研究会報告

シンプレクティックマップに対する特異摂動法

京都大学 情報学 数理工学　後藤 振一郎

我々は弱非線型シンプレクティックマップに対する特異摂動法としてのくりこみ法を開発した．この方法はシンプレクティック性を保持する系統的操作を有する．その操作により系は正しく簡約される．その結果くりこみマップ (簡約マップ) は，２次元相空間中に共鳴島構造を有する系においてでさえ，与えられたマップの長時間挙動を再現する．

1 はじめに

ハミルトン力学系は様々な観点からの研究が存在する．シンプレクティックマップとは，正準方程式の持つシンプレクティック性を保存した離散時間力学系のことで，ある正準方程式のポアンカレマップに対応する．また，現実の物理系においてもシンプレクティックマップで記述される現象が加速器物理等で存在し，興味が持たれている．

中でも近可積分系クラスは，相空間の中にカオス領域と秩序領域が混在し，多彩な運動が存在し興味深い．それゆえ，ハミルトン系の問題の中で重要な位置を占める問題の１つとなっている．

シンプレクティックマップに対する特異摂動法はそういった系を解析する道具の１つになりうるが，微分方程式系に対するものよりも発展が遅れている．それを踏まえ，今回我々は，『シンプレクティックマップ系に対するくりこみ法』を紹介する．ここで『くりこみ法』とは与えられた微分方程式系に対して，深い洞察を必要としない特異摂動法の候補として注目を浴びているものである [1]．この方法により，例えばあるクラスの非線型格子モデルを表す正準方程式から空間離散非線型シュレーディンガー方程式を導出することができる．なお散逸系のモデルの場合は，複素ギンツブルクランダウ方程式が導出される．

本稿は紙数の都合上，以上の研究の簡単な紹介である．詳しくは文献 [2] を参照して頂きたい．

2 ２次元非線型シンプレクティクマップのくりこみ

次の形のシンプレクティックマップ $((x^n, y^n) \mapsto (x^{n+1}, y^{n+1}))$，の簡約を考察する．

$$x^{n+1} = x^n + y^{n+1}, \qquad y^{n+1} = y^n - ax^n + 2\varepsilon J(x^n)^3,$$

ここで x^n, y^n は 時刻 n での実数値をとる互いに正準共役な力学変数，ε $(0 < \varepsilon \ll 1)$ はスモールパラメーター，a, J は $\mathcal{O}(1)$ のパラメーターであり，相空間原点は楕円型不動点と仮定する．シンプレクティック性とは $dx^{n+1} \wedge dy^{n+1} - dx^n \wedge dy^n = 0$ の関係式が成立することをいい，今の例においても成立していることが計算から確かめられる．このマップは以下のように変形できる．

$$L_\theta x^n \equiv x^{n+1} - 2x^n \cos\theta + x^{n-1} = \varepsilon 2J(x^n)^3, \qquad \cos\theta \equiv 1 - a/2, \tag{1}$$

以下これを考察する．$\theta=\frac{\pi}{2}+\varepsilon\theta^{(1)}+\varepsilon^2\theta^{(2)}+\cdots,$ のように展開される場合に興味を持つものとする．このパラメーターの値では線型化演算子 L_θ 中の $\cos\theta$ の値は小さい ($\mathcal{O}(\varepsilon)$)．回転数 1/4 を有する力学系からの摂動問題である。この問題に我々の開発した『シンプレクティックくりこみ法』を適用すると以下の簡約系が得られる．

$$
\begin{aligned}
A_1^{n+1} &= A_1^n+\varepsilon\left[4J\left\{A_2^n+\frac{\varepsilon}{2}(-4JA_1^{n3}+\theta''A_1^n)\right\}^3-\theta''\left\{A_2^n+\frac{\varepsilon}{2}(-4JA_1^{n3}+\theta''A_1^n)\right\}\right],\\
A_2^{n+1} &= A_2^n+\frac{\varepsilon}{2}\left(-4JA_1^{n3}+\theta''A_1^n\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left(-4JA_1^{n+1\ 3}+\theta''A_1^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

ここで，もともとの変数 x^n とくりこみ変数 A^n の関係は $x^n\approx A^n i^n+$(複素共役項)，であり，A_1^n, A_2^n は実数に値をとる正準共役な力学変数である ($A^n=A_1^n+iA_2^n,\quad dA_1^{n+1}\wedge dA_1^{*\ n+1}-dA_1^n\wedge dA_1^{*\ n}=0$)．また $\theta''\equiv\theta^{(1)}+\varepsilon\theta^{(2)}$ である．この方法を『離散系に単純拡張されたくりこみ法』で簡約系を構成するとシンプレクティック性が保存されないことを注意しておく．この系の簡約の正しさを数値的に示した例が文献 [2] にあるので参考にされたい．なお，この例では ε^2 次までの摂動を考慮したが，任意の高次次数まで計算可能である．また与えられた問題 (1) で非線型項が $(x^n)^3$ であったが，それ以外の多項式型非線型項であってもこの方法は適用可能である．

3　結語

今回，我々の開発したくりこみ法について簡単に紹介した．この方法は高自由度マップ系に対しても有効である．実際に結合型非線型シンプレクティックマップに対して，次空離散非線型シュレーディンガー方程式を導出することが可能である．低次元 (2 次元) の場合，我々は共鳴島構造をこの方法で摂動論の有効範囲内で予言できる事を示した [3]．また，この手法を用いて未踏の研究領域『高次元 (4, 6, 8, .. 次元) 相空間中の共鳴島構造』を調べる問題は興味深い．

謝辞

この研究は日本学術振興会・特別研究員制度の支援を受けて行われた．関係各位に感謝いたします．

参考文献

[1] Y. Oono, "*RENORMALIZATION AND ASYMPTOTICS*", Int. J. Mod. Phys. **B14** (2000),pp1327–1361. または，大野克嗣，"くりこみ，現象論，そして漸近解析 (別冊・数理科学『２０世紀の物理学』)"，サイエンス社 (1998).

[2] S. Goto, and K. Nozaki, "*Liouville Operator Approach to Symplecticity-Preserving Renormalization Group Method*", `http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0309021`,(2003). もしくは，後藤振一郎，野崎一洋，"*Liouville Operator Approach to Symplecticity-Preserving RG method*"，数理解析研究所 (出版予定).

[3] T. Maruo, S. Goto and K. Nozaki, "*Renormalization Analysis of Resonance Structure in 2-D Symplectic Map*", `http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0309072`, (2003).