]）。用いる基本的形式は閉時間経路形式 [3]。このような系では、その“様相”が時間・空間的に大きくは変化しない。故に、系で生起する反応を特徴づける（ミクロ）時間・空間スケールと、系の緩和を特徴づける（マクロ）時間・空間スケールは桁違い。摂動論の基本構成要素である伝播子（通常の摂動論のエネルギー分母に対応）を $\Delta(x, y)$ (x, y は時空座標)、自己エネルギー部分を $\Sigma(x, y)$ と書く。平衡系の場合には、これらは差 $x - y$ のみの関数。今考えている類の系では、これらは重心 $(x + y)/2$ にも依存するが、その依存性は緩慢。而して、 $x - y$ をミクロ時空座標、 $(x + y)/2$ をマクロ時空座標として採用。而して、 $\Delta(x, y)$ や $\Sigma(x, y)$ はマクロ時空座標 $X \equiv (x + y)/2$ の近傍で起こる反応の摂動論的記述に登場。

$\Delta(x, y)$ や $\Sigma(x, y)$ そのものよりも、それらをミクロ時空座標 $x - y$ についてフーリエ変換した $\Delta(X; P)$ や $\Sigma(X; P)$ ($X \equiv (x + y)/2$) を用いるのが便利。 G を Δ や Σ を表すものとする。 $G(X; P)$ を変数 X に関して (Y のまわりで) テーラー展開したものを微分展開といい、この展開の一階微分項までを残す近似が“勾配近似”：⁴

$$G(X; P) \simeq G(Y; P) + \sum_{\mu=0}^3 (X - Y)^\mu \frac{\partial G(Y; P)}{\partial Y^\mu}.$$

以下、この近似を採用。

II.2 閉時間経路形式

4 体相互作用をしている相対論的複素スカラー場のラグランジュ密度は

$$\mathcal{L} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \phi^\dagger(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} - m^2 \phi^\dagger(x) \phi(x) - \frac{\lambda}{4} [\phi^\dagger(x) \phi(x)]^2 \quad (\lambda > 0). \quad (1)$$

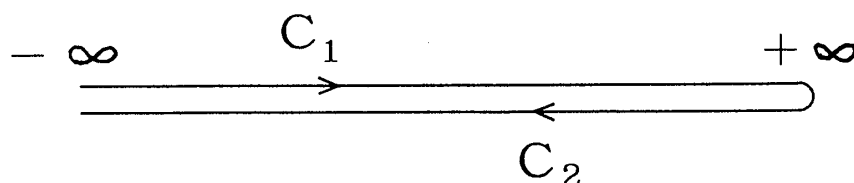
図 3 に示した閉時間経路 $C = C_1 \oplus C_2$ ($C_1 = -\infty \rightarrow +\infty$, $C_2 = +\infty \rightarrow -\infty$) を導入。この時間経路上で、時間は図 3 の矢印の方向に流れるものとする。系の時間（経路）発展を支配する（古典的）作用は

$$\int_C dx_0 \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \phi^\dagger(x)). \quad (2)$$

ここで ‘C’ は、 x_0 積分が、経路 C に沿った積分であることを表示。(2) に基づく閉時間経路形

⁴ 表記法：時空間（ミンコフスキー空間）の（共変）ベクトル； $V^\mu = (V^0, V^1, V^2, V^3) = (V^0, \mathbf{V})$ 。 $\mathbf{V}$ は（3 次元）空間のベクトル。 V^μ に対応する反変ベクトル； $V_\mu = (V_0, V_1, V_2, V_3) = (V^0, -\mathbf{V})$ 。特に、動径ベクトルを $X^\mu = (X^0, \mathbf{X})$ ； X^0 は $X^0 = cT$ (c は光速) で時間 T と関係、 $\mathbf{X}$ は（3 次元）空間の動径ベクトル。エネルギー・運動量ベクトル； $P^\mu = (p^0, \mathbf{p})$ 。 $\mathbf{p}$ は運動量で、 p^0 は、質量殻上の（反）粒子の場合、 $p^0 = E/c$ で（反）粒子のエネルギー E と関係。[慣習により、 P^μ の成分には小文字 $p_0 (= p^0)$ 、 $\mathbf{p}$ を使用。] 以下、一貫して自然単位 ($c = \hbar = 1$) を採用。

