

連続量を中心にした量子情報処理

古澤 明

東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻

CREST, JST

1 はじめに

現在量子情報処理が精力的に研究されている。その中で最も研究が進んでいるのは、いわゆる量子ビット（2準位系、つまり2つしか固有状態が存在しない物理系）を用いた量子情報処理である。ところが、現実の物理系に純粋な2準位系は存在しないため、これはある意味で理想極限である。したがって、量子ビットの理論を現実の実験に置き換える場合、種々の困難が存在する。

この量子ビットの対極の極限として、「連続量」（連続物理量、つまり連続固有値を持つ物理系）を用いた量子情報処理がある。この連続量量子情報処理も「完全」に行うためには無限のエネルギーを必要とし、量子ビットの対極の理想極限といえる。したがって、連続量量子情報処理も「完全」に行うことは物理的に不可能である。しかし、現実の実験では、高エネルギー状態の存在をそれほど気にしなくても良い場合も多く、連続量を用いると、「不完全」ではあるが意味のある量子情報処理実験を行うことができる。

いずれにしても現実の物理系はどちらの理想極限でもないため、量子ビットと連続量の中間の状態といえるが、状況に応じてどちらの近似で研究を進めた方が効率的であるかは考慮すべきだと思われる。本サブゼミでは、主に連続量の近似でそれなりに意味のある量子情報処理「浮動小数点式量子コンピューティング」[1]の1例として、「連続量量子テレポーテーション」について述べる。

2 量子情報を担うもの—量子ビットと連続量—

現在主流になっているデジタルコンピューターの情報単位は「ビット」であり、1ビットの情報には0か1であるかということである。同様に量子情報の単位の1つに量子ビットというものがあり、1量子ビットの情報は次式で表せる。

$$|\psi_2\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle \quad (1)$$

ここで、 α_n は複素数であり、 $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$ を満たす。式(1)から明らかのように、 $\alpha_1 = 0$ または $\alpha_0 = 0$ の場合は、それぞれ $|\psi_2\rangle = |0\rangle$ または $|\psi_2\rangle = |1\rangle$ となるので¹、少なくとも通常の1ビットの情報は表現できる。さらに量子ビットでは、「重ね合わせ」により、0、

¹位相因子を省略した。

1以外の情報も表現できる。複素数 α_0, α_1 には $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$ 以外の縛りはないから、 α_0, α_1 を用いて情報を表現しようとする、ブロッホ球上で古典的な無限ビットを表現できることになる。しかし、量子ビットの中にそのような「ポテンシャル」はあるが、実際に測定を行うと、 $|\alpha_0|^2$ の確率で0が、 $|\alpha_1|^2$ の確率で1が観測されるだけである。決して観測結果には1.3というような値は出てこない。つまり、そういう意味では0か1のデジタルであり、直接測定によりそれ以上の情報を取り出すことはできない。いわゆる「量子情報処理」では、直接測定によらず非常に巧いやり方で、量子ビットの「ポテンシャル」を引き出す。

「はじめに」で述べたように、量子ビットの対極の考え方として「連続量」がある。通常のコンピューターでもデジタルコンピューターに対してアナログコンピューターがあり、それぞれの情報単位が「ビット」と「ナット」²となっている。あまり使われていない表現ではあるが、「連続量」は「量子ナット」といえる。連続量量子情報は一般の状態ベクトルであり次式で書ける³。

$$|\psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle \quad (2)$$

ここで、 $\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle$ であり、 $\int dx |\psi(x)|^2 = 1$ となっている。 $\psi(x)$ はいわゆる波動関数である。また、 $|x\rangle$ は「位置」の演算子 \hat{x} の固有値 x を持つ固有状態であり、直感的に言えば、位置は確定しているが、運動量は全くの不確定になった状態である。さらに、量子ビットの場合と同様にこの状態を直接測定すると、得られる値は実数 x であり、その値を得られる確率が $|\psi(x)|^2$ となっている。つまり、複素数である $\psi(x)$ に情報を詰め込んで、直接測定で得られる x は実数なので、情報を取り出すことはできない。

