

ハミルトン系のリアプノフ解析¹

京都大学大学院 情報学研究科 山口 義幸²

1 はじめに

ハミルトン力学系は、天体力学・化学反応・加速器中の粒子などさまざまな現象を記述することができる一方で、シンプレクティック性という共通の特徴を持っている。このため、相互作用の形といった系の詳細に依存しない性質がいろいろ存在する。このような、系を横断すると言う意味で普遍的な性質を明らかにすることにより、多様な系を統一的に理解することができる。実際、2自由度系の場合には、KAMの定理・Poincaré-Birkhoffの定理 [LL92] といった理論的な成果や、相空間の次元を落とす Poincaré 断面といった手法により、相空間に自己相似的階層構造が形成されることが知られている。またこの構造が $1/f$ ゆらぎというダイナミクスの特徴を生み出していることも示唆されている [Aiz84, AKH⁺89]。

しかし、多自由度 (3 自由度以上) 系に対してはいまだ不明な点が多く、ハミルトン力学系の大きな問題として残されている。多自由度系の理解が難しい理由は、相空間が高次元になることであり、例えば Poincaré 断面を取ったとしても 4 次元以上になってしまう。この困難に対するアプローチ法の一つにリアプノフ解析がある。リアプノフ解析は、相空間のすべての次元の情報をシンプレクティック性を反映した状態で拾い出せるため、多自由度系にアプローチする有力な手法の一つと言える。リアプノフ解析とは、軌道の不安定性を元に力学系の性質を調べることを行い、大きく 2 種類に分けられる：(i) 大域的な性質として無限時間の平均値を扱うリアプノフスペクトルと、(ii) 局所的な性質として短時間の情報を与えるリアプノフベクトルである (この他に、局所リアプノフスペクトルという量も存在するが本稿では触れない)。本稿では、これらの道具立てを用いて多自由度ハミルトン力学系を理解する試みを紹介する。

まず第2節で、リアプノフ解析の道具立てについて簡単に復習する。次に第3節で力学系の相互作用の詳細によらない普遍的なリアプノフスペクトルが存在することを示し、その普遍性を生み出す原因について考察する。第4節ではリアプノフベクトルを扱う際の問題点を指摘し、その問題点を解決する幾何学的方法を提

¹ この研究の一部 (第4節) は、京都大学大学院情報学研究科・岩井敏洋氏との共同研究である。

² E-mail: yyama@amp.i.kyoto-u.ac.jp

案する。第5節では、前節で提案した幾何学的方法と従来の方法を、数値計算を用いて比較する。最後の第6節でまとめを述べる。

2 リアプノフ解析の道具立て

リアプノフ解析とは、力学系の軌道が初期値のわずかなずれに対してどれくらい敏感かを調べる手法である。 R^n 上の力学系 $dx/dt = f(x)$ とその解 $x(t)$ を考えよう。この解は任意の時間で有界領域に留まっていると仮定する： $\|x(t)\| < \infty$, $t \in (-\infty, \infty)$ 。この解の初期値をわずかにずらすと解は $x(t) + \epsilon X(t)$ と書ける。 $\epsilon X(t)$ が微小量とすると、 $X(t)$ が従う式は f のヤコビ行列 Df を用いて

$$\frac{dX}{dt} = Df(x(t)) \cdot X \quad (1)$$

と書ける。式(1)は線形方程式であるため、 n 個の独立解 $X_1(t), \dots, X_n(t)$ を持ち、これらは Gram-Schmidt の方法で $V_1(t), \dots, V_n(t)$ に直交化することができる：

$$V_i(t) = X_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle X_i(t), V_j(t) \rangle}{\langle V_j(t), V_j(t) \rangle} V_j(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

このとき、 $V_i(t)$ を 第*i*リアプノフベクトル と言い、 $V_i(t)$ の指数的伸び率の時間平均

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|V_i(t)\|}{\|V_i(0)\|}, \quad i = 1, \dots, n$$

を 第*i*リアプノフ数 という。これら n 個のリアプノフ数 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ をまとめて リアプノフスペクトル という。リアプノフスペクトルの値は、式(1)の初期値空間 $\{X_1(0), \dots, X_n(0)\}$ のルベーグ測度ゼロの集合を除いて初期値に依存せず [Ose68, BGS76]、このとき $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ となる。

