

# 多核成長模型とランダム行列

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 和達研究室 今村 卓史<sup>1</sup>

## 1 イントロダクション

最近ランダム行列理論と  $1+1$  次元 KPZ ユニバーサリティーに属する確率モデルとの関連が指摘され、多くの研究がなされている。(例えば ASEP との関連については [1] を御参照下さい。) これらの研究の契機となったものは、Baik-Deift-Johansson の定理である [2]。これは乱数置換の最大増大部分列 (longest increasing subsequence) の極限分布が、GUE (Gaussian Unitary Ensemble) と呼ばれるランダム行列の最大固有値分布 (Tracy-Widom 分布 [3]) に等しいというものである。この問題は Ulam の問題として長く知られていた問題であり、表現論 や確率過程などの関連も指摘されていた [4]。

一方、多核成長模型 (PNG) は 1970 年代に界面成長のモデルとしてあらわれた [5]。空間 1 次元の場合のルールは、  
 1. 空間のある場所にある高さの核が確率的に生成される。  
 2. いったん核生成が起こると、核は左右に等速度で成長し台地 (テラス) を形成する。  
 3. 二つのテラスがぶつかると合体して 1 つのテラスになる、というものである。

実はこの PNG とさきほどの乱数置換の longest increasing subsequence がある意味等価であることが最近指摘され、PNG の高さのゆらぎは GUE の Tracy-Widom 分布で記述されることが示された [6]。この講演では PNG のこうした背景をステップにして、PNG にひそむ数理構造を明らかにし、それをを用いて物理量、特に高さゆらぎの多点相関関数を探っていきたい。

## 2 多核成長模型 (PNG)

### 2.1 ルール

PNG モデルは以下の 3 つのルールから成り立っている確率モデルである。以下では時間と空間が離散的な PNG モデルを考える [7, 8]。

#### 1. 核生成

時刻  $t$  位置  $x$  において、高さ  $k$  の核が確率的に生成される。(図 1)

<sup>1</sup>E-mail: imamura@monet.phys.s.u-tokyo.ac.jp

研究会報告

2. テラスの成長

いったん核生成がおこると1時刻あたり1ステップずつ左右へ成長する。(図1)

3. テラスの合体

2つのテラスがぶつかる時、その点での高さは高い方のテラスの高さになる。(図2)

これらの3つのルールは次の式で定式化できる。

$$h(x, t) = \max(h(x - 1, t - 1), h(x, t - 1), h(x + 1, t - 1)) + \omega(x, t) \quad (2.1)$$

ここで $h(x, t)$ は結晶の高さを表し、 $\omega(x, t)$ は核生成の高さを表す確率変数であり、 $\omega(x, t)$ の確率分布として幾何分布を考える。

次にモデルの初期条件、境界条件について説明する。初期条件としては時刻0で原点に結晶の種があるような状況を考える。結晶はそれにくっつくことによって成長していく(droplet 成長)。境界条件としては (i) 無限系か半無限系か (ii) 結晶の両端に外場がある場合を考える。

これらの条件は次のように定式化できる。 $i = \frac{x+t+1}{2}, j = \frac{t-x+1}{2}$  と変数変換して(図3)、 $w(i, j) = \omega(i - j, i + j - 1)$  とおき

- 無限系

$$\mathbb{P}[w(i, j) = k] = \begin{cases} (1 - q')q^k & i = j = 1 \\ (1 - q)q^k, & 2 \leq i, j \\ (1 - \gamma + \sqrt{q})(\gamma + \sqrt{q})^k & j = 1, 2 \leq i \\ (1 - \gamma - \sqrt{q})(\gamma - \sqrt{q})^k & i = 1, 2 \leq j \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (2.2)$$

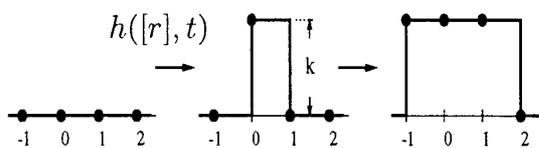


図1: 核生成、テラスの成長の例: 原点で高さ $k$ の核が確率的に生成し、左右に成長する。実線は $h([r], t)$ で書いた。 $[r]$ は $r$ を超えない整数

