Bingham 流体の1方向流による動塑性モデルと残留応力

大信田 丈志 (鳥取大・工)*　　関本 謙 (京大・基研)

1 はじめに

Bingham 流体 [1, 2, 3] とは、塑性体のモデルのひとつで、簡単に言えば "静止摩擦をもつ Newton 流体" のことである。通常の流体では、剪断応力のもとで静止状態はありえないのに対し[1]、塑性体は、剪断応力の大きさがある限界値 (**降伏応力**) τ_* を超えるまでは固体的に応答し、剪断応力が τ_* を超えると降伏して流動化する。Bingham 流体の単純剪断流の場合、流動状態における 応力 τ と速度勾配 $\dot{\gamma}\ (=\partial_x w>0)$ の関係は

$$\tau=\tau_*+\eta\dot{\gamma} \tag{1}$$

のようになる。非流動状態をも含む構成方程式は、単純剪断流の場合、

$$\eta\dot{\gamma}=\begin{cases}0 & (|\tau|<\tau_*)\\ \tau-\tau_*\,\mathrm{sgn}(\tau) & (|\tau|>\tau_*)\end{cases} \tag{2}$$

で与えられる (図1)。もしも $\tau_*\to 0$ とすれば Newton 流体になる。

静止摩擦をもつ系には、運動がない状態でも剪断応力が消えずに残るという特徴がある。たとえば、斜面の上に置かれたおもりや、壁の上に塗ったペンキ[2]は、ある限度までなら、静止したまま自分の重さを支えることができる。もしもペンキが Newton 流体だったら、流体層は静止状態を維持することができず、液膜流となって流れ落ちてしまうはずだ。これらは、重力による剪断応力の例である。

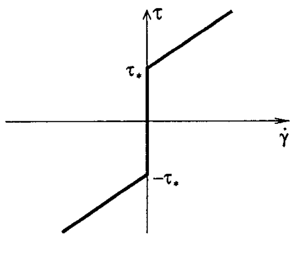

図 1: Bingman 流体での応力 τ とひずみ速度 $\dot{\gamma}$ の関係

弾性をもつ系では、さらに、内部ひずみによる剪断応力が存在する。たとえばチーズやういろうを切断し、ゆがめて再び貼り合わせる (!) ことを考えよう[3]。このようなひずみは、系の内部に剪断応力を生じさせる。弾性体ならば切断する必要があるが、弾塑性体なら、流動によって似たような状態を作ることができる [7]。また、通常の粘弾性体では剪断応力を弱めるような流動が生じて、その結果、時間がたつと内部ひずみはすべて消失するが、粘性部分に静止摩擦的なものがあると、剪断応力がいつまでたっても緩和せず、いわば、変形が "静止摩擦で引っかかる" ことで、内部ひずみによる応力が残留する。弾塑性体が残留応力を生じることは工学的にも重要だし [8]、粉粒体の静止応力状態を考えるうえでも参考になるに違いない[4]。

以下では、剪断変形による残留応力を生じるようななるべく単純な系の例として「割箸モデル」を提示し、その連続体版として、Bingham 弾塑性体の1方向流の支配方程式を定式化する。この系の時間発展は、弾性波モードと応力渦度モードに分解できる。応力渦度は、内部ひずみによる残留応力の指標である。塑性流動が生じない場合、系は完全に弾性的であり、弾性波モードが2次元波動方程式に従うこと、および応力渦度が各点ごとの保存量になることが分かる。他方、塑性流動が存在する場合には、応力渦度はもはや保存量ではない。例として、数値的に求めた非定常な応力場を弾性波モードと残留応力モード (応力渦度) に分解し、塑性流動により応力渦度が生成される様子を示す。最後に、「割箸モデル」を離れて、より一般的な3次元の変形に対して残留応力を定式化する問題について考える。

*電子メール: <ooshida@damp.tottori-u.ac.jp>

[1]これはほとんど流体の定義である: 文献 [4, p.37] を見よ。

[2]もちろん、ペンキは単純な Bingham 流体などではなく、実際の挙動はかなり複雑である。ペンキの流動については、「流れる固体」[5] という一般向けの解説書に、写真つきで解説が載っている。

[3]ここで考えている変形は、Volterra の転位構成 [6, p.535] によって螺旋転位を作るような変形である。ただし、結晶ではなく連続体を考えているので、Burgers ベクトルは連続的な値をとる。