研究会報告

図 3: 複素時間平面内の時間経路 $C = C_1 \oplus C_2$ 。

式の摂動論は以下のように構成される：

ステップ 1. 真空場の量子論（教科書にある通常の場合の量子論）に現れる“場の時間順序積”を拡張して（上述の“時間の流れ”に基づいて）場の時間経路順序積を導入。

ステップ 2. 場の時間経路順序積の統計（アンサンブル）平均として“閉時間経路グリーン関数”を定義。

ステップ 3. (2) の $\mathcal{L}$ を非摂動部分と摂動部分に分け、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$ 、Wick の定理を用い、摂動論を構成：この結果、摂動論の基本構成要素は、伝播子（自由場の時間経路順序積の 2-点関数、初期相関、分岐因子、の 3 つであることが知れる。以下では初期相関については触れない。簡単のため、密度行列 ρ は電荷演算子と可換であるとする）と非自明な伝播子は

$$\Delta(x, y) = -i \text{Tr} \left[T_C \left(\phi(x) \phi^\dagger(y) \right) \rho \right] \equiv -i \langle T_C \left(\phi(x) \phi^\dagger(y) \right) \rangle \quad (3)$$

のみ。ここで T_C は時間経路順序積記号。

ステップ 4. C_1 上の場 $(\phi^{(1)}(x) (x \in C_1))$ を $\phi_1^{(1)}$ 、 C_2 上の場を $\phi_2^{(1)}$ と書き、それぞれタイプ-1 の場、タイプ-2 の場と呼ぶ（I.2 節参照）。この記法を用いると、(2) の作用は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int d^3x \left[\mathcal{L}(\phi_1(x), \phi_1^\dagger(x)) - \mathcal{L}(\phi_2(x), \phi_2^\dagger(x)) \right] \equiv \int d^4x \hat{\mathcal{L}}(x). \quad (4)$$

$\hat{\mathcal{L}}$ は hat-ラグランジュ密度と呼ばれることがある。この式より分岐因子は同タイプの場の間にのみ存し、タイプ-2 の場の分岐因子は、タイプ-1 の場のそれと逆符号。

(3) の ϕ と $\phi^\dagger$ がタイプ-1 かタイプ-2 かによって、 Δ を、自明な意味を込めて、 Δ_{ij} ($i, j = 1, 2$) と表記。上述の時間経路順序積の定義より、

$$\begin{aligned} i\Delta_{11}(x, y) &= \langle T \left(\phi(x) \phi^\dagger(y) \right) \rangle, & i\Delta_{22}(x, y) &= \langle \bar{T} \left(\phi(x) \phi^\dagger(y) \right) \rangle, \\ i\Delta_{12}(x, y) &= \langle \phi^\dagger(y) \phi(x) \rangle, & i\Delta_{21}(x, y) &= \langle \phi(x) \phi^\dagger(y) \rangle. \end{aligned}$$

ここで、 T は通常の時間順序積記号で、 $\bar{T}$ は反時間順序積記号。（以下、 Δ_{ij} を成分とする 2×2 行列を $\hat{\Delta}$ と表記。）これから明らかなように、4 つの Δ_{ij} 全てが独立ではない：

$$\Delta_{11} + \Delta_{22} = \Delta_{12} + \Delta_{21}. \quad (5)$$

明らかに、この等式は、自己エネルギーを足しあげた伝播子に対しても成立。

よく採用される、3つの独立量：

$$\begin{aligned} i\Delta_R &= i\Delta_{11} - i\Delta_{12} = \theta(x_0 - y_0) [\phi(x), \phi^\dagger(y)], \\ i\Delta_A &= i\Delta_{11} - i\Delta_{21} = -\theta(y_0 - x_0) [\phi(x), \phi^\dagger(y)], \\ i\Delta_c &= i\Delta_{12} + i\Delta_{21} = \langle \phi(x)\phi^\dagger(y) + \phi^\dagger(y)\phi(x) \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $\Delta_{R(A)}$ は遅延（先行）グリーン関数、 Δ_c は相関関数。 Δ_R と Δ_A は理論の構造のみから決まる：

$$\Delta_{R(A)}(x-y) = \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} e^{-iP \cdot (x-y)} \frac{1}{P^2 - m^2 + ip_0 0^+}. \quad (7)$$

而して、系の情報を（密度行列を通じて）含んでいるのは Δ_c のみ。(6) からも見えてとれるように、物理的に重要な2-点グリーン関数（実は全ての独立な2-点グリーン関数）は、閉時間経路グリーン関数 $\hat{\Delta}$ から構成可能。この命題は2-点グリーン関数に限ったことではなく、一般の $n (\geq 3)$ -点グリーン関数に関して成立。

平衡系の場合に倣って、関数 $f(x, y)$ を導入して、 $\Delta_c(x, y)$ を

$$\begin{aligned} \Delta_c &= \Delta_R \cdot (1 + 2f) - (1 + 2f) \cdot \Delta_A \\ [f \cdot g](x, y) &\equiv \int d^4z f(x, z) g(z, y) \end{aligned} \quad (8)$$