N 自由度ハミルトン系の場合、 $n = 2N$ となり、シンプレクティック性から

$$\lambda_i = -\lambda_{2N-i+1}, \quad i = 1, \dots, 2N \quad (2)$$

なる対称性が成り立つ。そのため、独立なリアプノフ数の数は、相空間の次元 $2N$ の半分の N 個となる。よって、第3節でリアプノフスペクトルについて考察するときには、 λ_1 から λ_N までのみ観察することにする。また、解の進行方向 $\dot{x}(t)$ は式(1)の一つの解であるが、この方向には指数的不安定性は存在しない。したがって、この解に対応するリアプノフ数はゼロとなる： $\lambda_N = 0$ 。さらに、対称性(2)から $N+1$ 番目のリアプノフ数が $\lambda_{N+1} = -\lambda_N = 0$ とゼロであることも得られるが、これは $\text{grad}H$ の方向に対応する。

3 リアプノフスペクトルの普遍性

ハミルトン系の場合、KAM の定理や Poincaré-Birkhoff の定理 (2 自由度系) [LL92] に見られるように、系の詳細によらない普遍的な性質がある。しかし、多自由度系における普遍性の理解はいまだ不十分であると言える。そこでここではリアプノフスペクトル $L(i/N) = \lambda_i$ の普遍性から、多自由度ハミルトン系が持つ普遍性について考察する。

これまで知られていた普遍性は、stochastic とみなせるほどカオスが発達した系における直線形 $L(i/N) = a(N-i)$ であった [LPRV87]。しかし、それより弱いカオスの場合にも普遍性が存在することが報告されている [Yam98]。図 1 は 4 つの系におけるリアプノフスペクトルを示している。横軸は正規化されたリアプノフ数の番号 i/N で、縦軸はスケールされたリアプノフ数 $\gamma\lambda_i$ を表している。リアプノフスペクトルを一様にスケールすることは、時間 t を t/γ にスケールすることと同等であり、特別な操作ではない。4 つの系は 3 次元単純立方格子上的非線形素子からなるポテンシャル系で、ハミルトニアンは

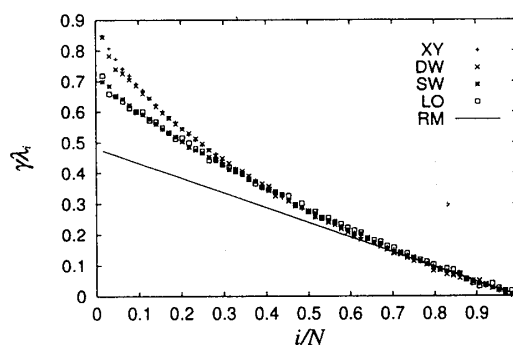


図 1: カオスが Stochastic ほど強くはない系におけるリアプノフスペクトルの普遍性。自由度 $N = 4^3 = 64$ 。領域 $i/N > 0.4$ では系によらない同じ形が得られる。直線は、発達したカオス系で得られる直線スペクトルを示している。

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + V(q) \quad (3)$$

であり、それぞれ系のポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_{XY} &= \sum_{\langle ij \rangle} [1 - \cos(q_i - q_j)], & V_{DW} &= \sum_{\langle ij \rangle} \frac{1}{2} (q_i - q_j)^2 + \sum_{j=1}^N \left(-\frac{1}{2} q_i^2 + \frac{1}{4} q_i^4 \right), \\ V_{LO} &= \sum_{\langle ij \rangle} \frac{1}{2} (q_i - q_j)^2 + \sum_{j=1}^N \frac{q_i^2}{1 + q_i^2}, & V_{SW} &= \sum_{\langle ij \rangle} \frac{1}{2} (q_i - q_j)^2 + \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2} q_i^2 + \frac{1}{4} q_i^4 \right), \end{aligned}$$

である。ここに、 $\sum_{\langle ij \rangle}$ は最近接格子間のみの和を表す。図 1 によると、 $i/N > 0.4$ の領域では 4 本のスペクトルがよく重なっていることと、その形が従来の直線形では近似できないことが分かる。