以上のような量子ビットと連続量量子情報の関係を整理する。量子ビットを $\sum_{n=0}^1 \alpha_n |n\rangle$ と書けば、量子ビットの α_n は、連続量の $\psi(x)$ に相当し、量子ビットの基底 $|0\rangle, |1\rangle$ は、連続量の基底 $|x\rangle$ に対応する⁴。また、連続量は $\langle n|\psi\rangle = \alpha_n$ とすれば、式(2)の代わりに $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |n\rangle$ と表現できる。したがって、量子ビットは2次元のヒルベルト空間での量子情報で、連続量は無限次元のヒルベルト空間での量子情報ともいうことができる⁵。ただし、現実的には連続量は近似であるので、いずれにしても有限次元での量子情報ということになるが、連続量の近似での量子情報の方が次元が高いため、量子ビットでの量子情報を含むことになる。つまり、量子ビットを用いて可能な量子情報処理は、すべて連続量の近似を用いた量子情報処理でも可能となる⁶。

3 ハミルトニアン合成

量子コンピューターはユニタリー変換「マシン」である。つまり、「入力」 $|\psi\rangle$ に対して、「出力」 $|\varphi\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$ を返すものである。もちろん、 $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t}$ であるから、与えられた系

²「ビット」は底を2とした場合の対数表示であるが、「ナット」は底を e としたときの対数表示（自然対数）である。

³式(2)を含めて、今後すべての積分において、積分区間は $-\infty$ から $+\infty$ とする。

⁴もちろん、量子ビットの $\sum_{n=0}^1$ は、連続量の $\int dx$ に対応している。

⁵これはちょっと言い過ぎで、 $|x\rangle$ は unphysical つまり規格化不可能なので、ヒルベルト空間の元にはなっていない。しかし、後述する「スクイーズ」の極限と考えれば、許せる範囲だと思われる。

⁶証明はされていないが、連続量の近似の方が次元が高い分、量子ビットよりも処理の効率が低いという期待もある。

において任意の量子演算を可能にするためには、任意のハミルトニアンを生成する必要がある。

量子ビットにおける任意のハミルトニアン生成法、つまりユニバーサル量子コンピューターの構成法に関しては、Lloyd[2]、Deutschら [3]により詳しい研究がなされている。これらの研究は、2量子ビットを用いた制御ユニタリーゲートとこれらをつなぐ「ネットワーク」があれば、任意のハミルトニアンつまりユニバーサルな量子コンピューターを構成できることを示している。もう少し詳しくいえば、2量子ビットを用いた制御ユニタリーゲートに相当するハミルトニアン \hat{H}_1 と、このハミルトニアンにおいて量子ビットを入れ替えたものである \hat{H}_2 があれば、これらの交換のハミルトニアン $i[\hat{H}_1, \hat{H}_2]$, $[\hat{H}_1, [\hat{H}_1, \hat{H}_2]]$, \dots により任意のハミルトニアンを合成できることが示されている⁷。また、 \hat{H}_1 と \hat{H}_2 を物理的には同一の量子ゲートと考えれば、これ1種類のみを用いた「ネットワーク」ですべての量子コンピューター「回路」を組めるともいえる。