[4]たとえば離散要素モデル (DEM) を考えよう。静止摩擦で運動が止められた結果、接線方向のバネが伸びたままの状態で固まってしまう というのは、いかにもありそうな話だ。

2　モデルの構築

2.1　ミニマルモデル

弾塑性体における残留応力を定式化し、その生成過程を考察したいのだが、そのためには弾塑性モデルを特定しなければならない。

モデルには、写実主義的なモデルと図式主義的なモデルがあり、それぞれ目的が違う。だから、研究者は、どちらのモデルを扱うのか明確にする必要がある。今ここで私たちがやりたいことは、物質の個別性や一般的な3次元変形を考えて現実的な系の挙動を再現することではなく、弾塑性体における残留応力を概念的に明らかにすることである。つまり、ここでの立場は明らかに図式主義だ。このことは、もちろん「オモチャだから現実を再現できなくてもいい」という消極的な意味ではなく、「現実にあり得る構造を、(写実性を犠牲にしてでも) より明確に示す」という積極的な意味をもつ。構成を可能な限り単純化して図式主義に徹したモデルが**ミニマルモデル**であり、非自明な結果を、最低限の設定で明確に示すことが要求される。出てくる結果よりも与える設定のほうが多かったりしたら、図式主義的なモデルとしては失敗である[5]。

以下、私たちは、なるべく簡単な設定を用いて、「微視的な構造や変形履歴を参照しなくても残留応力を定式化できること」を示す。要点は、応力場がテンソルでなくベクトルであらわせるような系を考えれば、応力場を応力波の成分と内部ひずみによる成分に分解する方法を陽に示せる、ということにある。

2.2　割箸モデルとその連続体版

私たちは、図2にあるような「割箸モデル」から出発する。このモデルでは、運動量を担う「割箸」が λ 程度の微小間隔で平行に並んでいて[6]、それらのあいだをゴムひもがつないでいる。割箸は質量をもち、軸方向 (z 方向) に動くことができるが、それ以外の運動はできないように拘束されている。ゴムひもは 張力 T_0

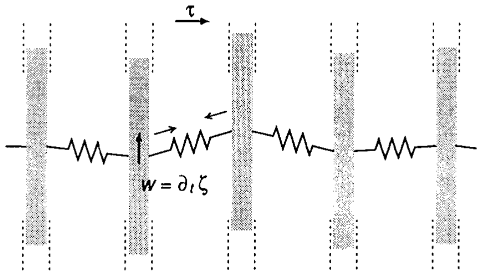

図 2: 割箸モデル

で張られており、両側の変位の差 s_{ij} に応じて[7]、z 方向の復元力 $f = T_0 s_{ij}/\lambda$ を発生させる (線形弾性を象徴)。復元力 f がある限度を超えると、ゴムひもと割箸のあいだに、超過した力に比例した速さですべりが生じる (Bingham 塑性を象徴)。すなわち、割箸のあいだには、Bingham 的ダッシュポットとバネとを直列 (変位加法的) につないだような相互作用が存在する。

次に、「割箸モデル」に対応する連続体モデルの運動学を、Lagrange 変数 $\mathbf{a} = (x, y, z)$ から Euler 変数 $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ への写像として定式化しよう。この写像は、$\zeta = \zeta(x, y, t)$ を用いて次のように書ける:

$$\mathbf{a} = (x, y, z) \ \mapsto \ \mathbf{r} = (X, Y, Z) = (x, y, z + \zeta). \quad (3)$$

速度場は

$$\mathbf{v} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_{\mathbf{a}} = (0, 0, w), \quad w = \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_{\mathbf{a}} = \dot{\zeta}$$

で与えられる。ここで $w = w(x, y, t)$ であるから、流れは非圧縮 ($\operatorname{div}\mathbf{v} = \partial_z w = 0$) であり、したがって速度勾配テンソルは体積保存的 (対角和がゼロ) になる。

さて、z 方向の運動量のバランスを考えると、運動方程式は

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \quad (4)$$

と書ける。ここで "応力ベクトル" $\boldsymbol{\tau}$ は (x, y) 面内での z 方向の運動量の輸送を示し、応力テンソル $\overleftrightarrow{\tau}$ とは $(\boldsymbol{\tau}, 0) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\tau} = (\tau_x, \tau_y, 0)$ のような関係がある。

