CAR代数での量子相関と荒木-Lieb不等式の破れ について

守屋 創 Hajime Moriya

1 目的

現在まで量子情報理論でのエンタングルメント(量子相関)の研究はテンソル合成系(例えばスピンや光子のテンソル合成系)が主体である。しかしフェルミオン系はCAR代数を作り、部分系間の構造はテンソル積になっていない。この論説では荒木-Liebによるエントロピーの三角不等式に着目し、フェルミオン系とテンソル系の違いを明らかにする。そしてフェルミオン系はテンソル系にない新しい型のエンタングルメントを持つことを示す。

2001年シュレディンガー国際数理物理学研究所で開催されたBell Conferenceで「フェルミオン系のエンタングルメントは何か」という問いが、量子力学基礎や量子情報理論の専門家で大いに議論されていた。この問いに対する数学サイドからの一つの解答を示したい。

2 フェルミオン系

2.1 設定

考察するのは二合成フェルミオン系である。ただしより一般の多合成系、さらには無限自由度格子フェルミオン系でも同様な考察ができる。また格子上の各フェルミオンのスピン自由度は任意で良い。こうした一般化は今回述べる内容の本質的な部分に影響を与えない。

a_i^* and a_i をそれぞれ生成・消滅演算子とする。二合成系なので $i \in \{1, 2\}$ とする。CAR(canonical anticommutation relations) とは:

$$\begin{aligned} \{a_i^*, a_j\} &= \delta_{i,j} 1 \\ \{a_i^*, a_j^*\} &= \{a_i, a_j\} = 0, \end{aligned}$$

ここで $\{A, B\} = AB + BA$ (anticommutator), $\delta_{i,j} = 1(i=j)$ $\delta_{i,j} = 0(i \neq j)$ である。全系 $\mathcal{A}_{1,2}^{\text{car}}$ は $\{a_i^*, a_i \mid i = 1, 2\}$ で生成される(有限次元) $\mathbf{C}^*$ 代数である。Alice-Bobに対応する二つの部分系として部分代数 $\mathcal{A}_1^{\text{car}}, \mathcal{A}_2^{\text{car}}$ をとる:

$$\mathcal{A}_1^{\text{car}} \equiv \{a_1^*, a_1\}^{\mathbf{C}^*}, \quad \mathcal{A}_2^{\text{car}} \equiv \{a_2^*, a_2\}^{\mathbf{C}^*}.$$

2.2 非独立性

$(\mathcal{A}_1^{\text{car}}, \mathcal{A}_2^{\text{car}})$ が代数的独立 (algebraic independent) でないことは、 a_1, a_2 など交換しない要素の組をもつことから明らかである。

ここではフェルミオン系の非独立性を状態の拡張可能性から特徴づけた。この観点はエンタングルメントのみならず、分離状態 (separable state) の研究でも重要な役割をはたす [2]。統計的独立性 (statistical independence) あるいは $\mathbf{C}^*$ -independence) の一般的な定義を与える。

Definition 2.1. $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を $\mathbf{C}^*$ 代数 $\mathcal{C}$ の二つの部分代数の組とする。 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が統計的独立とは準備された任意の $\mathcal{A}$ 上の状態 ω_1 と $\mathcal{B}$ 上の状態 ω_2 の組に対し、それらを拡張する全系 $\mathcal{C}$ 上の状態 ω が存在することをいう。

Remark.

統計的独立性は Haag と Kastler により局所場の理論で導入された [5]。これ以外にも数々の独立性の概念がありその相互関係が研究されている。ここでは代数的独立 $\neq$ 統計的独立という事実に注意しておく (詳しくは [4][7] 参照)。

フェルミオン系で Definition 2.1 を確かめる。

Proposition 2.2. $(\mathcal{A}_1^{\text{car}}, \mathcal{A}_2^{\text{car}})$ は統計的非独立である。

[6] ではより詳しい情報を得た。

Proposition 2.3. ω_1 と ω_2 をそれぞれ $\mathcal{A}_1^{\text{car}}$, $\mathcal{A}_2^{\text{car}}$ 上の純粋状態とする。両者の拡張状態 ω ($\omega|_{\mathcal{A}_1^{\text{car}}} = \omega_1, \omega|_{\mathcal{A}_2^{\text{car}}} = \omega_2$) が存在する必要十分条件は少なくとも一方が偶状態 (生成消滅の奇数個の積を消す状態) であることである。

Remark 1.

必要性には非自明な数学的解析が必要である。[6] では [3] で証明したエントロピーの強烈加法性 (SSA) の特別な場合を用いた。

Remark 2.

実は片方のみを純粋状態と仮定した条件での状態の拡張性の必要十分条件を無限・有限フェルミオン系両方で得ている [2]。

3 エンタングルメント

3.1 エントロピー三角不等式

有限次元線形作用素のつくる代数 $\mathcal{A}_1^{\text{spin}} = L(\mathcal{H}_1) \otimes \mathbf{1}$, $\mathcal{A}_2^{\text{spin}} = \mathbf{1} \otimes L(\mathcal{H}_2)$ ($\dim \mathcal{H}_1, \dim \mathcal{H}_2 < \infty$) のテンソル合成系 $\mathcal{A}_{1,2}^{\text{spin}} = \mathcal{A}_1^{\text{spin}} \otimes \mathcal{A}_2^{\text{spin}}$ をとる。ここでは von Neumann エントロピー S の三角不等式 (Araki-Lieb 不等式) が任意の $\mathcal{A}_{1,2}^{\text{spin}}$ 上の状態 ω に対して成立する:

$$\left| S(\omega|_{\mathcal{A}_1^{\text{spin}}}) - S(\omega|_{\mathcal{A}_2^{\text{spin}}}) \right| \leq S(\omega).$$

しかし、フェルミオン系ではこれが破れる。

3.2 片側エンタングルメント

(フェルミオン系に限らない) 一般的な定義を導入する。

Definition 3.1. C を C^* 環 (無限次元でも可) とし, ω を C 上の状態とする. A と B を C の有限次元部分代数の組とする. (A, B) 間の偏在エンタングルメントを以下で定義する:

$$\tilde{E}(\omega, A, B, C) \equiv \inf_{\omega = \sum \lambda_i \omega_i} \sum_i \lambda_i |S(\omega_i|_A) - S(\omega_i|_B)|,$$

ここで $\inf$ は ω の C 上の状態空間でのアフィン分解全体でとる.