連続量に関しても同様なことが、LloydとBraunsteinにより示されている [1]。ただし、連続量に関しては、最初に必要なハミルトニアンの「レパートリー」は上述の \hat{H}_1 と \hat{H}_2 のように2つとはなっていない。ここでは詳しく述べないが、量子光学では直交位相成分に相当する演算子「位置」 \hat{x} と「運動量」 \hat{p} を中心に、 $\{\hat{x}, \hat{p}, \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2), \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}), (\hat{x}^2 + \hat{p}^2)^2\}$ をスタートのハミルトニアンとして用意しておけば、あとは交換操作により任意のハミルトニアンが合成でき、ビームスプリッター（あるいは同等のハミルトニアン⁸）を用いた「ネットワーク」により任意の量子回路つまりユニバーサルな量子コンピューターを構成できることが示されている。ここで、 \hat{x} 、 \hat{p} の2つだけからでは（実際は $(\hat{x}^2 + \hat{p}^2)^2$ 以外の4つのハミルトニアンからでも）任意のハミルトニアン（ \hat{x} 、 \hat{p} の任意の多項式）を合成できない理由は、「位置」と「運動量」は正準交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たすため、交換操作により \hat{x} 、 \hat{p} の3次以上のハミルトニアンを生成できないからである。また、それぞれのハミルトニアンによる物理的操作は量子光学的操作に対応しており、 \hat{x} 、 \hat{p} は位相平面上での変位演算（ディスプレースメント）、 $\frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2)$ は位相シフト、 $\frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})$ はスクイーズ（2次の非線形光学効果）、 $(\hat{x}^2 + \hat{p}^2)^2$ は光カー効果（3次の非線形光学効果）となっている。また、最初のレパートリーとしては、 $(\hat{x}^2 + \hat{p}^2)^2$ に代わり、これより高次のハミルトニアンを用いることも可能である。つまり、任意のハミルトニアンを合成するには、3次以上の非線形光学効果が必ず必要となってくる。

ここまでは、ユニバーサルな量子コンピューターの概念について述べたが、ここからはもう少し「現実」を振り返ってみることにする。

現実に高度な量子コンピューターを実現することは容易なことではない。特に高次の非線形光学効果は非常に小さく、現実の物理系で量子コンピューターに使えるほど大きなものを得ることは難しい。そこで、ハミルトニアン $\{\hat{x}, \hat{p}, \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2), \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\}$ とビームスプリッターだけを用い、意味のある量子操作の実験を行うことには大きな価値がある（ユニバーサルな量子コンピューターへの第一歩である）。ここでは、その例として「量子テレポーテーション」を取り上げ、これについて解説を行う。

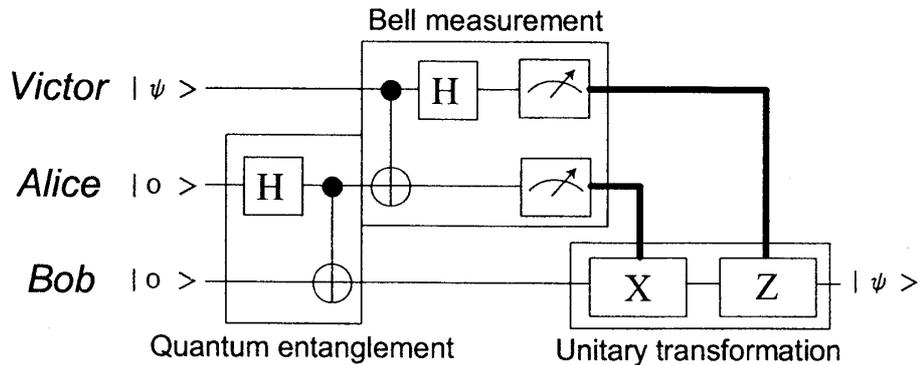


Figure 1: 量子ビットテレポーテーションの量子回路 [5]

4 量子回路として見た量子ビットテレポーテーション [4]

簡単のため、まず量子ビットのテレポーテーション (図1) について説明し、次節で連続量のテレポーテーションについて述べる。

まず、図1において、Quantum entanglementとして囲われている部分について考えてみる。これはアダマールゲートと制御ノットにより構成されている。アダマールゲートは $|0\rangle$ を $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ に変換し、 $|1\rangle$ を $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ に変換する。また、制御ノットは $|x, y\rangle$ を $|x, x \oplus y\rangle$ に変換する⁹。このブロックへの入力は $|00\rangle = |0\rangle|0\rangle$ であるから、このブロックからの出力は、 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ となり、エンタングルしていることがわかる。

次に、図1において、Bell measurementとして囲われている部分について考えてみる。いわゆるベル測定では次のような変換が起こる。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) &\rightarrow |00\rangle, \\
 \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) &\rightarrow |10\rangle, \\
 \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) &\rightarrow |01\rangle, \\
 \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) &\rightarrow |11\rangle.
 \end{aligned} \tag{3}$$