と書く。⁵ ここで $1(x, y) = \delta^4(x - y)$ 。 f の物理的意味を知るために、4元電流密度 j^μ (j_0 : 電荷密度、 $\mathbf{j}$: 電流密度) の統計平均が

$$\langle j^\mu(x) \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \Delta_c(x, y) \Big|_{x=y} \quad (9)$$

と書けることに注意する。これに (8) を代入して、フーリエ変換することにより、（相互作用がない（‘bare’）ときの）粒子数分布関数 $N_+(X; P)$ と反粒子数分布関 $N_-(X; P)$ は、 $f(x, y)$ のフーリエ変換 $f(X; P)$ と以下の関係にあることが知れる：

$$\begin{aligned} N_+(X; p_0 = E_p, \hat{\mathbf{p}}) &= f(X; p_0 = E_p, \mathbf{p}), \\ N_-(X; p_0 = -E_p, \hat{\mathbf{p}}) &= -1 - f(X; p_0 = -E_p, -\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ で $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ は（反）粒子のエネルギー。

II.3 Bare- N スキーム

非摂動ラグランジュ密度 ((1) の非摂動部分) として、

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (11)$$

⁵ いわゆる $|p_0|$ -処方を導入した、より完全な議論については [6] 参照。

研究会報告

を採用。これより、 $(\partial_x^2 + m^2)\Delta_c(x, y) = (\partial_y^2 + m^2)\Delta_c(x, y) = 0$ が従う ($\partial_x^2 \equiv \partial^2/\partial x_0^2 - \partial^2/\partial \mathbf{x}^2$)。これを (8) に用いると、勾配近似で、 f の従う式を得る：

$$\sum_{\mu=0}^3 P^\mu \frac{\partial}{\partial X^\mu} f(X; P) = \left[p_0 \frac{\partial}{\partial X_0} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right] f(X; P) = 0. \quad (12)$$

これに (10) を用いたものは、相互作用のない場合のボルツマン方程式。

(12) を用いて、(8) の $\Delta_c(x, y)$ の ($x - y$ に関する) フーリエ変換は、勾配近似で

$$\Delta_c(X; P) \simeq -2\pi i \epsilon(p_0) [1 + 2f(X; P)] \delta(p_0^2 - E_p^2). \quad (13)$$

この式より、摂動計算に現れるのは $f(X; P)$ の質量殻上 ($p_0 = \pm E_p$) での “情報” ((10) 式) のみ。

(5) とその下に記した注より、自己エネルギー部分に対して

$$\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{12} + \Sigma_{21} = 0$$

が示せる。自己エネルギーを数珠玉状に足しあげた伝播子 G_{ij} は Schwinger-Dyson (SD) 方程式

$$\hat{G} = \hat{\Delta} + \hat{\Delta} \cdot \hat{\Sigma} \cdot \hat{G} = \hat{\Delta} + \hat{G} \cdot \hat{\Sigma} \cdot \hat{\Delta}$$

に従う。ここで $\hat{G}$, $\hat{\Delta}$, $\hat{\Sigma}$ はそれらの (i, j)-成分が、それぞれ G_{ij} , Δ_{ij} , Σ_{ij} である 2×2 行列。SD 方程式を勾配近似で解いて、 $\hat{G}$ の表示が得られるが、ここでは (6) の Δ_c に対応する $G_c \equiv G_{12} + G_{21}$ に次のような項 G'_c があることに注目するに留める：

$$G'_c(X; P) = \Sigma'(X; P) (G_R(X; P) - G_A(X; P))^2, \quad (14)$$

$$G_{R(A)}(X; P) \equiv G_{11} - G_{12(21)} \simeq \frac{1}{p_0^2 - E_p^2 - \Sigma_{R(A)}(X; P)}, \quad (15)$$

$$= \frac{1}{p_0^2 - E_p^2 - \text{Re}\Sigma_R(X; P) \mp i\text{Im}\Sigma_R(X; P)}, \quad (16)$$

$$\Sigma'(X; P) \simeq i\tilde{\Gamma}^{(p)}(X; P) + i\{f(X; P), \text{Re}\Sigma_R(X; P)\}, \quad (17)$$

$$i\tilde{\Gamma}^{(p)}(X; P) \equiv (1 + f(X; P))\Sigma_{12}(X; P) - f(X; P)\Sigma_{21}(X; P). \quad (18)$$