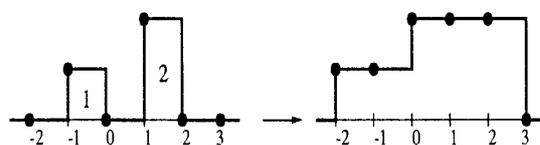


図2: テラスの合体の例: 高さ1と2のテラスが原点でぶつかったとき高さは2になる。

- 半無限系

$$w(i, j) = w(j, i) \quad (2.3)$$

$$\mathbb{P}\{w(i, j) = k\} = \begin{cases} (1 - q')q'^k & i = j = 1 \\ (1 - q)q^k, & 2 \leq j < i \\ (1 - \gamma_+ \sqrt{q})(\gamma_+ \sqrt{q})^k & j = 1, 2 \leq i \\ (1 - \gamma_- \sqrt{q})(\gamma_- \sqrt{q})^k & 2 \leq i = j \\ 0 & i \leq 0 \text{ または } j \leq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

とする。ここで  $0 < q, q' < 1$  は幾何分布のパラメタであり、 $0 \leq \gamma < \frac{1}{\sqrt{q}}$  は系の両端にかかる外場のパラメタである。また droplet 成長は  $i, j$  が正の時のみ核生成が起こることで考慮され、半無限系を考慮して (2.3) のような対称性が課されている。

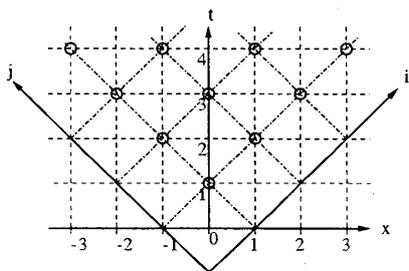


図 3:  $(x, t)$  軸と  $(i, j)$  軸。丸印は  $(i, j)$  が正の点であり核生成が許される点である。

### 3 高さゆらぎとランダム行列理論

さて、以上のモデルで我々が着目する量は  $h(x, t)$  のゆらぎの極限分布である。つまりスケールされた高さ  $H_t(x)$  を  $a, d$  を定数として

$$H_t(x) = \frac{h(x, t) - at}{dt^{\frac{1}{3}}} \quad (3.5)$$

のように定義した時、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(H_t(x) \leq s) \quad (3.6)$$

が興味ある物理量である。前述の [6] の研究を皮切りに、(2.2)–(2.4) のルールのもとで (3.6) の厳密解が知られている。結果は図 4、5 に示す [9, 10]。無限系、半無限系および (2.2)、(2.4) の外場パラメタ  $\gamma_{\pm}$  によって分布関数の形が異なっていることがわかる。ここで  $F_1, F_2, F_4$  はランダム行列の 3 つの代表的なクラスである Gaussian Orthogonal, Unitary, Symplectic Ensemble (GOE, GUE, GSE) の Tracy-Widom 分布を表し  $F_{GOE^2}$  は 2 つ GOE を独立に重ね合わせたアンサンブルの Tracy-Widom 分布を表す。  $F_0, F_0^{\text{semi}}$  は平均が 0 の確

研究会報告

率分布でありランダム行列との対応は知られていない。また  $G$  は誤差関数であり、 $G \times G$  は誤差関数の 2 乗であり、 $G^{2 \times 2}$  は 2 つの  $2 \times 2$  GUE の重ね合わせの最大固有値分布を表す。