つまり、ベル基底が通常のビットの基底に変換される。単なる基底変換だと思うかもしれない。しかし、これにはもっと強い力がある。

ベル測定の出力としては、いずれにしても 00、01、10、11 の4通りしかない。例えば、出力として 00が出た場合、入力がどんな状態であっても、入力が強制的に $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ とされたのと同様に振る舞う。他の出力の場合も同様である。つまり、ベル測定によって、

⁷この2つの論文では、最初に使えるハミルトニアン「レパートリー」として \hat{H}_1 と \hat{H}_2 があれば、これらの交換操作から生じるハミルトニアンである $i[\hat{H}_1, \hat{H}_2]$, $[\hat{H}_1, [\hat{H}_1, \hat{H}_2]]$, ... も使える「レパートリー」に入り、すべてのハミルトニアンが合成できるとしている。

⁸例えば、量子非破壊測定 (QND) のハミルトニアンなど。

⁹ \oplus は排他的論理和である。

講義ノート

もともと独立であった2つの量子ビットがエンタングルさせられてしまうのである。エンタングルの仕方は、ベル測定結果に依存して4通りあるのは明らかである。ベル測定には、もともと他人であった2人を強制的に「結婚」させる力があるのである。

最後にベル測定結果によって、ユニタリー変換を行う¹⁰。最終的には入力状態がボブで再現される。

以上が量子ビットテレポーテーション回路である。ここまで説明してくると、量子テレポーテーションに量子情報科学あるいは量子情報処理のエッセンスが詰まっている様子がよくわかる。エッセンスとは量子情報科学流にいうと、量子エンタングメントの代表的な生成法（図1の Quantum entanglement および Bell measurement の部分）が含まれていること、量子情報処理流に言えば、制御ノットと1量子ビットユニタリー変換が含まれていることである。前節で述べたことを別の言葉で言い換えているのに過ぎないが、制御ノットと1量子ビットユニタリー変換が自由に使えれば、ユニバーサルな量子コンピューターを作れることが知られている。量子テレポーテーションの重要さがわかるであろう。