(15) で $\Sigma_{R(A)} \equiv \Sigma_{11} + \Sigma_{12(21)}$ 、及び (16) で $\Sigma_A(X; P) = \Sigma_R^*(X; P)$ が成立することを用いた。(16) で ‘R’ (‘A’) の時は ‘ $\mp$ ’ の ‘-’ (‘+’) を採る。以下で触れるように $\tilde{\Gamma}^{(p)}(X; P)$ は X^μ 近傍で、“エネルギー” が p_0 、運動量が $\mathbf{p}$ の “粒子” が生成される実効生成率 (生成率と崩壊率の差) に比例する量で、 $\{A(X; P), B(X; P)\}$ は (X^μ, P^μ) ($\mu = 0, 1, 2, 3$) を、形式的に正準共役な変数の組である (勿論、実際には、そうではない) とみなしたときのポアソン括弧式。

(15) を (14) に代入し $\Sigma_A = \Sigma_R^*$ を用いて

$$G'_c(X; P) = -4\Sigma'(X; P) \left(\frac{|\text{Im}\Sigma_R(X; P)|}{(p_0^2 - E_p^2 - \text{Re}\Sigma_R(X; P))^2 + (\text{Im}\Sigma_R(X; P))^2} \right)^2. \quad (19)$$

ここで“零幅極限 (近似)” $Im\Sigma_R \rightarrow -0^+$ をとってみると $G'_c(X; P)$ は $\delta^2(P^2 - m^2)$ に比例する (ピンチ特異性) 病的な“関数”。幅が有限であっても、それが小さければ、 G'_c (を含む G_c) は、相互作用の無い場合の Δ_c に比べて (摂動補正とはいえない程) 大きくなって、摂動論に基づく計算が信頼できなくなるかに見える。しかしながら、実際にはそうではないことを以下で見る。

4 元電流密度の統計平均は (9) で、 $\Delta_c \rightarrow G_c$ と置き換えた式で与えられる故、 $G'_c \in G_c$ の寄与 $\langle \delta j^\mu(X) \rangle$ は、運動量空間に移って、

$$\langle \delta j^\mu(X) \rangle = i \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} P^\mu G'_c(X; P). \quad (20)$$

(19) より、主要な寄与は領域 $p_0 \simeq \pm\omega_\pm(X; \pm\mathbf{p})$ からくる。ここに、 $\omega_\pm = \omega_\pm(X; \pm\mathbf{p})$ は

$$ReG_R^{-1}(X; p_0 = \pm\omega_\pm, \mathbf{p}) = \omega_\pm^2 - E_p^2 - Re\Sigma_R(X; p_0 = \pm\omega_\pm, \mathbf{p}) = 0 \quad (21)$$

で定義される (反) 準粒子のエネルギー。(9) から (10) への議論と同様にして G'_c からの (反) 準粒子数密度への寄与

$$\delta N_\pm(X; \pm\omega_\pm, \pm\mathbf{p}) \simeq \frac{Z_\pm}{2} \tau_\pm \left[\Gamma_\pm^{(p)} + \frac{1}{2\omega_\pm} \{f, Re\Sigma_R\} \right]_{p_0=\pm\omega_\pm} \quad (22)$$

を得る。ここで $Z_\pm$ は波動関数繰り込み因子、 $\tau_\pm \equiv 2\omega_\pm / |Im\Sigma_R(X; p_0 = \pm\omega_\pm, \mathbf{p})|$ は (反) 準粒子の寿命、 $\Gamma_\pm^{(p)} \equiv \tilde{\Gamma}^{(p)} / 2\omega_\pm$ ($p_0 = \pm\omega_\pm$) は (反) 準粒子の実効生成率。今、(22) で暫く $Z_\pm$ を忘れる ($Z_\pm = 1$) ことにすると、右辺括弧内の第 1 項の部分の $\delta N_\pm$ への寄与は $\tau_\pm \Gamma_\pm^{(p)} / 2$ 。これは時間 $\tau_\pm / 2$ の間の、実効生成率による、準粒子数の増加又は減少。“零幅極限”、 $Im\Sigma_R \rightarrow -0^+$ 、では $\tau_\pm = \infty$ 。幅が狭ければ、寿命 $\tau_\pm$ は長く、 $N_\pm$ に対する摂動補正 $\delta N_\pm$ は“大きな寄与”。この章の冒頭の議論 (II.1 節) を思い出すと、 $\tau_\pm$ は、反応を特徴づけるミクロ時間スケールでみれば大きいのであって、系の様相の変化を特徴づけるマクロ時間スケールでみれば小さい。ミクロ時間 $\tau_\pm / 2$ からマクロ時間 $\tau_\pm / 2$ へ：運動量 $\mathbf{p}$ ($-\mathbf{p}$) の準粒子 (反準粒子) モードを考えていることを念頭において、上の観測から、(22) は

$$\begin{aligned} \delta N_\pm(X_0 + \tau_\pm/2, \mathbf{X} + \mathbf{v}_\pm \tau_\pm/2; \pm\omega_\pm, \pm\mathbf{p}) - \delta N_\pm(X_0, \mathbf{X}; \pm\omega_\pm, \pm\mathbf{p}) \\ \simeq \frac{Z_\pm \tau_\pm}{2} \left[\Gamma_\pm^{(p)} + \frac{1}{2\omega_\pm} \{f, Re\Sigma_R\} \right]_{p_0=\pm\omega_\pm} \end{aligned} \quad (23)$$