$F_2, F_1, F_4, F_{\text{GOE}^2}, F_0, F_0^{\text{semi}}$  は II 型 Painlevé 方程式の Hastings-McLeod 解  $q(x)(q'' = xq + 2q^3, q(x) \sim Ai(x), x \rightarrow \infty)$  を用いて以下のように表示される。

$$\begin{aligned}
 F_2(s) &= \exp\left[-\int_s^\infty dx(x-s)q(x)^2\right] \\
 F_1(s) &= F_2(s)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}f(s)\right] \\
 F_4(s) &= F_2(s)^{\frac{1}{2}} \cosh\left[\frac{1}{2}f(s)\right] \\
 F_{\text{GOE}^2}(s) &= F_2(s) \exp[-f(s)] \\
 F_0(s) &= F_2(s) \{1 - (s - 2q' + 2q^2)p(s)\} \exp[-4f(s)] \\
 F_0^{\text{semi}} &= F_2(s) \left\{1 - \frac{1}{2}(p(s) + q(s))\right\} (s - 2q' + 2q^2) \exp[-3f(s)] \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

ここで  $f(s) = \int_s^\infty dxq(x), p(s) = \int_\infty^s dxq(x)^2$  である。

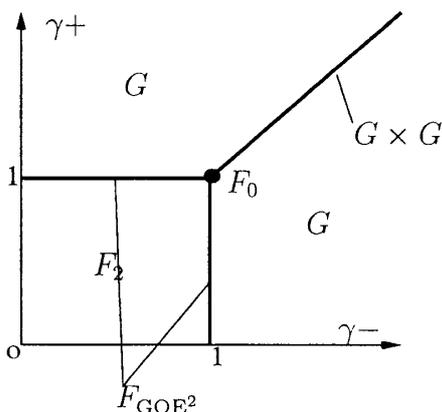


図 4: 無限系

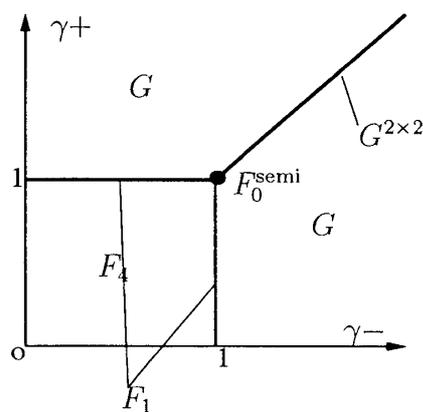


図 5: 半無限系

## 4 多層 PNG

次に我々は原点以外の点での高さゆらぎ、さらに原点と他の点との相関関数に着目する。すなわち、スケールされた高さ  $H_N(\tau)$  を  $a, c, d$  を定数として、

$$H_N(\tau) = \frac{h(x = 2cN^{\frac{2}{3}}\tau, t = 2N) - aN}{dN^{\frac{1}{3}}} + \tau^2 \quad (4.8)$$

で定義した時、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(H_N(\tau_1) \leq s_1, \dots, H_N(\tau_m) \leq s_m) \quad (4.9)$$

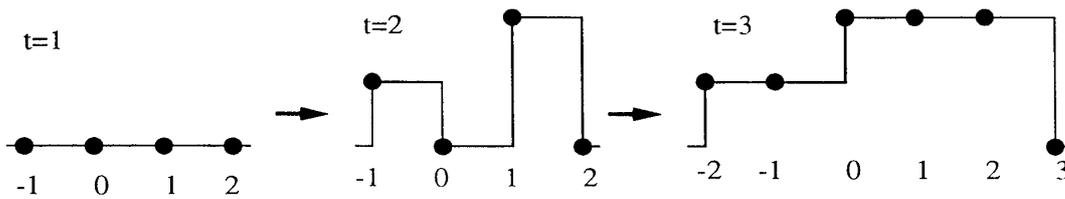


図 6:

について考察する。その際以下のように PNG を“多層化”することを考える。

例として図 6 のような  $t = 3$  までの PNG の時間発展を考える。この時間発展における核生成は  $t = 2, x = -1$  で高さ 1、 $t = 2, x = 1$  で高さ 2 である。(2.2) の  $w(i, j)$  をつかうと、 $w(1, 2) = 1, w(2, 1) = 2$  である。したがって (2.2) より我々はこのような時間発展に対して  $\gamma_+ \sqrt{q} \times (\gamma_- \sqrt{q})^2 = \gamma_+ \gamma_- \sqrt{q}^3$  というウェイトを与えればよい。PNG を多層化すると、このようなウェイトをシステムティックに与えることができる。図 6 で  $t = 3$  で高さ 1 のテラスと高さ 2 のテラスがぶつかる。2 章ルール 3 で述べたように、二つのテラスがぶつかる原点での高さは 2 となる。つまり原点では高さ 1 のテラスが高さ 2 のテラスに飲み込まれた。そこで、2 層目の原点で飲み込まれた高さ 1 をもった核が生成される (図 7)。これが多層化のルールである。その後、核は 2 章ルール 2、3 によって時間発展していき、3 層目以降の核生成も同様のルールでおこる。

以上のような多層化のルールによってできた図 7 に対して配置の縦線に注目し、各縦線に対して  $\sqrt{q}^k$  を割り当てる。ただし 1 層目において縦線の位置が右端 (左端) にあれば、 $\gamma_+^k (\gamma_-^k)$  を割り当てる。ここで  $k$  は縦線の長さである。そしてすべての縦線に対するウェイトをかけあわせるとちょうど、前に核生成のイベントから計算したウェイトと等しくなっている (図 7)。このように PNG の時間発展 (図 6) と多層化された PNG (図 7) とが 1 対 1 に対応していることがわかった。

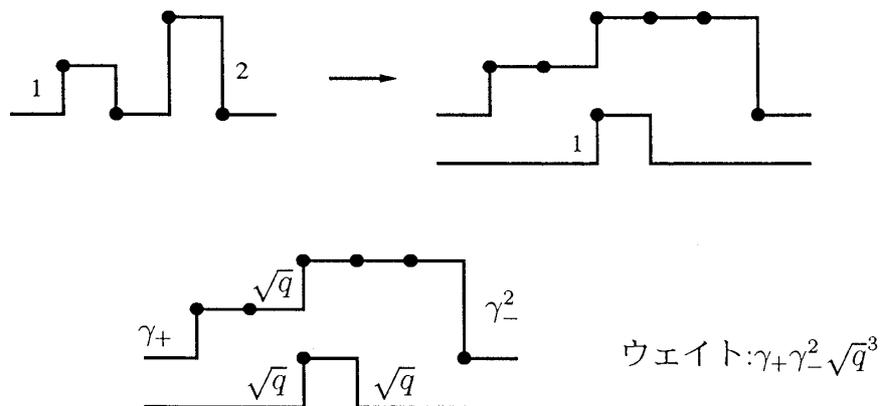


図 7: 多層 PNG 2 つのテラスがぶつかった時、その場所で 2 層目の核生成がおこる。その高さは吸収されたテラスの高さである。(この場合 1)

研究会報告

さらに我々は多層 PNG の各層をウォーカーと考えることで、それを非交差ランダムウォーク (vicious walk) とみなすことができる (図 8)。ウォーカーの遷移確率は  $\phi_{i,i+1}(x, y)$  は、

$$\phi_{2j-1,2j}(x, y) = \begin{cases} ((1 - \gamma + \sqrt{q})(\gamma + \sqrt{q})^{y-x}) & \text{if } y \geq x, j = -N + 1 \\ (1 - \sqrt{q})\sqrt{q}^{y-x} & \text{if } y \geq x, j \neq -N + 1 \\ 0 & \text{if } y < x, \end{cases}$$

$$\phi_{2j,2j+1}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y > x, \\ (1 - \gamma + \sqrt{q})(\gamma + \sqrt{q})^{x-y} & \text{if } y \leq x, j = N - 1 \\ (1 - \sqrt{q})\sqrt{q}^{x-y} & \text{if } y \leq x, j \neq N - 1 \end{cases}$$