テンソル系では任意の状態 ω で

$$\tilde{E}(\omega, A_1^{\text{spin}}, A_2^{\text{spin}}, A_{1,2}^{\text{spin}}) = 0$$

とすべて消えて、エンタングルメントの偏りは存在しない。しかしフェルミオン系では以下のような対照的な状況が生じる。

Theorem 3.2. 任意の実数 $x \in [0, \log 2]$ に対して

$$\tilde{E}(\omega, A_1^{\text{car}}, A_2^{\text{car}}, A_{1,2}^{\text{car}}) = x$$

なる $A_{1,2}^{\text{car}}$ 上の状態 ω が存在する。

この具体的構成は [6] を参照。またいかなる x に対しても ω, ω_1 とも純粋状態ととることができる。これを片側エンタングルメントと呼ぶ。

Definition 3.1 と同様な一般的設定でエンタングルメントの定義を与える。

Definition 3.3. ω を C 上の状態とする. A 上のエンタングルメントを以下で与える。

$$E(\omega, A, C) \equiv \inf_{\omega = \sum \lambda_i \omega_i} \sum_i \lambda_i S(\omega_i|_A).$$

テンソル系では $A_{1,2}^{\text{spin}}$ 上の任意の状態 ω で

$$E(\omega, A_1^{\text{spin}}, A_{1,2}^{\text{spin}}) = E(\omega, A_2^{\text{spin}}, A_{1,2}^{\text{spin}}).$$

しかしフェルミオン系では非自明なエンタングルメントの偏在が存在し、その場合

$$E(\omega, A_1^{\text{car}}, A_{1,2}^{\text{car}}) \neq E(\omega, A_2^{\text{car}}, A_{1,2}^{\text{car}})$$

である。

4 フェルミオン系特有の非局所的量子効果

幾分直感的な言い方をすれば、これまで見たテンソル系にはないフェルミオン系でのエンタングルメントの著しい性質は、部分系の組が非独立なことから生じた非局所的な量子効果の反映である。以下ではより操作的な立場でこれを論じる。

$\mathcal{A}_1^{\text{car}}$ -automorphism とは $\alpha_1 \otimes \mathbf{1}_B$ なる形の $\mathcal{A}_{1,2}^{\text{car}}$ 上 automorphism である。ただし α_1 は $\mathcal{A}_1^{\text{car}}$ 上のある automorphism、 $B = (\mathcal{A}_1^{\text{car}})' \cap \mathcal{A}_{1,2}^{\text{car}}$ (可換子) とする。

テンソル系ではすべての局所変換の下でエンタングルメントは非増加である。特に任意の $\mathcal{A}_1^{\text{spin}}$ -automorphism $\beta = \beta_1 \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{A}_2^{\text{spin}}}$ (ただし β_1 は $\mathcal{A}_1^{\text{spin}}$ 上の automorphism) を任意の状態 ω に作用させてもエンタングルメントは不変である。すなわち

$$E(\omega \circ \beta, \mathcal{A}_2^{\text{spin}}, \mathcal{A}_{1,2}^{\text{spin}}) = E(\omega, \mathcal{A}_2^{\text{spin}}, \mathcal{A}_{1,2}^{\text{spin}}).$$

しかしフェルミオン系では適当な $\mathcal{A}_1^{\text{car}}$ -automorphism α に対して

$$E(\varrho \circ \alpha, \mathcal{A}_2^{\text{car}}, \mathcal{A}_{1,2}^{\text{car}}) > E(\varrho, \mathcal{A}_2^{\text{car}}, \mathcal{A}_{1,2}^{\text{car}}).$$

なる状態 ϱ が存在する (具体的な形は [6] 参照)。またこの α により ϱ の $(\mathcal{A}_1^{\text{car}}, \mathcal{A}_2^{\text{car}})$ 間の偏在エンタングルメントも変化する。偏在エンタングルメントはテンソル系では常に 0 であったことに注意する。

References

- [1] H.Araki and E.H.Lieb, Entropy inequalities, *Commun. Math. Phys.* **18**(1970), 160-170.
- [2] H.Araki and H.Moriya, Joint Extension of States of Subsystems for a CAR System, *preprint*.
- [3] H.Araki and H.Moriya, Equilibrium Statistical Mechanics of Fermion Lattice Systems, *preprint*.
- [4] M. Florig and S.J.Summers, On the statistical independence of algebras of observables, *J. Math. Phys.* **38**, (1997), 1318-1328.
- [5] R.Haag and D.Kastler, An algebraic approach to quantum field theory, *J. Math. Phys.* **7**, (1964), 848-861.
- [6] H.Moriya, Some aspects of quantum entanglement for CAR systems, *to appear Lett.Math.Phys.*
- [7] S.J.Summers, On the independence of local algebras in quantum field theory, *Rev. Math. Phys.* **2**, (1990), 201-247.