と解釈すべし。ここで $\mathbf{v}_\pm = \pm\partial\omega_\pm/\partial\mathbf{p}$ は (反) 準粒子の速度。マクロ時間スケールで見れば $\tau_\pm$ は小さいので、差分方程式 (23) から偏微分方程式が得られ、それと (12), (10) より $\mathcal{N}_\pm \equiv N_\pm + \delta N_\pm$ が従う (一般化された) ボルツマン方程式 (下の (27) 参照) が得られる。

露には書かなかったが、 G_c の他の部分 $G_c - G'_c$ は、 G_R や G_A 同様、“零幅極限”で well-defined な超関数。故に、この部分は (反) 準粒子数分布関数に (相互作用による) “通常の摂動補正” $\delta\mathcal{N}_\pm$ をもたらす。而して、物理的分布関数は

$$\mathcal{N}_{\text{phys}}^{(\pm)}(X; P) = N_\pm(X; P) + \delta N_\pm + \delta\mathcal{N}_\pm. \quad (24)$$

研究会報告

上の (13) に続く注意より、 $\delta N_{\pm}$ 及び $\delta \mathcal{N}_{\pm}$ は摂動計算により $N_{\pm}$ の汎関数として算出される。又、摂動論の精神より、 $\delta N_{\pm}, \delta \mathcal{N}_{\pm}$ は $N_{\pm}$ に対する摂動補正。かくして、(24) は $N_{\pm}$ に関して逐次的に解くことができ、 $\mathcal{N}_{\text{phys}}^{(\pm)}$ の汎関数として書ける； $N_{\pm} = N_{\pm}[\mathcal{N}_{\text{phys}}^{(+)}, \mathcal{N}_{\text{phys}}^{(-)}]$ 。但し、(24) に “大きな寄与” $\delta N_{\pm}$ が存在することの反映として、この汎関数は “大きな係数” を含んでいる。以上の準備の上に立ち、この小節を次の命題で締めくくる：摂動計算された種々の振幅や反応率、 $\mathcal{A}$ 、は伝播子 Δ_{ij} ($i, j = 1, 2$) を通じて $N_{\pm}(X; P)$ に依る ((13) と、その下の注参照)； $\mathcal{A}[N_+, N_-]$ 。一般に、この $\mathcal{A}$ は、上述の G'_c による “大きな係数” を含む。 $\mathcal{A}[N_+, N_-]$ の $N_{\pm}$ に、上で得られた $N_{\pm} = N_{\pm}[\mathcal{N}_{\text{phys}}^{(+)}, \mathcal{N}_{\text{phys}}^{(-)}]$ を代入してえられた $\mathcal{A}[\mathcal{N}_{\text{phys}}^{(+)}, \mathcal{N}_{\text{phys}}^{(-)}]$ は “大きな係数” を含まず、摂動論による計算が信頼できる (文献 [6] 参照)。

II.4 Physical- N スキーム

この小節では (10) の $N_{\pm}$ が物理的 (反) 準粒子数密度 (に近いもの) になるスキームを次の手順で構成する。

1. 途中まで、関数 f を特定しないで進む。従って、(12) は一般に不成立で、非摂動ラグランジュ密度は (11) ではなくなる。
2. 非摂動 hat-ラグランジュ密度 $\hat{\mathcal{L}}'_0$ を構成するには、(6) - (8) から構成した 2×2 行列伝播子 $\hat{\Delta}(x, y)$ の逆を求めればよい。 $\hat{\Delta}(x, y)$ に (11) から作った $\hat{\mathcal{L}}_0$ (cf. (4)) の “核部分” である $\tau_3(\partial_x^2 + m^2)$ を作用させることにより、 $\hat{\Delta}(x, y)$ の逆は

$$-\tau_3(\partial_x^2 + m^2)\delta^4(x - y) - (1 - \tau_1)(\partial_x^2 - \partial_y^2)f(x, y)$$