構成方程式を求めよう。割箸モデルにおいて、z 軸を含むような勝手な面 S をとり、面 S をとおしてはたらく微視的な力 f の合計を求めればよい。隣接する割箸をむすぶベクトルを $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(\cos\theta, \sin\theta)$, 体積あたりのゴムひもの数密度を ν として、次の式を得る:

$$\boldsymbol{\tau} = -\nu \langle f \boldsymbol{\lambda} \rangle \overset{\text{def}}{=} -\nu \oint \frac{d\theta}{2\pi} f \boldsymbol{\lambda}\,; \quad f = f(\boldsymbol{\lambda}(\theta)).$$

[5] このような批判を恐れてか、研究会では「『ミニマルモデル』と言ってはいけない」という風潮が参加者のあいだに広まったが、これでは本末転倒だ。批判を避けるのではなく、批判に耐えられるようなすぐれたミニマルモデルを提示することこそ重要であろう。

[6] ただし、「微小」とは言っても、熱運動が効くほど小さくはないものとする。流体力学でいう「流体要素」と同じで、流動に関しては微小要素であるが、局所熱平衡を想定できる程度には大きい。

[7] 必ずしも $s_{ij} = s_j - s_i$ のように "ポテンシャル" s_i で書けるとは限らないことに注意しよう。

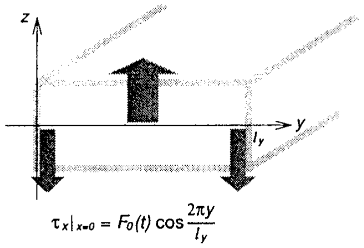

図 3: 境界条件 (2 次元)

つまり、θ に関する $f\boldsymbol{\lambda}$ の統計平均から $\boldsymbol{\tau}$ が求められる。いくつかの仮定をおいて計算すると、“応力ベクトル” $\boldsymbol{\tau}$ は次のような方程式に従うことが分かる:

$$S\partial_t\boldsymbol{\tau} + \eta^{-1}\Phi(\boldsymbol{\tau}) = \operatorname{grad} w \tag{5a}$$

ただし

$$\Phi(\boldsymbol{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & (|\boldsymbol{\tau}| < \tau_*) \\ \boldsymbol{\tau} - \tau_* \mathbf{e} & (|\boldsymbol{\tau}| > \tau_*) \end{cases} \tag{5b}$$

ここで $|\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$ であり、また $\mathbf{e} = \boldsymbol{\tau}/|\boldsymbol{\tau}|$ は $\boldsymbol{\tau}$ に平行な単位ベクトルを示す。運動方程式 (4) と構成方程式 (5) が、この系の支配方程式である。

3 応力渦度

3.1 純粋に弾性的な場合の解

まず、常に $|\boldsymbol{\tau}| < \tau_*$ であって 塑性流動が全く生じないような、純粋に弾性的な場合を考えよう。このとき、支配方程式 (4)(5) から塑性応力の項が消えて

$$\partial_t w = \partial_x \tau_x + \partial_y \tau_y, \qquad \partial_t \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} w \tag{6}$$

となる (適当に無次元化してある)。

境界条件として、境界での剪断応力 $\tau_x|_{x=0}$ を与える:

$$\tau_x|_{x=0} = \tau_{\mathrm{BC}}(y,t) \stackrel{\text{def}}{=} F_0(t)\,\cos ky. \tag{7}$$

概念図を図 3 に示す ($k = 2\pi/\ell_y$ としている)。初期条件は $w = 0$ かつ $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ とする。

ここで、境界条件 (7) と整合するように

$$w = W\cos ky, \qquad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} F\cos ky \\ G\sin ky \end{bmatrix}$$

とおいて方程式 (6) に代入し、y を分離する。こうして得られる方程式系

$$\partial_t F = \partial_x W, \quad \partial_t G = -kW, \quad \partial_t W = \partial_x F + kG$$

は、全部で 3 つの時間発展モードをもつが、その 1 つは 各点ごとの保存則[8]

$$\partial_t R = 0; \qquad R \stackrel{\text{def}}{=} kF + \partial_x G \tag{8}$$

で、あとの 2 つは Klein-Gordon 方程式

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + k^2)F = kR \tag{9}$$

になる (今の場合、初期条件により $R = 0$)。境界条件 (7) で $F_0(t)$ を階段関数に選んだ場合、F は $x > t$ ではゼロであり、$x < t$ では 次の式で与えられる:

$$F = J_0(ks) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{t-x}{t+x}\right)^m J_{2m}(ks)$$

$$\sim \begin{cases} e^{-kx} & (x \lesssim k^{-1},\ \ t \gg k^{-1}) \\ J_0\left(k\sqrt{t^2 - x^2}\right) & (t > x \gg k^{-1}) \end{cases}$$