エネルギー値が低い場合 (系 XY と LO は高い場合も)、系は可積分系でよく近似されるが、このようなエネルギー領域では図 1 に見られるリアプノフスペクトル

ルとは違う形となる。つまり相空間の構造として、KAM トーラスが支配的な場合はここで述べた普遍性は現れないと考えられる。しかし一方でこの普遍性が現れるときはポテンシャルの2次項が高次項に比べて優勢であり [Yam98]、発達したカオスのように構造がなくなっているわけでもない。これらのことから、 N 次元 KAM トーラスの部分的な次元が崩壊したウィスカートーラスが、ここで得られた普遍性を生み出しているのではないかと考えられる。この傍証として、さまざまな次元のウィスカートーラスを組合せ論的に数え上げ、それぞれが相空間での運動に与える影響を考えた簡単なモデルでは、ウィスカートーラスが作る階層構造が $1/f$ 揺らぎという力学系の特徴を再現することが示されている [YK98]。

4 リアプノフベクトルと幾何学的方法

大域的な指数であるリアプノフスペクトルでは、系の分類と相空間の構造の特徴を示唆することができた。これより詳しい情報、とくにダイナミクスに関する情報を得るためには局所的な不安定性を解析することが必要になる。例えば、シンプレクティック写像系においてリアプノフベクトルを解析することにより、最も小さい正のリアプノフ数がクラスター運動に対する不安定性を示している、という議論が行われている [KK92]。

リアプノフベクトルを考える時に問題になるのが、それらが従う線形化微分方程式 (1) である。時間 t を、 $ds = \phi(x)dt$ と変数 x に依存するように変換すると運動方程式は $dx/ds = f(x)/\phi(x)$ となる。当然ながら、この式は元の式 $dx/dt = f(x)$ と完全に同一である。しかし、変換した運動方程式を線形化してから時間を t に戻すと

$$\frac{dX}{dt} = Df \cdot X - \frac{f(x)}{\phi(x)} (\text{grad}\phi(x) \cdot X)$$

となり式 (1) とは異なる形の式が得られる。すなわち、運動方程式の書き方によってリアプノフ数やリアプノフベクトルは変化するものと言える。

では「よい」運動方程式とはどのようなものだろうか？ハミルトン系の場合、軌道の進行方向とハミルトニアン勾配方向には指数的不安定性は発生せず、それに伴って $\lambda_N = \lambda_{N+1} = 0$ となる。よって、第 $N, N+1$ 以外のリアプノフベクトルはこれらの方向と常に垂直であって欲しい。この要請を満たせば、リアプノフベクトルからゼロリアプノフ数に対応する方向を排除でき、純粋に安定／不安定性方向を得ることができる。「よい」運動方程式の条件を定式化すると次の3つになる：

- (i) 第 N リアプノフベクトルは常に軌道の進行方向を向いている。
- (ii) 第 $N+1$ リアプノフベクトルは常にハミルトニアン勾配方向を向いている。
- (iii) これら2つ以外のリアプノフベクトルは、常に上記2方向に垂直である。

しかしながら、普通に正準方程式を線形化しただけではこの要請は一般には満たされない。

そこで、幾何学的方法を用いて運動方程式を書き換える。まず、対象とする系を式(3)の形の自然ハミルトン系とする。幾何学的方法では、配位空間 M 上に適当な計量 g を導入することにより運動方程式

$$\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0 \quad (4)$$

を測地線方程式

$$\nabla_\xi \xi = 0 \quad (5)$$

として表す。ただし、 ∇ は接続、 ξ は測地線接ベクトルであり、

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} = \frac{d\xi^i}{ds} \frac{\partial}{\partial q^i}$$

