ランダム粒子系の流体力学極限

東京工大・理　内山 耕平

ここでは主として，拡散型スケール変換の下で流体力学極限を考え，最近の結果を排他過程について紹介する．一般に，運動する多数の粒子からなる系の拡散現象を調べるのに，一つの粒子を追跡する方法（self diffusion）と粒子の密度分布の時間発展をみる方法（bulk diffusion）とがあるが，拡散型スケール変換の下で流体力学極限を考えることは後者の問題を扱うことに他ならない．

流体力学極限の代表的なモデルの中で，拡散型のスケール極限をとるものとして

1 相互作用する Brown 粒子系

2 バイアスのない格子気体（排他過程，zero-range 過程 etc.）

3 Ginzburg-Landau model

また，双曲型（Euler type）のスケール極限をとるものとして

4 古典的 Hamilton（即ち Newton 力学の）粒子系

5 バイアスのある格子気体

がある．このうちで流体力学極限が証明されているのはすべて Markov 的な確率過程の場合に限る．1は [13] [8]，2は [14]，3は [12]，4は [3]，5は [4] [5] 等で扱われている．格子気体を扱った流体力学極限の解説書として [11] [6] [10] がある．

古典的 Hamilton 粒子系は，流体力学極限の問題の出発点でもあるので本論に入る前に簡単に述べておく．これは $\mathbf{R}^3$ 内の（一般には或る領域に閉じこめられた）莫大な数の古典的粒子からなる気体のモデルである．運動方程式は，微視的なスケールに適合した単位系で書き下して、

$$\frac{d^2}{d\tau^2}q_i(\tau) = -\sum_{j\neq i}\nabla U(q_i(\tau)-q_j(\tau)), \quad i=1,2,\dots \tag{1}$$

で与えられるとする．U は2体間の相互作用力を与える potential 関数で，ここではそれが本質的に近接作用 (finite range) であるとする．粒子の巨視的スケールでのおおきさを ϵ とし，巨視的スケールで見た粒子の位置を $x_i(t)=\epsilon q_i(t/\epsilon)$ により定義する．この系の保存量である粒子数，運動量，エネルギーの分布を巨視的スケールで見た量としてそれらの経験分布を

$$\alpha_\epsilon=\epsilon^3\sum_i\delta_{x_i(t)},\quad \beta_\epsilon=\epsilon^3\sum_i p_i(t/\epsilon)\delta_{x_i(t)},\quad \gamma_\epsilon=\epsilon^3\sum_i e_i(t/\epsilon)\delta_{x_i(t)}$$

により定義する．但し $p_i(\tau)$ と $e_i(\tau)$ は第 i 粒子の運動量ベクトル $q_i^{\cdot}(\tau)$ とエネルギー $\frac{1}{2}|p_i(\tau)|^2+\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}U(q_i(\tau)-q_j(\tau))$ である．局所平衡の成立を仮定し，形式的な式変形を行えば，これらの経験分布の極限密度関数の満たす関係式としては次の Euler 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot(\rho p)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho p)+[\nabla\cdot(\rho p_k p)]_{k=1}^3+\nabla P=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)+\nabla\cdot(\rho ep+Pp)=0$$

が導かれる．ここに $P=P(\rho,e)$ は U を2体 potential としてもつ古典的 Gibbs 統計力学における圧力関数である．

系 (1) はスケールの取り方を少し変えると Boltzmann 方程式の導出の問題に関連する．そこでは，粒子の大きさ ϵ の他に，粒子密度あるいは或る意味で同じことだが平均自由行程を ϵ と共に変えることになる．粒子が剛体球のとき，これを精確にいえば，速さの平均を1に規格化し剛体球半径を ϵ とするとき単位体積内の粒子数 n が

$$n\epsilon^2\cong 1$$

となるように n と ϵ を同時に変化させる (Boltzmann-Grad 極限)．粒子密度はこのとき $\sim\epsilon$ となり，典型的な1個の粒子は単位時間に1回程度の頻度で他の粒子に近接し相互作用（= 衝突）する．これに対し流体力学極限では

$$n\epsilon^3\cong 1$$

であり、粒子密度は ~ 1 となる．従って典型的な粒子は数個の粒子と常時相互作用していることになる．(Boltzmann Grad 極限による Boltzmann 方程式の導出については [1], [9] 等参照.)

なお，U が遠隔作用の potential のときは Vlasov 方程式と呼ばれる微積分方程式が現れる．この方程式は Boltzmann 方程式と共に、典型的な平均場近似の方程式で流体力学極限に特徴的な概念である局所平衡とは無関係に理解される．このような事情は，相互作用する1次元 Brown 粒子系，あるいは抵抗のある1次元古典的粒子系に対しては数学的結果として定式化できる [7]．

格子気体の流体力学極限.