ここで $s = \sqrt{t^2 - x^2}$ である。なお、F は $x = t$ で不連続になることに注意する。

方程式系 (6) では、一般に、$\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}$ が各点ごとの保存量になる。上記の R は、その特殊な場合である。もう少し詳しく言えば、応力ベクトル $\boldsymbol{\tau}$ を

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{D}} + \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}}; \quad \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} \partial_x\phi \\ \partial_y\phi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} -\partial_y\phi \\ \partial_x\phi \end{bmatrix}$$

のように 2 次元 Helmholtz 分解すると、$\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{D}}$ は弾性波のモードであり[9]、2 次元の波動方程式に従う。ところが、2 次元の波動方程式は、一般に

$$\partial_t \begin{bmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_x & \partial_y \\ \partial_y & -\partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{10}$$

と書き直せるので、その時間発展モードは 2 つしか自由度をもたない。残る 1 つの自由度を、$\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau} = \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}}$ の保存則がひきうけることになる。

方程式系 (6) で $\boldsymbol{\tau}$ を $\mathbf{v}$ に、w を $p = p(\rho)$ に、∂_t を $\partial_t + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}$ に読み替えると、これは流体中の音波 (縦波) の方程式になり、$\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}$ は 渦度に相当する。以下、私たちは $\mathbf{h} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}$ を**応力渦度**と呼ぶことにしよう。あとで見るように、応力渦度は、内部ひずみによる**残留応力**の存在を示している。

[8]ふつう、保存則と言えば $\partial_t Q + \operatorname{div}\mathbf{J} = 0$ のことだが、ここではもっと強く、輸送項なしで $\partial_t R = 0$ が成り立つことを要求している。各点ごとの保存則の例には、ほかに、完全流体における渦度保存則や 1 次元波動方程式における Riemann 不変量がある。

[9]非圧縮性を仮定しているので、横波しか存在しない。

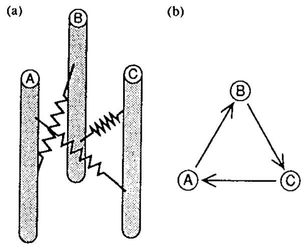

図 4: 内部ひずみを生じる“三すくみ”状態

3.2 応力渦度による内部ひずみの定式化

塑性のある場合を考え、応力-ひずみ関係式 (5) を連続体の立場から見直してみる。割箸の変位の場を $\zeta = \zeta(x, y, t)$ とし、これが、少なくとも局所的には、弾性の寄与 $\zeta_{\rm E}$ と Bingham 塑性の寄与 $\zeta_{\rm B}$ の和で書けるとしよう (もちろん、一般にそう書けるとは限らない)。この場合、流体の速度 w は

$$w = \dot{\zeta} = \dot{\zeta}_{\rm E} + \dot{\zeta}_{\rm B} \tag{11a}$$

となり、弾性部分の構成方程式 (Hooke の法則) および塑性部分の構成方程式は、それぞれ

$$\boldsymbol{\tau}_{\rm E} = S^{-1}\,{\rm grad}\,\zeta_{\rm E} \tag{11b}$$

$$\eta\,{\rm grad}\,\dot{\zeta}_{\rm B} = \Phi(\boldsymbol{\tau}_{\rm B}) \tag{11c}$$

のように勾配を用いて書ける。モデルの仮定により、応力は共通で $\boldsymbol{\tau}_{\rm E} = \boldsymbol{\tau}_{\rm B} = \boldsymbol{\tau}$ が成立し、このことと式 (11) から 確かに構成方程式 (5a) が出てくる。

さて、特に $\zeta_{\rm B} = 0$ ならば、式 (11b) で $\zeta = \zeta_{\rm E}$ としたものがそのまま系の構成方程式になる (内部ひずみがゼロならば、ゴムの弾性力 $\boldsymbol{\tau}$ は 割箸の変位 ζ の勾配で書けるはずだ)。このような場合には

$$H \stackrel{\rm def}{=} \oint \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{12}$$