と書ける。”時間” s は計量 $g = g_{ij}(q) dq^i \otimes dq^j$ を用いて $ds^2 = g_{ij}(q) dq^i dq^j$ で決定される。ここでは、 $g_{ij}(q)$ が配位空間上の関数であることに注意されたい。また、アインシュタインの縮約規則を用いており、同一項に同じ添字が出て来る場合には和を取ることにする。式(4)と(5)とは同じ解を持つが、測地線方程式を与えるハミルトニアンは

$$H^{(\text{geo})}(q, p) = \frac{1}{2} g^{ij}(q) p_i p_j \quad (6)$$

と書かれる。

式(4)と(5)との線形化方程式は、それぞれ

$$\frac{d^2 X^i}{dt^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j} X^j = 0, \quad (7)$$

$$\nabla_\xi \nabla_\xi X + R(X, \xi) \xi = 0, \quad (8)$$

となり、これらは s と t との”時間”の変換では移り合えない。ここに、 R は曲率テンソルである。後者はヤコビ方程式と呼ばれており、これを用いることによって先の3つの要請を満たすようにできる。

ヤコビ方程式によって軌道不安定性を考察する方法は、第1リアプノフ数を解析的に見積もるために導入された [Pet93, CPC99]。しかしここでは「よい」リアプノフベクトルを得るための手段として用いる。ただし、ヤコビ方程式が2階の微分方程式であることから分かる通り配位空間 M (座標: (q^i)) で軌道不安定性の議論をしているので、これを相空間 T^*M (座標: (q^i, p_i)) にリフトしなければならない。

ベクトル、計量、接続を配位空間から相空間にリフトした結果、ヤコビ方程式のリフトとして次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dX^i}{ds} &= -\Gamma_{jk}^i \xi^k X^j + g^{ij} X^{\bar{j}}, \\ \frac{dX^{\bar{i}}}{ds} &= -R_{jkl i} \xi^k \xi^l X^j + \Gamma_{ik}^j \xi^k X^{\bar{j}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Γ_{jk}^i と R_{jkli} は配位空間上の計量 g から導かれたクリストッフェル記号と曲率テンソルの成分であり、相空間上にリフトされたベクトル $\widetilde{X}$ は adapted frame と呼ばれる

$$D_i = \frac{\partial}{\partial q^i} + p_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad D_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial p_i},$$

を用いて $X = X^i D_i + X^{\bar{i}} D_{\bar{i}}$ と書き、 $\bar{i} = i + N$ とした。

相空間におけるベクトルの直交性は、リフトした計量 $\widetilde{g}$

$$\widetilde{g} = g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j + g^{ij} \theta^{\bar{i}} \otimes \theta^{\bar{j}}$$

を用いて議論する。ここに、

$$\theta^i = dq^i, \quad \theta^{\bar{i}} = dp_i - p_k \Gamma_{ij}^k dq^j$$

は $\{D_i, D_{\bar{i}}\}$ の双対基底である。線形化運動方程式 (9) を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \widetilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{\xi}) &= dH^{(geo)}(\widetilde{X}) \\ \frac{d}{ds} dH^{(geo)}(\widetilde{X}) &= 0 \end{aligned}$$

が示せる。したがって、リアプノフベクトルを初期に進行方向 $\widetilde{\xi}$ とハミルトニアン の勾配方向 $dH^{(geo)}$ の双方に垂直に取っておけば、自動的に両方の直交性が保たれる。

一方、 $\widetilde{\xi}$ と $(dH^{(geo)})^* + s \widetilde{\xi}$ はリフトしたヤコビ方程式 (9) の解である。ただし、 $(dH^{(geo)})^*$ は 1 形式 $dH^{(geo)}$ の双対ベクトルである。このことから、初期ベクトルの集合として

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_N(0) &= \widetilde{\xi}(0), \quad \widetilde{X}_{N+1}(0) = (dH^{(geo)})^*(0), \\ \widetilde{X}_i(0) &= (\widetilde{X}_N(0) \text{ と } \widetilde{X}_{N+1}(0) \text{ が張る平面に垂直なベクトル}) \\ (i &= 1, \dots, N-1, N+2, \dots, 2N) \end{aligned}$$

としておけば、先の 3 つの要請が満たされていることがわかる。

5 モデル系による幾何学的方法の実行

前節で理論的に示された結果を、モデル系を使って数値的に確認する。モデルとしては、Hénon-Heiles 型の相互作用をする 3 自由度系を用いる。自由度が 3 であるのは、それがリアプノフスペクトルが意味を持つ最小自由度という理由による。モデル系のハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \frac{1}{2} p^2 + V(q) = \frac{1}{2} p^2 + \sum_{i=1}^3 V_{HH}(q^i, q^{i+1}), \quad (q^4 = q^1) \\ V_{HH}(x, y) &= x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \end{aligned}$$

