角があるビリヤードの境界要素法について

東京都立大学理学研究科　岡田雄一郎，首藤啓
ATR 環境適応通信研究所　原山卓久
早稲田大学理工学部　田崎秀一

N 個の頂点 $\{c_i\}$ を除いて C^2 級の境界 ∂D をもつ有界な平面領域 D について、Helmholtz 方程式の境界値問題：

$$(\Delta + k^2)\Psi(r) = 0 \quad r \in D, \quad \Psi(r) = f(r) \quad r \in \partial D \tag{1}$$

を考える。基本解 $G_0(r, r'; k) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|r - r'|)$ を用いることで、Helmholtz 方程式の境界値問題 (1) は、$\rho \in C^0(\partial D)$ を未知関数とする積分方程式：

$$\rho - K(k)\rho = 2f \tag{2}$$

$$(K(k)\rho)(t) := \begin{cases} \int_{\partial D} -2\partial_s G_0(r(t), r(s); k)\rho(s)ds & r(t) \in \partial D \backslash \{c_1, c_2, \cdots, c_N\} \\ \int_{\partial D} -2\partial_s G_0(r(t), r(s); k)\rho(s)ds + (\frac{\gamma_i}{\pi} - 1)\rho(t) & r(t) \in \{c_1, c_2, \cdots, c_N\} \end{cases}$$

に帰着される [1]。s は弧長パラメータ、γ_i はそれぞれ頂点 c_i の内角、∂_s は $r(s)$ における外向き法線微分である。

この積分方程式を離散化することにより得られる有限次元の連立一次方程式：

$$\rho_i^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} w_j K_{ij}^{(n)} \rho_j = 2f_i^{(n)} \tag{3}$$

を数値的に解くのが境界要素法である [2]。ここで $\rho_i^{(n)}$, $f_i^{(n)}$, $K_{ij}^{(n)}$ はそれぞれ、$\rho(s)$, $f(s)$, $K(t, s; k)$ の分点 $\{s_1, s_s, \cdots, s_n\}$ 上での値であり、w_j は分点 s_j に対する重みである。境界要素法では通常、十分大きな n に対して行列式：

$$\Delta_n(k) = \det(\delta_{ij} - w_j K_{ij}^{(n)}) \tag{4}$$

を数値的に計算し、その実軸上の零点を求めることで同次型 Dirichlet 問題 ($f = 0$) の固有値を求める。

問題となる領域が C^2 級の閉曲線で囲まれている場合、無限次元行列式 $\lim_{n\to\infty} \Delta_n(k)$ の存在は Fredholm 理論により保証される。実際、積分核 $K(t, s; k) := -2\partial_s G_0(r(t), r(s); k)$ の中に現れる $H_1^{(1)}(z)$ は $z \to 0$ で $1/z$ 型の特異性を持つが、$K(t, t; k) = -\kappa(t)/2\pi$ とおくことで $K(t, s; k)$ は $\partial D \times \partial D$ 上に連続に拡張でき、(2) は第 2 種 Fredholm 型の積分方程式となる。このとき無限次元行列式 $\lim_{n\to\infty} \Delta_n(k)$ は Fredholm 行列式そのものであり、その零点が同次型

Dirichlet 問題の固有値を与えることが Fredholm 理論により保証される [3, 4]。一方で境界が角を持つ場合、$r(t)$ と $r(s)$ が一つの角を挟んで接近すると、積分核は $K(t,s;k) \sim |t-s|^{-1}$ のように振る舞い、積分方程式 (2) は特異となる [5, 6]。このとき $\lim_{n\to\infty} \Delta_n(k)$ は k に依らず一様に 0 に収束し、もはや Fredholm 行列式と同等の役割を果さない。角がある領域でも n を有限に止めて数値的に得られる $\Delta_{n<\infty}(k)$ の零点が、同次型 Dirichlet 問題の真の固有値を良く近似していることが可積分ビリヤードに対する計算から確認されるが、領域に角があるときの無限次元行列式 $\lim_{n\to\infty} \Delta_n(k)$ の意味は明らかでないし、$\Delta_{n<\infty}(k)$ の零点が固有値を良く近似するにしてもその理由は自明とは言えない。

本講演ではこの問題に対するひとつの答えとして、

$$K_s(t,s) := -\frac{1}{\pi}\frac{\cos\varphi(t,s)}{|r(t)-r(s)|}h_\Delta(|t-s|), \quad h_\Delta(t) := \begin{cases} 1 & |t| \le \frac{\Delta}{2} \\ 1-\frac{2}{\Delta}t & \frac{\Delta}{2} \le |t| \le \Delta \\ 0 & \Delta \le |t| \end{cases} \tag{5}$$

$$(K_s\rho)(t) := \begin{cases} \int_{\partial D} K_s(t,s)\rho(s)ds & r(t) \in \partial D \backslash \{c_1, c_2, \cdots, c_N\} \\ \int_{\partial D} K_s(t,s)\rho(s)ds + (\frac{\gamma_i}{\pi}-1)\rho(t) & r(t) \in \{c_1, c_2, \cdots, c_N\} \end{cases} \tag{6}$$

で定義される K_s を用いて、K を $K = K_s + K_r$ と分解すれば、十分一般的な角のある領域に対して特異部 K_s は $|K_s| < 1$ を満足し、従って

$$I - (I-K_s)^{-1}K_r = 2(I-K_s)^{-1}f \tag{7}$$

は第 2 種 Fredholm 型積分方程式になることを示し、対応する Fredholm 行列式 $\lim_{n\to\infty} D_n(k)$ の零点として角がある領域の固有値を計算する方法を提案した。ここで $\varphi(t,s)$ は $\overrightarrow{r(s)r(t)}$ と $r(s)$ における法ベクトルの成す角である。また、分割数 n を有限に止めたとき、通常の境界要素法で用いる $\Delta_n(k)$ の零点と $D_n(k)$ の零点が一致することを示し、角のある領域に対しても通常の境界要素法で得られる固有値が正しく同次型 Dirichlet 問題の固有値の近似値を与えることを指摘した。

参考文献

[1] R. Kress, *Linear Integral Equations, 2nd ed.*, (Springer-Verlag, Berlin 1999)

[2] M.V. Berry and M. Wilkinson, Proc. R. Soc. London, **392**, 15 (1984).

[3] B. Georgeot and R.E. Prange, Phys. Rev. Lett. **74**, 2851 (1995).

[4] S. Tasaki, T. Harayama and A. Shudo, Phys. Rev. E **56**, R13 (1997).

[5] R.J. Riddel, J. Comp. Phys. **31**, 21 (1979); *ibid* **31**, 42 (1979).

[6] C. Pisani, Ann. Phys. **251**, 208 (1996).