5 連続量量子テレポーテーション

量子ビットテレポーテーション回路での議論は、すべて連続量にも当てはまる。その様子を見ていこう。連続量の量子テレポーテーション回路を図2に示す。

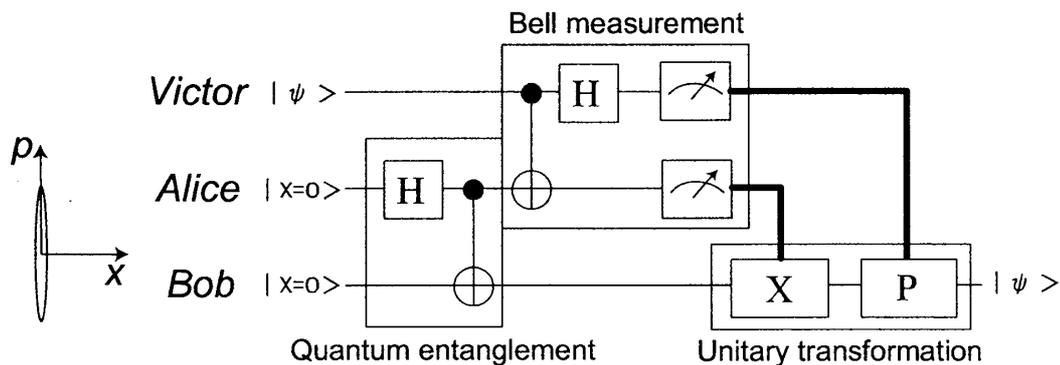


Figure 2: 連続量量子テレポーテーションの量子回路

まず、図2の Quantum entanglement について考えてみよう。連続量におけるアダマール変換は、 90° の位相シフトである¹¹。また、入力の $|0\rangle$ は、 $|x=0\rangle$ （演算子 \hat{x} の $x=0$ での固有状態、つまり x 方向に無限にスクイーズした状態）となる。「アダマール変換」を受けた $|x=0\rangle$ は、 $|p=0\rangle = \int dx |x\rangle$ となる。連続量での制御ノットは $|x, y\rangle$ を $|x, x+y\rangle$ に変換する。量子ビットの場合の排他的論理和が普通の和になっただけである。量子ビットの場合は、 $1 \oplus 1 = 0$ であり、普通の和とは大きく違うような気がするが、2というものが無いので0に戻っているだけであるから、連続量の場合普通の和にしてもそれほど違和感はないであろう。また、このような和はビームスプリッターによる重ね合わせと考え

¹⁰X、Zはそれぞれブロッホ球上でのX軸回りの 180° 回転、Z軸回りの 180° 回転である。

¹¹量子ビットでのアダマール変換は、ブロッホ球上での 90° の回転となっている。連続量ではハミルトニアン $\frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2)$ を用いる。

ても良い。従って、実験的には制御ノットはビームスプリッターに置き換えることができる¹²。

話を Quantum entanglement の部分に戻そう。「アダマール変換」を受けて $\int dx |x\rangle$ になった上のビット (モード) と $|x=0\rangle$ の間の「制御ノット」演算が行われる。明らかにその出力は次式のようになる。

$$\int dx |x, x+0\rangle = \int dx |x, x\rangle \quad (4)$$

つまり、完全な Einstein-Podolsky-Rosen(EPR) 状態 [6] になっている。また、蛇足であるが、 $\hat{x}_A - \hat{x}_B$ と $\hat{p}_A + \hat{p}_B$ の同時固有状態 (固有値: $x_A - x_B = 0$, $p_A + p_B = 0$, ベル基底の1つ) となっている。実験的にはこのように完璧なスクイズは得られないから完全な EPR 状態は得られないが、2つのスクイズされた真空場¹³を位相を直交させてビームスプリッターで重ね合わせるによりエンタングルした状態を生成できる様子がわかるであろう。

次に連続量での Bell measurement に話を移そう。先程述べたように、制御ノットは排他的論理和を普通の和 (実験的にはビームスプリッター) に、アダマール変換は 90° 位相シフトに置き換えれば良いだけなので、この測定は、ビームスプリッターで合わせて、直交位相成分を測定することになる。この場合、ベル測定結果は $\hat{x}_V - \hat{x}_A$ と $\hat{p}_V + \hat{p}_A$ の同時測定結果 (x_M, p_M) を与えることになり、量子ビットでの議論と同様、ベル測定により入力 $\hat{x}_V - \hat{x}_A$ と $\hat{p}_V + \hat{p}_A$ の同時固有状態 (固有値: $x_A - x_B = x_M$, $p_A + p_B = p_M$, ベル基底の1つ¹⁴) に射影され、モード V とモード A の間で完全な EPR 相関が形成される。

最後のユニタリー変換の部分も量子ビットの場合の X, Z の部分を x 方向、 p 方向へのディスプレースメント¹⁵と読み替えればそのまま使える。

連続量の量子情報処理では、 $|x\rangle$ を基底として用いるのに対し、量子ビットの系では $|0\rangle$, $|1\rangle$ を基底としている。アプローチは異なるように見えるが、やっていることはほとんど同じであることがわかる。また、実験的には連続量の方が遙かに有利で、古典限界を超えた精度 (フィデリティ) で図2の量子回路が実際に動いている [7, 8]。