格子気体とはここでは時間発展する粒子系を指す．そのもっとも単純な例として排他過程をとりあげる．1次元格子 $\mathbf{Z}$ の上をランダムに運動する N 個の粒子からなる系を考える．一つの格子点には高々一つの粒子しか存在し得ない（排他条件）とする．各々の格子点 $x\in\mathbf{Z}$ に対し，値1または0をとる変数 η_x を考え，その値は粒子の「在る」,「無し」を示していると解釈する．このとき，系全体の粒子の配置は変数 $\eta=(\eta_x)_{x\in\mathbf{Z}}\in\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ で表される．個々の粒子はすぐ後に述べる確率法則に従って運動し，それに応じて配置 η が変化する．時刻 t での配置を $\eta(t)=(\eta_x(t))_{x\in\mathbf{Z}}$ で表す．この系を拡散型スケールの下で見たときの粒子の経験分布を α_t で表す：

$$\int_{-\infty}^{\infty}J(\theta)\alpha_t(d\theta)=\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbf{Z}}\eta_x(N^2t)J(x/N)\qquad(J\in C_0^\infty(\mathbf{R})).$$

ここでの目標はこの系に対し流体力学極限の成立すること，即ち，粒子数 N を無限に大きくするとき α_t が或る極限分布に収束し，その密度関数 $\rho(t,\theta)$ が次の型の非線形拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho=\frac{\partial}{\partial(\theta}\left(D(\rho)\frac{\partial}{\partial\theta}\rho\right)\tag{2}$$

を満たすことを示すことである．粒子系の運動法則は，Markov 過程として，次により決定される：$\eta(t)$ は $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ 上の Markov 過程で，その生成作用素 A は

$$Af(\eta) = \sum_x c_{x,x+1}(\eta)\Big[f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)\Big]$$

で与えられる．ここに $\eta^{x,x+1}$ は η において η_x と η_{x+1} を入れ替えて得られる配置を表し，$c_{x,x+1}$ は $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ 上の非負関数でその値 $c_{x,x+1}$ は配置 η の下での x と $x+1$ 間の粒子の移動の速さを表す（平均待ち時間の逆数）．$c_{x,x+1} \equiv 1$ であればこの過程は排他条件の下でランダムウオークする N 個の粒子のなす Markov 過程に他ならない．$c_{x,x+1}$ は次の条件を満たすとする：

1. 空間的一様性　$c_{x,x+1}(\eta) = c_{01}(\tau_x\eta)$.
2. 非退化性　$c_{01}(\eta) > 0 \quad (\eta_0 \neq \eta_1)$.
3. 相互作用の局所性　$c_{0,1}(\eta)$ は η の有限個の座標にしか依存しない．
4. 対称性　$c_{0,1}(\eta^{01}) = c_{0,1}(\eta)$.

但し $\tau_x\eta$ は η を x だけ平行移動した配置 $(\eta_{y+x})_{y\in\mathbf{Z}}$ を表す．

Theorem 1　$c_{x,x+1}$ が上の条件を満たし，初期値 α_0 が一つの確率分布に収束すれば $\eta(t)$ に対し流体力学極限が成り立つ．*(2)* に現れる拡散係数 $D(\rho)$ は以下に述べる *Green-Kubo* 公式で与えられる：

密度が $\rho \in [0,1]$ である $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ 上の *Bernoulli* 分布を ν_ρ で，ν_ρ による期待値を $\langle\cdot\rangle_\rho$ で表す．また $L^2(\nu_\rho)$ における A の最小閉拡大（自己共役作用素になる）の生成する有界作用素の半群を $S(t)$ とする．このとき

$$D(\rho) = \frac{1}{2\chi}\langle(\eta_0-\eta_1)^2 c_{01}\rangle_\rho - \frac{1}{\chi}\int_0^\infty \sum_{x\in\mathbf{Z}} \langle(w\circ\tau_x)S(t)w\rangle_\rho dt$$

である．但し $w(\eta) = c_{01}(\eta)(\eta_0-\eta_1)$, $\chi = \rho(1-\rho)$.

参考文献

[1] C. Cercignani, R. Illner and M. Pulvirenti: The Mathematical Theory of Dilute Gases, Springer, NY., 1994.

[2] C. Kipnis and C. Landim : Scaling limits of particle systems, Springer, 1999

[3] S. Olla, S.R.S. Varadhan and H.T. Yau: Hydrodynamical limit for a Hamiltonian system with weak noise, Commun. Math. Phys., **155** (1993) 523-560.

[4] F. Rezakhanlou: Hydrodynamic limit for attractive particle systems on $\mathbf{Z}^d$, Commun. Math. Phys., **140** (1991) 417-448.

[5] T. Seppäläinen, Coupling the totally asymmetric simple exclusion process with a moving interface. I Brazilian School in Probability (Rio de Janeiro, 1997). Markov Process. Related Fields **4** (1998), no. 4, 593-628.

[6] H. Spohn: Interface motion in models with stochastic dynamics, J. Statis. Phys., **71** (1993) 1081-1132.

[7] K. Uchiyama: Scaling limit for a mechanical system of interacting particles, Commun. Math. Phys., **177** (1996) 103-128; K. Uchiyama: Scaling limit for a mechanical system of interacting particles II, Commun. Math. Phys., **196** (1998) 681-701.

[8] K. Uchiyama: Pressure in classical statistical mechanics and interacting Brownian particles in multi-dimensions, Ann. Henri Poincaré **1** (2000) 1159-1202.

[9] K. Uchiyama: Derivation of the Boltzmann equation from particle dynamics, Hiroshima Math. J. **18** (1988) 245-297.

[10] 内山・舟木，ミクロからマクロへ２（格子気体の流体力学極限，シュプリンガー東京，2002.

[11] C. Kipnis and C. Landim : Scaling limits of particle systems, Springer, 1999

[12] S.R.S. Varadhan: Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions - II, In: Asymptotic problems in probability theory: stochastic models and diffusions on fractals (eds. Elworthy and Ikeda), Longman, 1993, pp. 75-128.

[13] S.R.S. Varadhan: Scaling limits for interacting diffusions, Commun. Math. Phys., **135** (1991) 313-353.

[14] S.R.S. Varadhan and H.T. Yau: Diffusive limit of lattice gas with mixing conditions, Asian J. Math. **1** (1997) 623-678