で与えられ、右、左を交互にくりかえすように動く (図 8)。

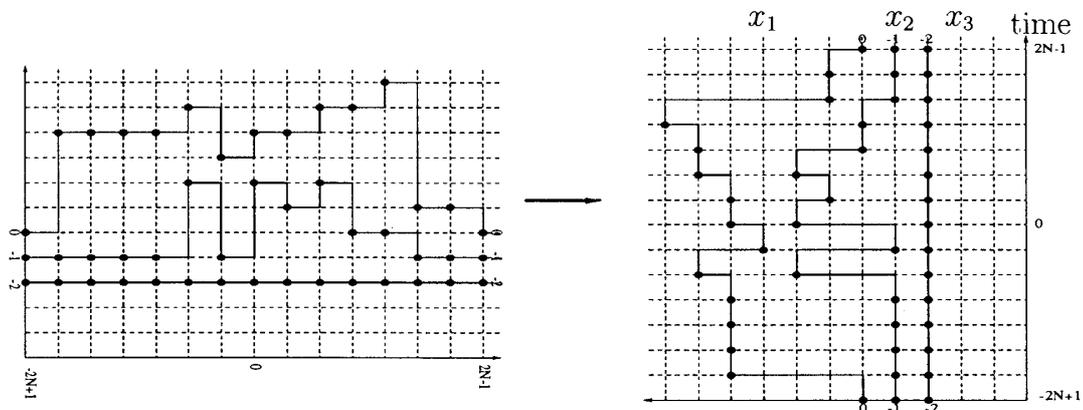


図 8: 多層 PNG は 90 度回転すると vicious walk とみなせる。

これまで無限系における PNG の多層化のルールを説明してきた。これに対し半無限系では、講演者らの研究によって (2.4) の  $\gamma_-$  の値が 0 と 1 の時に PNG と vicious walk との対応が明らかにされた [11]。その際対応する vicious walk は図 8 のようなウォーカーが自身の初期配置に戻ってくるものではなく、半無限系に対応して図 8 右図の下半分のような配置 [12] になる。

その他の  $\gamma_-$  については対応は明らかになっていない。

### 5 同時刻相関関数と Dyson ブラウン運動モデル

PNG の多点相関関数は、vicious walk の言葉でいうと多時刻の相関関数となる。つまり、 $x_1$  (図 8) を一番外側のウォーカーとして

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(h(r_1, t) \leq s_1, \dots, h(r_k) \leq s_k) &= \mathbb{P}(x_1^{r_1} \leq s_1, \dots, x_1^{r_k} \leq s_k) \\ &= \sum_{\bar{x}} \prod_{r=-M+1}^{M-1} \prod_{j=1}^n (1 + g(r, x_j^r)) p_{n,M}(\bar{x}) \end{aligned} \tag{5.10}$$

ここで

$$g(r, x_j^r) = \begin{cases} -\chi_{(s_i, \infty)}(x_j^r) & r = r_i (i = 1 \cdots k) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である。また  $\bar{x}$  は各ウォーカーの各時刻における配置を表す。 $p_{n,M}(\bar{x})$  は配置の実現確率であり、非交差という性質から

$$p_{n,M}(\bar{x}) = \frac{1}{Z} \prod_{r=-2N+1}^{2N-2} \det(\phi_{r,r+1}(x_i^r, x_j^{r+1}))_{i,j=1}^n \quad (x_i^{-2N+1} = x_i^{2N-1} = -i) \quad (5.11)$$

のように、一体のランダムウォークの遷移確率  $\phi$  に関する行列式の積としてかける。

我々は (5.10), (5.11) から PNG の多時刻相関関数のスケール極限 (4.9) を Fredholm 行列式表示することができる。以下にその結果を示す。

### • 無限系

無限系では以下の2つの領域でスケール極限が計算できる。

#### 1. $\gamma_+, \gamma_- < 1$ [7, 13]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(H_N(\tau_1) \leq s_1 \cdots H_N(\tau_m) \leq s_m) = \det(1 + gK_{\text{Airy}}^{\text{ext}})$$