(1 は 2×2 単位行列) であることが知れ、これから $\hat{\mathcal{L}}'_0$ が構成される。

3. $\hat{\mathcal{L}}'_0 \neq \hat{\mathcal{L}}_0$ 故、カウンター hat-ラグランジュ密度 $\hat{\mathcal{L}}_c = \hat{\mathcal{L}}_0 - \hat{\mathcal{L}}'_0$ が出現。勾配近似で $\hat{\mathcal{L}}_c$ は、そのフーリエ成分が

$$2(1 - \tau_1) \left[p_0 \frac{\partial}{\partial X_0} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right] f(X; P)$$

である 2 点分岐を生成。(Bare- N スキームでは、当然乍ら、(12) によりこれは零。) 2 点分岐は自己エネルギー部分に寄与するので、今の場合 (17) に対応する $\Sigma'(X; P)$ は

$$i\Sigma'(X; P) \simeq \left\{ f(X; P), P^2 - m^2 - \text{Re}\Sigma_R(X; P) \right\} - \tilde{\Gamma}^{(p)}(X; P). \quad (25)$$

ここまでは f の関数形について如何なる特定もなし。

4. 前小節の Bare- N スキームのところでの観測の復習：

- G_c への寄与 G'_c ((14) 式) が、摂動論にとって具合の悪い “大きな寄与” — “零幅極限” では発散する寄与 — を与えた。特に、(反) 準粒子数分布に、大きな寄与 $\delta N_{\pm}$ をもたらしした。

- (14) に見るように $G'_c \propto \Sigma'$ 。

この事実から、これまで任意だった f を決める条件として

$$\Sigma'(X; P) = 0 \quad (26)$$

を採用。この結果、このスキームによる摂動計算では（“零幅極限”で発散する）“大きな寄与”は現れず、全ての寄与は“健全な”摂動補正である。

5. (一般化された) ボルツマン方程式： 条件式 (26) に (25) を用い、(21) により質量殻上 ($p_0 = \pm\omega_{\pm}(X; \pm\mathbf{p})$) にもっていくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\pm}}{\partial X_0} + \mathbf{v}_{\pm} \cdot \frac{\partial N_{\pm}}{\partial \mathbf{X}} \pm \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial X_{\mu}} \frac{\partial N_{\pm}}{\partial P^{\mu}} \\ = \frac{dN_{\pm}(X; \omega_{\pm}(X; \pm\mathbf{p}), \pm\hat{\mathbf{p}})}{dX_0} + \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{dN_{\pm}}{d\mathbf{X}} - \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{dN_{\pm}}{d\mathbf{p}} \\ \simeq Z_{\pm} \Gamma_{\pm}^{(p)} \Big|_{p_0 = \pm\omega_{\pm}} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで $N_{+}(X; p_0 = \omega_{+}, \hat{\mathbf{p}})$ ($N_{-}(X; -p_0 = \omega_{-}, -\hat{\mathbf{p}})$) は準粒子数密度 (反準粒子数密度)、他の表記は前小節と同じ。この式の最右辺の実効生成率 $\Gamma_{\pm}^{(p)}$ は、ボルツマン方程式のいわゆる衝突項。 $Z_{\pm}$ は波動関数の繰り込み (波動関数の規格化のし直し) による因子。最左辺の最後の項は、繰り込みによって生じる、(反) 準粒子のエネルギーの (弱い) 時空間座標依存性の存在による寄与。

II.5 この章のまとめ

この章では、平衡に近い、又は、非平衡だが定常に近い複素スカラー量子場系を扱う摂動論を構築した。このような系では、時空座標を、(反応を特徴づける) ミクロ座標と (系の緩和を特徴づける) マクロ座標に “分ける” ことができる。前者は後者に比べ桁が小さく、伝播子や自己エネルギー部分等のマクロ座標依存性は緩慢故、マクロ座標に関する微分展開 (テーラー展開) には勾配近似を用いた。

非摂動ラグランジアンを選択の違いに対応して、Bare- N スキーム、及び Physical- N スキームと名付けた、2種類の摂動計算スキームを構成した。両スキーム共に、物理的 (反) 粒子数分布関数に対して、本質的に同じ (一般化された) ボルツマン方程式の成立を保障し、依って以て両スキームは同等。[この両スキームの関係と、場の量子論の紫外繰り込みのスキーム間との形式的類似性については [6]。]

III 線形シグマ模型

I.3 節で触れたように、QGP が冷えていくと、QCD 相転移温度に極めて近い、百数十 MeV の温度で（カイラル対称性⁶の自発的破れによる）カイラル相転移がおこる。⁶ この相転移によって“出現”する3個の（零質量）南部-ゴールドストンボソンがパイ中間子。現実にはクォーク質量は零ではないため、QCD のカイラル対称性は近似的なもの故、パイ中間子の質量は、他のハドロンに比べて軽い、零ではない。