6 量子テレポーテーションネットワーク

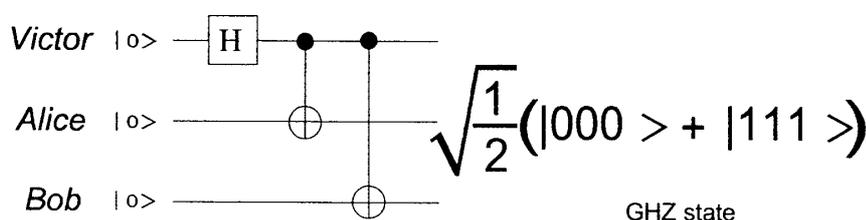


Figure 3: GHZ 状態生成の量子回路

¹²ユニバーサルな和の演算にはなっていないが、ここでは十分である。

¹³ハミルトニアン $\frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})$ を用いて生成する。

¹⁴ x_M, p_M の位相平面でのすべての点がそれぞれベル基底に対応している。したがって、ベル基底の数は無限個あり、無限次元すなわち連続量となっている。

¹⁵ハミルトニアン \hat{x}, \hat{p} を用いる。

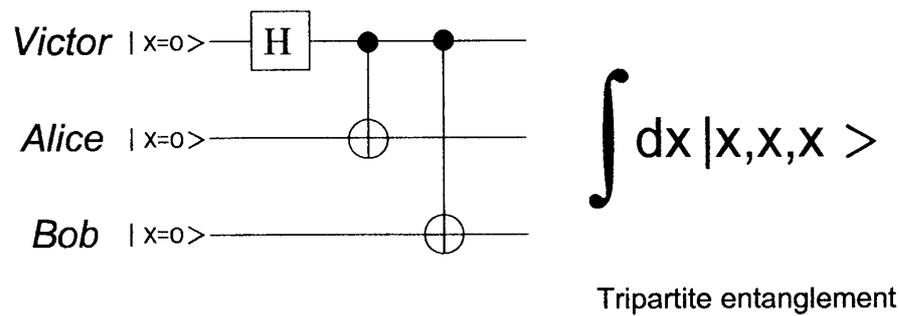


Figure 4: 3者間量子エンタングルメント生成の量子回路

ここまで述べてきたように、ハミルトニアン $\{\hat{x}, \hat{p}, \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2), \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\}$ とビームスプリッターだけでも、それなりに量子情報処理のエッセンスが味わえる。

ここではさらにもう少し複雑な量子回路にトライする。それは量子テレポーテーションネットワーク回路である。この量子回路は、グループ内の任意の2者間で量子テレポーテーションを可能にする回路であるが、特に3者のグループの場合、いわゆる Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 状態 [9] の連続量版 (3者間エンタングルメント) を生成する回路を含み非常に重要である。

量子ビットで GHZ 状態を生成する量子回路は図3のようになる。この量子回路をつくるのはとても難しい。例えば、量子光学を用い、かつポストセレクションにより生成することを考えると非常に非効率的である。生成確率が極端に低いからである。これに対し、連続量では比較的簡単に生成できる。その量子回路を図4に示す。量子ビットテレポーテーションから連続量テレポーテーションへの変換と同様、入力を $|0\rangle$ から $|x=0\rangle$ とし、アダマールゲートは 90° 位相シフトに読み替え、制御ノットは普通の和 (ビームスプリッター) にしただけである。

このようにして生成された状態においては、入力のスクイズが無限大でなくても、3者間でエンタングルメントが形成されている。したがって、ハミルトニアン $\{\hat{x}, \hat{p}, \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2), \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\}$ とビームスプリッターだけで、3者間エンタングルメントを生成できたことになる。筆者らはこの実験に成功した [10, 11]。

量子テレポーテーションネットワークの量子回路は、量子テレポーテーション回路と3者間量子エンタングルメント生成回路を組み合わせることで構成できる。この量子回路を図5に示す。キーとなる量子回路として、量子テレポーテーションと3者間量子エンタングルメント生成の量子回路が入っているのがわかる。この実験も筆者らの研究室で進展しつつある [12]。

7 まとめ

以上、連続量を中心にした量子情報処理について述べてきた。特に、現在実験が行われているハミルトニアン $\{\hat{x}, \hat{p}, \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2), \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\}$ とビームスプリッターだけを用いた量子情報処理として量子テレポーテーションを取り上げ、それについて詳しく述べた。もちろん、量子光学を用いたユニバーサルな連続量量子情報処理を可能とするには、3次以上の非線形光学効果が必要となる。今後は測定の持つ大きな「非線形性」なども大きな武器になるかもしれない。