と書かれる。配位空間上の計量としてはヤコビ計量 $g = 2(E - V)dq^i \otimes dq^j$ を用いる。

相空間上の軌道 $(q^i(t), p_i(t))$ と線形化方程式 (7) は 4 次の Symplectic Integrator を用いて計算した。また、リフトしたヤコビ方程式 (9) は陽な Symplectic Integrator で書けないため、6 次の陰的 Runge-Kutta 法によって数値計算した [HNW93]。双方とも、時間の刻幅は実時間 t にして $\Delta t = 2.5 \times 10^{-6}$ とした。初期条件は、 $q^i(0) = 0, p_i(0) = \alpha \gamma_i$ とした。ただし、 γ_i は $[0, 1]$ 区間の一様分布に従う乱数であり、 α は初期エネルギーの条件 $E = \sum_{i=1}^3 p_i(0)^2/2$ から決定した。また、ベクトルの初期条件は、

$$X_3(0) = \tilde{\xi}(0), \quad X_4(0) = (dH^{(\text{geo})})^*(0)$$

とし、 $X_1(0), X_2(0), X_5(0), X_6(0)$ を $X_3(0), X_4(0)$ の双方に垂直になるように取った。今回はさらに、 $X_a^i = X_b^i = 0, (a = 1, 2; b = 5, 6)$ となるように選んだ。

まず、自然ハミルトン系 (3) の正準運動方程式を線形化して得られる

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (10)$$

と式 (9) から得られるリアプノフスペクトルを比較する。図 2 は、 $E = 0.04$ におけるリアプノフ数の収束の様子を示している。縦軸は、

$$\Lambda_i(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{\|V_i(t)\|}{\|V_i(0)\|}$$

なる量を示し、定義から明らかに $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_i(t) = \lambda_i$ である。また、右肩に (geo) という添字が付いている量は式 (9) から、何も付いていない量は式 (10) から得られた量である。図 2 によると、双方の方法で得られたリアプノフ数は収束し、かつ収束値が一致することがわかる。次に、リアプノフ数のエネルギー依存性を図 3 に観る。これによると、リアプノフ数の一致はエネルギーに依らないことが分かる。

以上の観測によって、リアプノフ数については、(少なくとも今考えているモデルにおいては) 従来の方と幾何学的方法は同じ結果を与えることが分かった。そこで次に、リアプノフベクトルの差異について観測を試みよう。

図 4 と 5 は、正規化された各リアプノフベクトルと $\tilde{\xi}(t), (dH^{(\text{geo})})^*(t)$ との内積の時間発展をそれぞれ示している。エネルギーは $E = 0.04$ である。これら 2 つの図から、幾何学的方法は 3 つの要請を満たしていることがわかる。やや揺らぎが見えるのは、計算誤差のためである。Jacobi 計量を用いた幾何学的方法では $1/(E - V)$ なる因子が現れるため、ポテンシャルエネルギーの高い場所で誤差が生じやすい。一方、従来の方ではすべてのリアプノフベクトルが、いずれかの要請を満たさないことが観て取れる。図 5 で第 1, 2, 3 リアプノフベクトルは $(dH^{(\text{geo})})^*(t)$ との直交性を保っているのは、従来の方でも