が成立し、したがって応力渦度 $\mathbf{h} \stackrel{\rm def}{=} {\rm rot}\,\boldsymbol{\tau}$ はゼロになる。逆に、応力渦度がゼロでないところには、割箸モデルに即して言えば 図 4 のような“三すくみ状態”が存在し、このとき $\zeta_{\rm E}$ を 1 価関数として定義することができない。Hooke の法則 (11b) によって“応力循環” H を $\tilde{\mathbf{u}} \stackrel{\rm def}{=} {\rm grad}\,\zeta_{\rm E}$ の積分に読み替えると

$$B \stackrel{\rm def}{=} SH = \oint \tilde{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{r}$$

となり、B は 結晶の転位論における Burgers ベクトル [6, 9] に相当する。ただし、Burgers ベクトルの定義は微視的な構造に大きく依存しているが、H や $\mathbf{h}$ は 巨視的な応力によって直接定義される量であるから、結晶以外の物質でも意味をもつことを指摘しておく[10]。

4 数値計算例

自然状態からスタートして有限の残留応力が生じる具体例を示す計算をおこなう。境界条件は、時間に関して階段関数的な荷重を想定し、式 (7) において

$$F_0(t) = \begin{cases} \tau^*_{\rm BC} & (0 < t < T) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}, \quad T = 10;$$

$$k = \frac{2\pi}{\ell_y}, \quad \ell_y = y_{\rm max} - y_{\rm min} = 10$$

としたものを用いる。ただし、時間は粘弾性の緩和時間 $T_* \stackrel{\rm def}{=} S\eta$ で無次元化し、また 音速 $1/\sqrt{\rho S}$ および降伏応力 τ_* が 1 になるように長さの単位を選んである[11]。計算領域の境界 ($x = x_{\rm max}$) では、応力波の反射を避けるため、非流動状態での弾性波に対する透過条件を課す。計算スキームには 2 ステップ Lax-Wendroff 法を採用した。

まず、純粋に弾性的な場合の数値解を求め、次のことを確認した:

- 応力渦度は、わずかな数値誤差を別にすれば、時間が経過してもゼロに保たれる。
- 応力波の先頭波面近傍では、解析解が不連続になることに対応し、数値解ではかなりの数値振動が生じる。しかし、波面以外では、解析解と数値解の一致は良好である。

次に、塑性流動が生じ得るような場合の計算をいくつかおこない、局所的に ${\rm rot}\,\boldsymbol{\tau}$ が生成されることを確認した。たとえば、$\tau^*_{\rm BC}/\tau_* = 0.8$ の場合の場合、境界近傍のごく一部で応力集中によって流動化が生じ、${\rm rot}\,\boldsymbol{\tau} \neq 0$ となる領域ができる。この部分では「ういろうを切って貼り合わせる」ような剪断変形が生じているものと考えられる。

境界での応力が $\tau^*_{\rm BC}/\tau_* = 1.5$ の場合の結果を検討しよう。時刻 $t = 5$ における速度場の様子 (図 5 の右側)

[10] Burgers ベクトルと $\mathbf{h}$ の関係は、たとえば超流動における波動関数のトポロジカルな欠陥としての量子渦と、通常の流体における渦度との関係に似ている。後者はより一般的な概念であって、結晶格子とか Bose 凝縮とかいった微視的な秩序を前提としない。

[11] 今の場合、(x, y) 方向の長さの尺度 L_x と z 方向の長さの尺度 L_z を独立にとることができる (方向性次元解析)。

を見ると、$x=0$ の近くに 渦跳躍[12]ができていて、これに囲まれるような形で、$y=5$ の部分が上向きの速度を、$y=0$ の部分が下向きの速度をもって運動している。図6の左側に示してある $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\tau}$ の分布を見ると、ちょうど速度場の渦跳躍に相当するところで応力渦度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\tau}$ が大きな値をとっていて、その外側に、$y=2.5$ および $y=7.5$ を中心とする扇型のひずみ領域が存在している。なお、渦跳躍の内側では、速度勾配が存在するにもかかわらず、応力渦度はほとんどゼロである。

境界の応力を $t=10$ で除荷したときに発生する応力波は、さきほどの渦跳躍領域の運動と干渉して複雑な応力場を生じ、いくつかの場所で新たに降伏流動が生じて、その結果、複雑なひずみパターンが作られる。また、応力波 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}$ のモード) も、降伏流動の影響を受けて y 方向に複雑な構造をもつようになる。

5 議論

5.1 応力渦度の発生

数値計算結果によれば、塑性変形で応力渦度が発生しているのは確かなのだが、いったい、どのようにして ζ_{E} の1価性が破れるのだろうか?