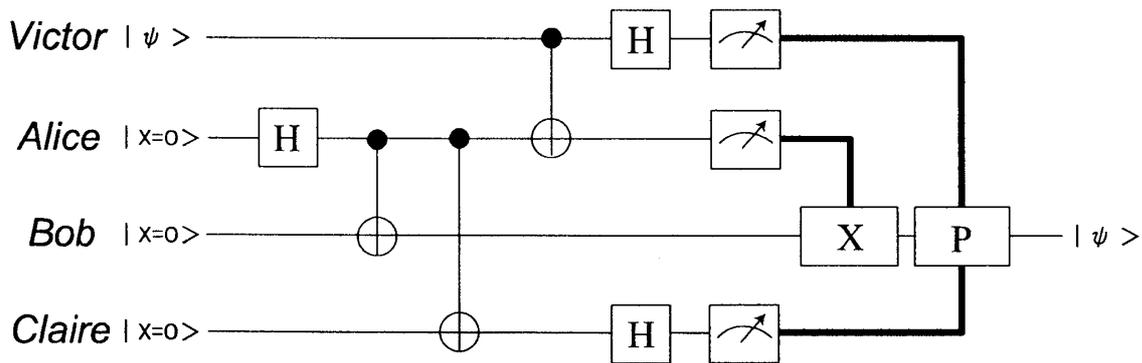


Figure 5: 量子テレポーテーションネットワークの量子回路。アリス、ボブ、クレアの3者において、クレアの助けを借りてアリスからボブへ量子テレポーテーションを行う量子回路。

現実の「古典」コンピューターにおいては、連続的な物理量（例えば、電圧）が閾値よりも上か下かで「勝手に」人間が0か1かに割り振っているだけで、決して元から2準位しかない物理量を用いているわけではない。したがって、古典コンピューターでは連続量をデジタルに置き換えたために生じるデジタル化エラーが必ず存在する。また、現実のコンピューターは、単精度や倍精度などの浮動小数点式コンピューターである。このように考えると、元から2準位しかない量子ビットのみから量子コンピューターを考えることは非常に危険で、連続量的な視点から見た「浮動小数点式量子コンピューター」も等しく研究していかなければならないと思われる。

謝辞

この研究の一部は文部科学省、総務省、光科学技術研究振興財団から助成を受けている。また、ここに示した結果は、青木隆朗博士をはじめとする東京大学大学院工学系研究科・物理工学専攻・古澤研究室所属メンバーの努力の賜物である。記して感謝したい。

References

- [1] S. Lloyd and S. L. Braunstein, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1784 (1999).
- [2] S. Lloyd, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 346 (1995).
- [3] D. Deutsch, A. Barenco, and A. Ekert, *Proc. R. Soc. Lond. A* **449**, 669 (1995).
- [4] G. Brassard, S. L. Braunstein, and R. Cleve, *Physica D* **120**, 43 (1998).
- [5] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge, (2000).
- [6] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [7] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, and E. S. Polzik, *Science* **282**, 706 (1998).

講義ノート

- [8] N. Takei, T. Aoki, S. Koike, K. Yoshino, K. Wakui, H. Yonezawa, T. Hiraoka, J. Mizuno, M. Takeoka, M. Ban, and A. Furusawa, LANL e-print quant-ph/0311056.
- [9] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, *Am. J. Phys.* **58**, 1131 (1990).
- [10] P. van Loock and A. Furusawa, *Phys. Rev.* **67**, 052315 (2003).
- [11] T. Aoki, N. Takei, H. Yonezawa, K. Wakui, T. Hiraoka, A. Furusawa, and P. van Loock, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080404 (2003).
- [12] H. Yonezawa, T. Aoki, and A. Furusawa, *Nature* **431**, 430 (2004).

転載について

本テキストのセクション4と5のほぼすべてとセクション6の一部は、光学 **33**,278(2004)からの転載である。転載許可を頂いた日本光学会には、この場を借りて感謝を述べたい。