$$\frac{d}{dt} dH(\tilde{X}) = 0$$

研究会報告

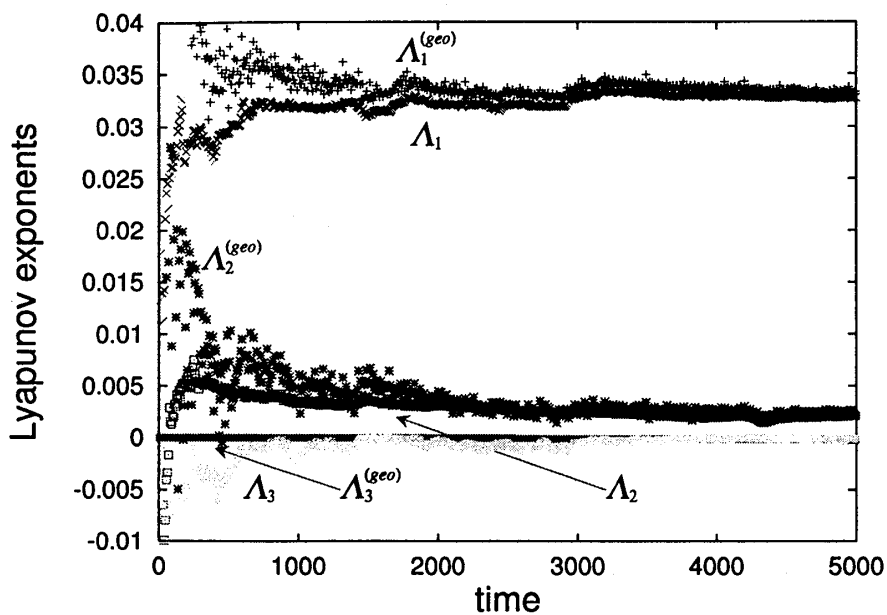


図 2: リアプノフ数の収束性。 $E = 0.04$. 従来の方法と幾何学的方法を用いたリアプノフ数は同じ値に収束する。

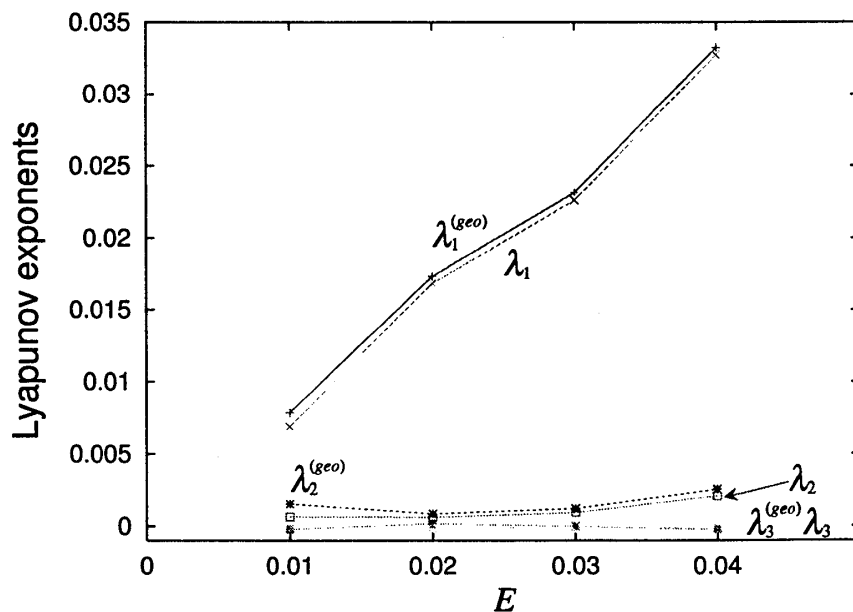


図 3: リアプノフ数のエネルギー依存性。エネルギーによらず、従来の方法と幾何学的方法とで得られたリアプノフ数は一致する。

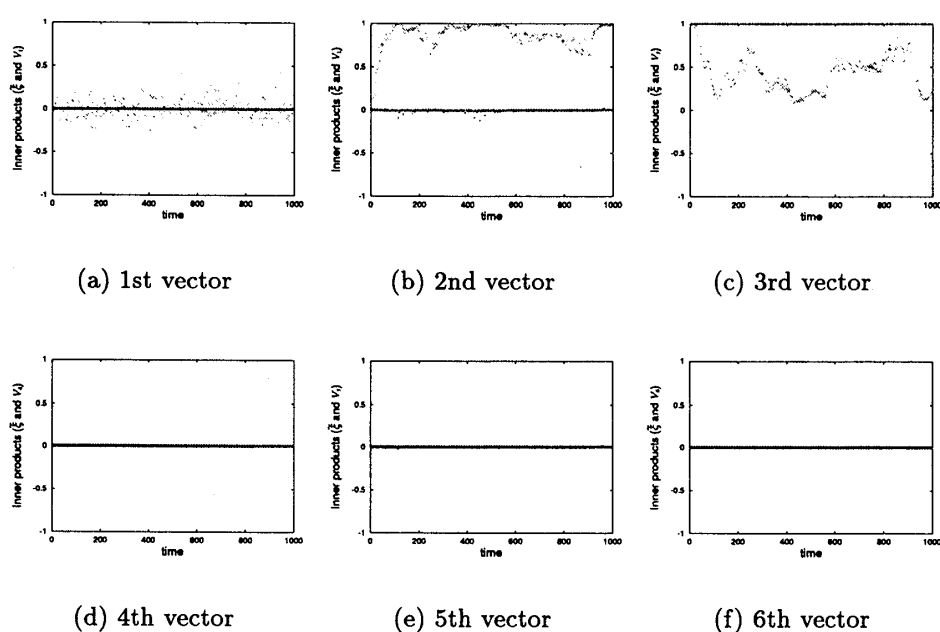


図 4: 正規化されたリアプノフベクトルと軌道の進行方向 $\tilde{\xi}(t)$ との内積の時間変化。 $E = 0.04$. 濃い直線が幾何学的方法の結果で、薄い曲線が従来の方法の結果。