QCD のカイラル相転移を模した玩具模型として、Gell-Mann-Lévy のシグマ模型が再注目され、カイラル相転移が進行してパイ中間子が生成し、系が冷えていく過程が調べられてきている（文献については [7] の引用文献参照）。一般に、相転移の進行過程は、次のように記述される。時々刻々の“相”は、凝縮場（又は、秩序変数関数） $\phi(x)$ （一般には複数ある）によって記述される。系の“相”は、量子、及び媒質効果によって変化していくが、それは $\phi(x)$ のまわりの量子揺動場 — それは、 $\phi(x)$ の“上に建設される”Fock 空間に在住 — の揺動（揺らぎ）によって記述される。本章では、相転移がゆっくり進行する（ $\phi(x)$ の x -依存性が緩慢）場合の（フェルミ粒子との相互作用を入れない）線形シグマ系を扱う [7]。系は空間的に準一様で、量子揺動場の摂動論的取り扱いに関し、II 章で論じたような摂動論が適用できるものとする。従って、勾配近似以外の近似は用いない。かく限られた状況設定の下、相転移の進行を支配する枠組みを構成。注意点：相転移点に近い臨界領域ではミクロ相関が大きくなるため、ここで一貫して仮定し、使っている描像 — マクロ・スケールはマクロ・スケールに比べ桁違いに小さい — は成立しない。

（フェルミ粒子を含まない）線形シグマ模型はラグランジュ密度は

$$\mathcal{L}(\vec{\phi}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_\mu} - m^2 |\vec{\phi}|^2 \right] - \frac{\lambda}{4!} (|\vec{\phi}|^2)^2 + \vec{H} \cdot \vec{\phi} \quad (\lambda > 0) \quad (28)$$

で定義される。ここで $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ は内部4次元空間のベクトルの実スカラー場。外場 $\vec{H}$ がない ($\vec{H} = \vec{0}$) と、 $\mathcal{L}$ は $O(4)$ 対称性をもつ。 $m^2 < 0$ の場合、この対称性は自発的に破れ、南部-ゴールドストンボソンである3個のパイ中間子と1つのシグマ中間子の系を記述。 $\vec{\phi}(x)$ を、古典的場である凝縮場 $\vec{\varphi}(x)$ と、そのまわりの量子揺動場 $\vec{\phi}'(x)$ の和、 $\vec{\phi}(x) = \vec{\varphi}(x) + \vec{\phi}'(x)$ 、に分ける。扱っている系では $\vec{\varphi}(x)$ の ' x ' はマクロ時空座標であり ($\vec{\varphi}(x)$) の x -依存性は緩慢。 $\vec{\phi}'$ を支配するラグランジュ密度は $\mathcal{L}(\vec{\varphi} + \vec{\phi}') - \vec{\phi}' \cdot \partial \mathcal{L}(\vec{\varphi}) / \partial \vec{\varphi}$ で、4成分ある $\vec{\phi}'$ は、3つのパイ中

⁶ クォークはディラック（フェルミ）粒子。ディラック理論は、それぞれ2つのスピン自由度をもつフェルミ粒子と反フェルミ粒子を4-成分スピノール ψ で記述。カイラル対称性：カイラリティー演算子と呼ばれる 4×4 行列 γ_5 の固有値 (+1, +1, -1, -1) がカイラル電荷（又は、カイラリティー） χ 。 ψ を、カイラリティー $\chi = +1$ と $\chi = -1$ の（それぞれ2つで合計）4つの固有関数で展開し、それぞれの展開項の位相を、そのカイラル電荷に比例した大きさの角度だけ変える変換がカイラル変換。零質量ディラック（反）粒子の場合、そのカイラリティーとヘリシティーは絶対値は等しく同（異）符号。但し、ヘリシティーはスピンの運動量方向への射影成分の2倍。QCD は、クォーク質量が零の極限でカイラル対称性（カイラル変換に対する不変性）を持つ。因みに、不思議なことに、コンピュータ計算によれば（少なくとも $\mu = 0$ の場合）カイラル相転移温度は QCD 相転移温度に極めて近い。

間子的モード π と、1つのシグマ中間子的モード σ に“分離”。内部4次元空間内に次のような準拠系が採れる：第4軸が“ σ 方向”で、それに直交する3次元部分空間が π の自由度を表現。この準拠系の向きは $\vec{\varphi}(x)$ に依存し、マクロ座標 x と共にゆっくり変わる：

$$\vec{\phi}'(x) = [\mathbf{P}_\pi(x) + \mathbf{P}_\sigma(x)] \cdot \vec{\phi}(x). \quad (29)$$