まず、式(11a)において、w や ζ は 物理的な意味をもつ1価の場である。しかし、ζ_{E} や ζ_{B} は それ自身が物理的な意味をもつわけではなく、運動方程式に現れるのは これらの量の勾配だけである。次に、$\zeta_{\mathrm{E}}=\zeta-\zeta_{\mathrm{B}}$ であるから、ζ_{E} の1価性が破れるときには 同時に ζ_{B} の1価性も破れる。さて ζ_{B} の時間発展は式(11c)によって定められるから、もしも式(11c)の右辺の rot がゼロでないところがあれば、そこで $\dot{\zeta}_{\mathrm{B}}$ は1価でなくなり、したがって、次の瞬間から ζ_{B} の1価性が破れることになる。

このような事態が生じる可能性があるのは、ひとつは系の境界であり、もうひとつは降伏面 (塑性流動領域と非流動領域の境界) である。割箸モデルで、隣接する3本の割箸を結ぶゴムのうち、あるゴムだけがすべって別のゴムがすべらないような状況があれば応力渦度が生じるだろう。連続体モデルでも、系の境界あるいは降伏面の近傍での解析解を具体的に求めれば応力渦度の発生機構が分かるはずなので、現在、巾級数展開を用いて解を構成する試みをおこなっているが、残念ながら、具体的な結果にまでは至っていない。

5.2 割箸を捨てて3次元へ

第3章で見たように、応力渦度は、与えられた $\boldsymbol{\tau}$ が勾配を用いて $\boldsymbol{\tau}=\mathrm{grad}\,\zeta$ のように書けるための条件式(12)として出てくる。同じような考察を3次元でおこなってみよう。まず、等積変形および Hooke の法則を仮定すると、応力テンソル $\overleftrightarrow{\tau}$ は 歪みテンソル $\overleftrightarrow{e}$ の定数倍になる。変形が内部ひずみを含まない純粋な弾性変形ならば、ひずみテンソルは

$$\overleftrightarrow{e}=\mathrm{sym}\,\mathrm{grad}\,\tilde{\mathrm{u}}\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}\,\tilde{\mathrm{u}}+{}^{\mathrm{t}}(\mathrm{grad}\,\tilde{\mathrm{u}})\right]\tag{13}$$

のように 変位 $\tilde{\mathrm{u}}$ の勾配で書ける。逆に、与えられた $\overleftrightarrow{e}$ が 式(13)のような "ポテンシャル" $\tilde{\mathrm{u}}$ をもつ条件を考えれば、応力渦度に相当する量が得られるだろう。

上記の問題に対する Eshelby[10] の考察を紹介しよう。与えられたひずみテンソル $\overleftrightarrow{e}$ が 式(13)のように書けるとする。このとき、変形勾配テンソルを対称部分 e_{ij} と反対称部分 ω_{ij} に分解し、反対称部分を $\tilde{\omega}$ で擬ベクトル表示すると

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\partial_j u_i+\partial_i u_j\right)$$
$$\omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\partial_j u_i-\partial_i u_j\right)=-\epsilon_{ijk}\tilde{\omega}_k.$$

これから、面倒だが単純な計算によって次の式を得る:

$$\partial_i\tilde{\omega}_j=-\epsilon_{jkl}\partial_l e_{ik}.\tag{14}$$

式(14)から $\tilde{\omega}$ が1価に定まるためには、式(14)の右辺のテンソルの j に関する rot がゼロにならなければならない。Eshelby に従い、不整合テンソル $\overleftrightarrow{S}$ を

$$S_{ij}\overset{\mathrm{def}}{=}\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\partial_k\partial_l e_{mn}=\left(\mathrm{rot}_i\otimes\mathrm{rot}_j\right)e_{ij}\tag{15}$$

で定義すると、$\overleftrightarrow{S}=0$ が 変位 $\tilde{\mathrm{u}}$ の1価性のための必要条件である。

試しに「割箸モデル」に対応する $\overleftrightarrow{\tau}$ を用いて不整合テンソルを計算してみると、$\overleftrightarrow{S}=0$ は

$$\partial_x\left(\partial_x\tau_y-\partial_y\tau_x\right)=\partial_y\left(\partial_x\tau_y-\partial_y\tau_x\right)=0$$