従来の方法では第 1, 2 リアプノフベクトルが $\tilde{\xi}$ との直交性を保てず、第 3 リアプノフベクトルが $\tilde{\xi}$ の方向からずれてしまうことがわかる。直交性を保てないことがわかる。(d),(e),(f) では薄い直線は濃い直線の陰に隠れてしまっている。

研究会報告

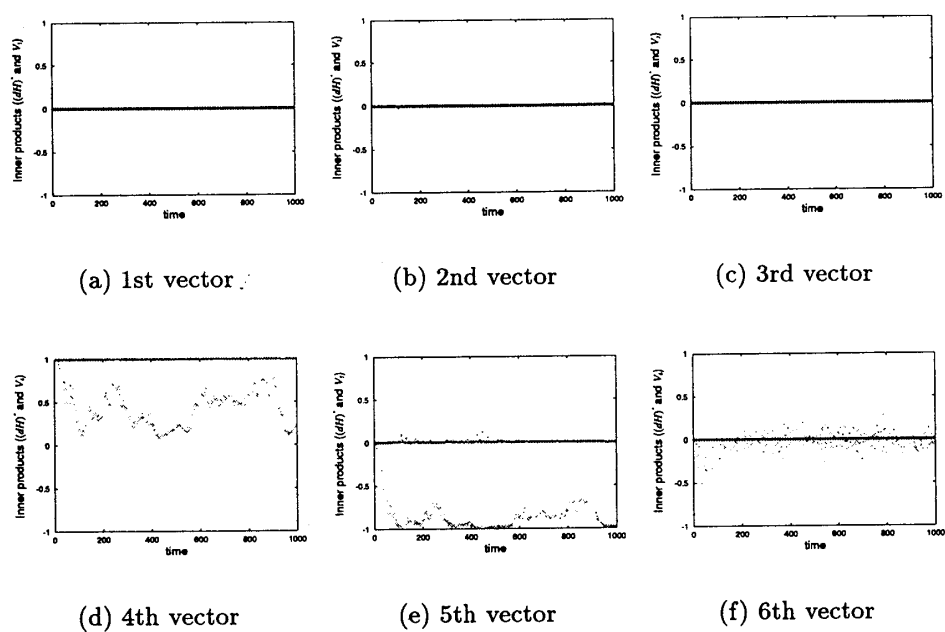


図 5: 正規化されたリアプノフベクトルとハミルトニアン勾配方向 $(dH^{(\text{geo})})^*(t)$ との内積の時間変化。 $E = 0.04$ 。 濃い直線が幾何学的方法の結果で、薄い曲線が従来の方法の結果。従来では第 5, 6 リアプノフベクトルが $(dH^{(\text{geo})})^*(t)$ との直交性を保てず、第 4 リアプノフベクトルが $(dH^{(\text{geo})})^*(t)$ の方向からずれてしまうことがわかる。(a),(b),(c) では薄い直線は濃い直線の陰に隠れてしまっている。