ここで 4×4 行列 $\mathbf{P}_{\pi(\sigma)}(x)$ は射影演算子 ($\mathbf{P}_\pi(x) + \mathbf{P}_\sigma(x) = \mathbf{I}$) で、 $\mathbf{P}_\sigma(x)$ の (α, β) -成分は $\varphi_\alpha(x)\varphi_\beta(x)/|\vec{\varphi}(x)|^2$ 。 π, σ の質量 (の2乗) は、それぞれ $M_\pi^2(x) = -|m^2| + \lambda\varphi^2(x)/6$ 、 $M_\sigma^2(x) = -|m^2| + \lambda\varphi^2(x)/2$ で、これらも x に (弱く) 依存。

効率のよい枠組みを作るために、非摂動ラグランジアンに含まれる質量 (関数) として、上の $M_{\pi(\sigma)}^2(x)$ に、量子、並びに媒質効果からくる寄与を加えたもの、 $\mathcal{M}_{\pi(\sigma)}^2(x)$ 、を選ぶ。この“量子、及び媒質効果を加えたもの”という条件が、 $\mathcal{M}_{\pi(\sigma)}^2(x)$ を自己無撞着に決定するギャップ方程式に導く。⁷

以下、前のII章で、複素スカラー場理論に対して摂動論を構築した手順に倣って、今の場合に摂動論を構築。しかし、II章の摂動論にはなかった、次のような特徴がある：上で見たように、 $\mathbf{P}_{\pi(\sigma)}(x)$ ((29) 式)、 $M_{\pi(\sigma)}^2(x)$ 、 $\mathcal{M}_{\pi(\sigma)}^2(x)$ 達は全てマクロ時空座標の関数で、 x に (弱く) 依存。従って、これらの量の微分展開が必要になれば、勾配近似を使用。この点に注意すれば、あとはII章の摂動論の構築と変わるところはなく、例えば、 $\vec{\pi}(x)$ 及び $\vec{\sigma}(x)$ の粒子数分布関数の従う、一般化されたボルツマン方程式が導かれる。

次いで、閉時間経路形式を用いて、凝縮場 $\vec{\varphi}$ の有効作用を構成。上で構成した摂動論を適用して、この有効作用のループ展開が計算でき、そのオイラー微分をとることにより、 $\vec{\varphi}$ の従う運動方程式が得られる。

纏め：非平衡線形シグマ系の相転移の進行を記述する方程式系

- 運動方程式 (凝縮場 $\vec{\varphi}(x)$ の時間 (空間) 発展を支配)、
- ギャップ方程式 (有効質量 $\mathcal{M}_{\pi(\sigma)}(x)$ を自己無撞着に決定)、
- 一般化されたボルツマン方程式 (量子揺動場 $\vec{\pi}(x)$ 、 $\vec{\sigma}(x)$ で表される“パイ中間子”、“シグマ中間子”の個数分布の時間 (空間) 依存性を支配)、

が得られる。この方程式系を連立させて解くことにより、相転移の進行が記述される。但し、勾配近似を用いているので、適用対象は、相転移の進行に伴う系の様相の変化が緩慢な場合に限られる。更に、ここで構成した枠組みは、本章の始めの方で言及したように、相転移点近傍の臨界領域から、ある程度以上“離れている”系にのみ適用可能。

⁷ この種の方法に関しては [8]、及びその引用文献参照。

研究会報告

謝辞：このシンポジウムにお招き下さった有光敏彦教授、並びに組織委員の皆様に心より感謝致します。

参考文献

- [1] 牲川章、解説『平衡・非平衡系の場の量子論 — クォーク・グルーオンプラズマ』、日本物理学会誌 **54**, No.7 (1999) 535.
- [2] M. Le Bellac, "Thermal Field Theory," Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] K.-C. Chou, Z.-B. Su, B.-L. Hao, and L. Yu, Phys. Rep. **118** (1985) 1、及びその引用文献。
- [4] H. Umezawa, "Advanced Field Theory — Micro, Macro, and Thermal Physics" (AIP, New York, 1993) [翻訳：H. Umezawa 著、有光敏彦・有光直子共訳：『場の量子論：ミクロ、マクロ、そして熱物理学の最前線』（培風館、1995）。]
- [5] J.-P. Blaizot and E. Iancu, Nucl. Phys. **B557** (1999) 183.
- [6] A. Niégawa, Prog. Theor. Phys. **102** (1999) 1.
- [7] A. Niégawa, hep-th/9810043（この論文は近々改訂予定）。
- [8] S. Chiku and T. Hatsuda, Phys. Rev. D **58** (1998), 076001.