と同値であることが分かる。これは2階微分に関する条件であり、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\tau}=0$ と必ずしも同値ではない。このあたりの食い違いについての検討が必要である。

[12]渦跳躍 (vortex jump) とは、速度 w の勾配が急に変化する面のことをいう。ただし、ここでは (x,y) 平面内で見ているので、渦跳躍は線であらわされる。また、速度そのものは連続である。

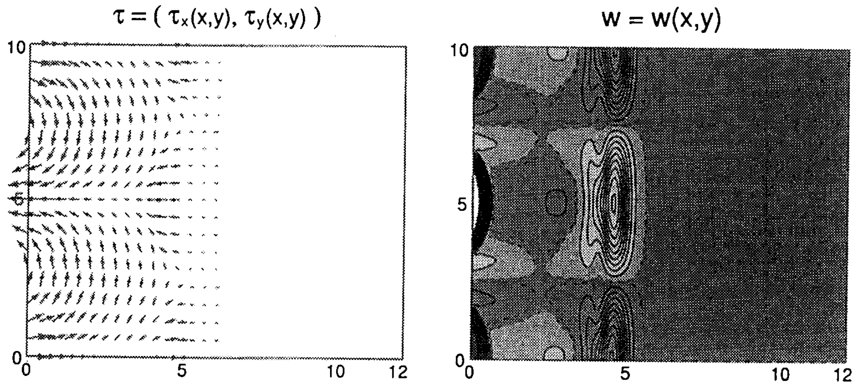

図 5: 境界での応力が比較的大きい場合の計算結果: 応力場と速度場 ($\tau^*_{\mathrm{BC}} = 1.5$, $t = 5$)

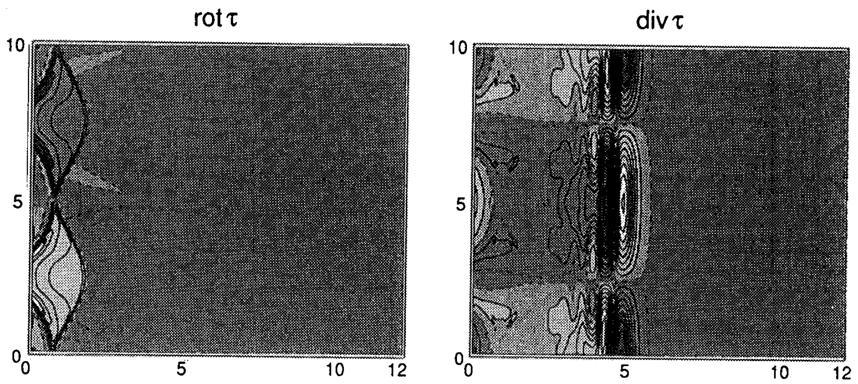

図 6: 図 5 の応力場の Helmholtz 分解

参考文献

[1] 中川鶴太郎. レオロジー 第 2 版. 岩波全書 249. 岩波書店, 1978.

[2] 中村喜代次. 非ニュートン流体力学. コロナ社, 東京, 1997.

[3] Ken Sekimoto. An exact non-stationary solution of simple shear flow in a Bingham fluid. J. Non-Newtonian Fluid Mech., Vol. 39, pp. 107–113, 1991.

[4] 巽友正. 流体力学. 新物理学シリーズ, No. 21. 培風館, 1982.

[5] 中川鶴太郎. 流れる固体. 岩波科学の本. 岩波書店, 1975.

[6] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky. 現代の凝縮系物理学. 吉岡書店, 2000. 松原 武生, 東辻 千枝子, 東辻 浩夫, 家富 洋, 鶴田 健二 訳.

[7] 宮本嘉久, 深尾浩次, 関本謙. ゴムのガラス転移と塑性変形. 講演概要集 (第 55 回年次大会), 新潟, 2000. 日本物理学会. 講演番号 22pWD-16 (領域 11).

[8] 吉田総仁. 弾塑性体力学の基礎. 共立出版, 東京, 1997.

[9] L. Landau and Ye. Lifshits. 弾性理論. 東京図書, 増補新版, 1989. 佐藤 常三, 石橋 善弘 訳.

[10] J. S. Eshelby. The continuum theory of lattice defects. In David Turnbull Frederick Seitz, editor, Solid State Physics, Vol. 3, p. 79. Academic Press Inc., New York, 1956.