が成り立っているからである。

6 まとめ

本稿では、ハミルトン系におけるリアプノフ解析の方法と結果を、リアプノフスペクトルとリアプノフベクトルのそれぞれについて紹介した。

平均的な軌道不安定性を表すリアプノフスペクトルについては、相互作用の詳細によらない普遍的な形が二つ知られていることを述べた。一つは直線的なスペクトルであり、これは発達したカオス系で見られる。もう一つは曲がったスペクトルであり、近可積分と発達したカオスの中間的な強さのカオス系で現れる。後者の系では、ウィスカートーラスが重要な働きをしていると考えられる。

リアプノフスペクトルより詳細な情報を含むリアプノフベクトルについては、時間パラメータの選び方によってリアプノフスペクトルおよびリアプノフベクトルが変化することを指摘した。そこで、望ましい時間パラメータの選び方、つまり運動方程式の記述の仕方とは何かを明確にするため、自由度 N の系では第 N , $N+1$ リアプノフベクトルがそれぞれ軌道の進行方向とハミルトニアン勾配方向に常に向いていること、という要請を導入した。ここで、二つのリアプノフ数 λ_N と λ_{N+1} は上記の二つの方向に対応してゼロになることに注意されたい。この要請を満たすことによって、安定／不安定性に関係のない上記二方向を区別し、純粋に安定／不安定な方向を得ることができる。本稿では相空間における幾何学的方法を構築し、この方法が先の要請を満たすことを理論的および数値的に示した。また、幾何学的方法と従来の方法は、リアプノフスペクトルに関しては同じ値を与えることも数値的に観測した。

課題としては、化学反応を表すようなモデル、例えば Double Well 系において鞍点を乗り越えていく運動がどのようなリアプノフベクトルを持っているかを詳細に調べていくことや、多自由度のときは曲率テンソルの計算が煩雑になることから簡約化する方法の考案などが挙げられる。

参考文献

- [Aiz84] Y. Aizawa. "Symbolic dynamics approach to the two-dimensional chaos in area preserving maps: a fractal geometrical model". *Prog. Theor. Phys.*, 71:1419–21, 1984.
- [AKH⁺89] Y. Aizawa, Y. Kikuchi, T. Harayama, K. Yamamoto, M. Ota, and K. Tanaka. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 98:36, 1989.

研究会報告

- [BGS76] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, and Jean-Marie Strelcyn. "Kolmogorov entropy and numerical experiments". *Phys. Rev. A*, 14(6):2338–45, 1976.
- [CPC99] Lapo Casetti, Marco Pettini, and E. G. D. Cohen. "Geometric approach to Hamiltonian dynamics and statistical mechanics". *cond-mat/9912092*, pages 1–36, 1999.
- [HNW93] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner. "*Solving ordinary differential equations I*". Springer-Verlag, Berlin, second revised edition, 1993.
- [KK92] T. Konishi and K. Kaneko. "Clustered motion in symplectic coupled map systems". *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25:6283–96, 1992.
- [LL92] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. "*Regular and Chaotic Dynamics. Second Edition*". Springer, 1992.
- [LPRV87] R. Livi, A. Politi, S. Ruffo, and A. Vulpiani. "Liapunov exponents in high-dimensional symplectic dynamics". *J. Stat. Phys.*, 46:147–60, 1987.
- [Ose68] V. I. Oseledec. "A multiplicative ergodic theorem. Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems". *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19:197–231, 1968.
- [Pet93] M. Pettini. "Geometrical hints for a nonperturbative approach to Hamiltonian dynamics". *Phys. Rev. E*, 47:828–50, 1993.
- [Yam98] Y. Y. Yamaguchi. "New universality of Lyapunov spectra in Hamiltonian systems". *J. Phys. A*, 31:195–207, 1998.
- [YK98] Y. Y. Yamaguchi and T. Konishi. "A geometrical model for stagnant motions in Hamiltonian systems with many degrees of freedom". *Prog. Theor. Phys.*, 99:139–44, 1998.