ここで

$$K_{\text{Airy}}^{\text{ext}} = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\lambda(\tau_1 - \tau_2)} \text{Ai}(\xi_1 + \lambda) \text{Ai}(\xi_2 + \lambda) d\lambda, & (\tau_1 \geq \tau_2) \\ \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda(\tau_1 - \tau_2)} \text{Ai}(\xi_1 + \lambda) \text{Ai}(\xi_2 + \lambda) d\lambda, & (\tau_1 < \tau_2) \end{cases} \quad (5.12)$$

$$g(\tau_j, \xi) = -\chi_{(s_j, \infty)}(\xi)$$

ここで得られたカーネル (5.12) は GUE 間の遷移を記述する Dyson のブラウン運動モデルのエッジスケリングのカーネルと一致する [15]。

#### 2. $\gamma_+ = 1 - w/dN^{\frac{1}{3}}, \gamma_- < 1$ ( $\gamma_- = 1 - w/dN^{\frac{1}{3}}, \gamma_+ < 1$ ), $d$ : 定数 [14]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(H_N(\tau_1) \leq s_1 \cdots H_N(\tau_m) \leq s_m) = \det(1 + g(K_{\text{Airy}}^{\text{ext}} + A(\xi_1) \otimes B(\xi_2, w + \tau_2)))$$

ここで

$$A(x) = \text{Ai}(x)$$

$$B(x, \omega) = \begin{cases} \int_0^\infty d\lambda e^{-w\lambda} \text{Ai}(x - \lambda) & w > 0 \\ -\int_0^\infty d\lambda e^{w\lambda} \text{Ai}(x + \lambda) + e^{\frac{w^3}{3} - xw} & w < 0 \end{cases}$$

### • 半無限系

半無限系では以下の2つの点でスケール極限が計算できる。

## 研究会報告

1.  $\underline{\gamma_- = 1, \gamma_+ < 1}$  [11]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}[H_N(\tau_1) \leq s_1, \dots, H_N(\tau_m) \leq s_m] = \sqrt{\det(1 + \mathcal{K}_1 \mathcal{G})},$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\tau_j, \xi) &= -\chi_{(s_j, \infty)}(\xi) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ \mathcal{K}_1(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) &= \begin{bmatrix} \mathcal{S}_1(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) & \mathcal{D}_1(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) \\ \mathcal{I}_1(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) & \mathcal{S}_1(\tau_2, \xi_2; \tau_1, \xi_1) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= K_{\text{Airy}}^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \text{Ai}(\xi_1) \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda \tau_2} \text{Ai}(\xi_2 - \lambda), \\ \mathcal{I}_1 &= - \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda \tau_1} \text{Ai}(\xi_1 - \lambda) \int_\lambda^\infty d\nu e^{-\nu \tau_2} \text{Ai}(\xi_2 - \nu) \\ &\quad + \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda \tau_2} \text{Ai}(\xi_2 - \lambda) \int_\lambda^\infty d\nu e^{-\nu \tau_1} \text{Ai}(\xi_1 - \nu), \\ \mathcal{D}_1 &= -\frac{1}{4} \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda \tau_2} \text{Ai}(\xi_2 + \lambda) \frac{d}{d\lambda} \{e^{-\lambda \tau_1} \text{Ai}(\xi_1 + \lambda)\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda \tau_1} \text{Ai}(\xi_1 + \lambda) \frac{d}{d\lambda} \{e^{-\lambda \tau_2} \text{Ai}(\xi_2 + \lambda)\}. \end{aligned}$$

ここで得られたカーネル (5.13) は GOE-GUE 間の遷移を記述する Dyson のブラウン運動モデルのエッジスケールリングのカーネルと一致する [15].

2.  $\underline{\gamma_- = 0, \gamma_+ < 1}$  [11]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}[H_N(\tau_1) \leq s_1, \dots, H_N(\tau_m) \leq s_m] = \sqrt{\det(1 + \mathcal{K}_4 \mathcal{G})},$$

$$\mathcal{K}_4(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_4(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) & \mathcal{D}_4(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) \\ \mathcal{I}_4(\tau_1, \xi_1; \tau_2, \xi_2) & \mathcal{S}_4(\tau_2, \xi_2; \tau_1, \xi_1) \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_4 &= K_{\text{Airy}}^{\text{ext}} - \frac{1}{2} \text{Ai}(\xi_2) \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda \tau_1} \text{Ai}(\xi_1 + \lambda), \\ \mathcal{I}_4 &= - \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda \tau_1} \text{Ai}(\xi_1 - \lambda) \frac{d}{d\lambda} \{e^{-\lambda \tau_2} \text{Ai}(\xi_2 - \lambda)\} \\ &\quad + \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda \tau_2} \text{Ai}(\xi_2 - \lambda) \frac{d}{d\lambda} \{e^{-\lambda \tau_1} \text{Ai}(\xi_1 - \lambda)\} \\ \mathcal{D}_4 &= \frac{1}{4} \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda \tau_1} \text{Ai}(\xi_1 + \lambda) \int_\lambda^\infty d\nu e^{-\nu \tau_2} \text{Ai}(\xi_2 + \nu) \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda \tau_2} \text{Ai}(\xi_2 + \lambda) \int_\lambda^\infty d\nu e^{-\nu \tau_1} \text{Ai}(\xi_1 + \nu). \end{aligned}$$

ここで得られたカーネル (5.14) は GSE-GUE 間の遷移を記述する Dyson のブラウン運動モデルのエッジスケーリングのカーネルと一致する [15]。

## 6 まとめ

我々は 1 次元多核成長模型 (PNG) の高さゆらぎについて考察した。注目した物理量は多点相関関数 (4.9) であり、それを求めるために PNG を多層化し vicious walk にマップした。その結果ウェイトが (5.11) のように行列式の積で与えられることがわかった。それを用いて (4.9) を計算することができ、Dyson のブラウン運動モデルと呼ばれるクラス間の遷移を記述する動的なランダム行列モデルとの関係が明らかになった。

今後の課題について簡単に述べる。まず、半無限系について多点相関の解析は 2 点しか行なわれていない。vicious walk とのつながりを明らかにしてさらに多くのパラメタ領域で解析が出来ればよいと思う。また、今回は droplet 成長のみを扱ったが、フラットな初期条件からの成長について多点相関関数等はまだ明らかにされていない。この解析およびランダム行列や可積分系との関係を明らかにすることは興味深い課題である。

## 参考文献

- [1] 笹本 智弘. 物性研究 79(2003), 881 日本物理学会誌 (2003), 456
- [2] J. Baik, P. A. Deift and K. Johansson. *J. Amer. Math. Soc.*, 12:1119–1178, 1999.
- [3] C. A. Tracy and H. Widom. *Commun. Math. Phys.*, 159:151–174, 1994.
- [4] D. Aldous and P. Diaconis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 36:413–432, 1999.
- [5] P. Meakin. *Fractals, scaling and growth far from equilibrium*. Cambridge, 1998.
- [6] M. Prähofer and H. Spohn. *Physica A*, 279:342–352, 2000.
- [7] K. Johansson. math.PR/0206208.
- [8] 笹本 智弘. 別冊 数理科学: 現代数理物理の展開 (2003), 217
- [9] M. Prähofer and H. Spohn. In V. Sidoravicius, editor, *In and out of equilibrium, vol. 51 of Progress in Probability*, pages 185–204, 2002.
- [10] J. Baik and E. M. Rains. In P. M. Bleher and A. R. Its, editors, *Random Matrix Models and Their Applications*, pages 1–29, 2001.
- [11] T. Sasamoto and T. Imamura cond-mat/0307011(J. Stat.Phys to appear)

研究会報告

- [12] T. Nagao, M. Katori and H. Tanemura. *Phys. Lett. A*, 307:29–35, 2003.
- [13] M. Prähofer and H. Spohn. *J. Stat. Phys.*, 108:1071–1106, 2002.
- [14] T. Sasamoto and T. Imamura in preparation
- [15] P. J. Forrester, T. Nagao and G. Honner. *Nucl. Phys. B*, 553:601–643, 1999.