Bussei Kenkyu

物性研究　84－4（2005－7）

アインシュタインと非線形の世界

長崎総合科学大学新技術創成研究所　武野 正三

(2005年5月24日受理)

I. 緒言、国際物理年、動機

2005年はアインシュタインが1905年に記念碑的な論文を公表してから100年目に当り、このことを記念してWorld Year of Physics (WYP)という名称で世界各国でいろいろな記念事業が計画され、行なわれることは周知の通りである。アインシュタインはこの年の僅か8ヶ月余の間に(a)光電効果、(b)ブラウン運動、(c)相対性理論という3つの異なった領域に亘って5つの論文[1－5]を公表している。この仕事によってアインシュタインは光が波動のみならず粒子的側面を持っていることを示し[1]、原子の存在の基礎を築き[2,3]、我々の時空に対する見方を変えた[4]ことは周知のことであるが、その偉大さは、これらの結果が膨大な費用を使った実験や難しい数学理論の所産ではなく、深い考察・思索と直感によって生まれたものであるということである。また、当時誰も持っていなかったこの深い思索が我々の自然に対する認識を変えることを世界に示したことである。そこには純粋な学問的動機のみがあり、今日の競争の原理というようなものは全く無かったであろう。この仕事は彼の本業（特許庁の業務）の傍ら成し遂げられたということも特筆すべきであろう。其の他著しいことは、(a)この年に彼は学位論文[2]を提出しているが、それは溶液のなかの分子の運動を調べてアボガドロ数を求め分子の大きさを計算するというものであったこと、(b)特殊相対性理論の論文[4]にはreferenceが一つもなく、その題名は相対性理論を連想させるようなものではなかったこと、(c)その年の最後の論文[5]では科学上最も有名な式と世間でも認めている所謂$E = mc^2$が3ページの論文に収められていること等である。

2004年春、1954年(昭和29年)京大理学部物理卒の同窓会（黄檗一期会）があったが、そのときWYPに対して黄檗会としても何かやろうという提案があった。その趣旨は黄檗会のＨＰを作り、各自がアインシュタインの仕事について物理を専門にしない一般の人達にも分るような解説をそれに掲載するというものであった。そのとき、私は「アインシュタインと非線形の世界」という題目で解説を行うことを考えていた。然し、残念ながら、

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

この提案は不発に終わった。この提案を何か別の形で生かすことが考えられるが、既に中原紀は「電子材料」という雑誌に「アインシュタインと半導体産業」という題目で独自の随想風の解説を行っている[6]。私は上記題目で一般向けの解説を行う適当な場を直ぐには思い付かなかった。そこで、今回は、WYPの精神には若干反するが、考察を「物性研究」に投稿することにした。WYPを迎えてアインシュタインに関する記事が日本を含めて世界各国でいろいろ紹介されている。そのなかで、21世紀を見据えた最近の記事の一つとして2004年9月に発行された「Beyond Einstein」というScientific Americanの特集号を挙げておく。黄檗会の影響を受けて思いもかけずこの論説を書くことになったが、そこで過去、現在のアインシュタインに関する多くの文献・資料等を渉猟して業績についてそれを自己流に纏めて紹介することは私には余り意味のあることとは思われなかった。そこで、当然片寄った一方的なものとなるが、アインシュタインの仕事と自分が此迄研究を行って来た非線形の問題との係わり合いを回想や興味ある記事の紹介も少し交えて論ずることにした。

1950-1954年の学部学生の頃はアインシュタインの仕事といえば先ず相対性理論が想起されたが、当時日本では一般相対性理論は物理の極く一部の研究者や微分幾何学等の分野の数学者の興味の対象ではあっても物理屋の主要な研究題目の一つとなることはなかった。現在は当時と情勢が変り、アインシュタインの業績が物理屋のみならず、一般読者・聴衆に対してよく解説されている。そして、それは多くの場合、特殊・一般相対性理論、宇宙論、ブラックホール、統一場等に関する壮大な話題が主であるように思われる。然し、アインシュタインの数多くの研究成果は現代テクノロジーに対しても,また我々の日常生活においても、大きなインパクトを与え深く浸透しているということはもっと語られてもよいと思っている。また、ブラウン運動の理論に端を発する確率微分方程式は近代経済学等の分野で重要な課題となっていることも注目されるべき例の一つであろう。そしてこのことはWYPの基本精神にも沿っていると思われる。

以下II.では重力場の方程式とソリトン、III.ではカオス等複雑な運動をする力学系の量子化に関連した非線形完全格子における局在モードとその量子化、IV.ではphotonic crystalにおける非線形モード、V.ではoptical lattice (周期場を付加されたBose-Einstein凝縮体）における非線形モードという４つの問題を取り上げる。そのなかで、photonic crystal、optical latticeは理論屋からみて興味深い格好の非線形の舞台となっているが、これらは本来実験物理が主体の場であり、新しいテクノロジーへの発展の可能性が期待されている。

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

II. 軸対称重力場の方程式と Heisenberg のスピンモデル

非線形といえば先ず非線形方程式、ソリトン、カオス等が連想される。そのなかで可積分系を主な対象とするソリトンの問題が若し一般相対性理論に関連することがあればソリトン問題の研究者にとってそれはこの上もないことであろう。このようなこととも若干関連するが、昔興味を持ったことは、ソリトン方程式は流体力学、プラズマ物理学、数理物理学、物性物理のみならず、生物物理から原子核論、場の理論、一般相対性理論等まで物理の広い範囲に現れているということであった。つまり、ソリトンの物理をやっていると物理の殆ど総ての領域の上面を横断的になで斬りすることが出来るのではないかということであった。

一般相対性理論にアインシュタインの重力場の方程式 [7] があるが、それは抽象的且つ簡潔な形に表されたテンソル方程式であり、ソリトンの研究者がそれに関して何か仕事をするためには一般相対性理論の素養を必要とする。然し、軸対称重力場に対して formulate された Ernst 方程式 [8]

$$(\xi\xi^* - 1)\triangle\xi = 2\xi^*(\nabla\xi)^2, \qquad (\mathrm{Re}\ \epsilon)\triangle\epsilon = (\nabla\epsilon)^2 \tag{1}$$

は、数学的にも良い形をしているように思われる非線形偏微分方程式であり、ソリトンの研究者には一般相対性理論の勉強をしなくても取り組める式であった。ここで複素ポテンシャル ξ, ϵ の間には

$$\epsilon = f + i\psi = (\xi - 1)/(\xi + 1) \tag{2}$$

の関係があり f, ψ は以下の式を満たす

$$f\triangle f - (\nabla f)^2 = -(\nabla\psi)^2, \quad \nabla\cdot(f^{-2}\nabla\psi) = 0. \tag{3}$$

日本ではこの軸対称重力場の方程式に対して Tomimatsu-Sato の厳密解 [9] があることが知られていたが、一時期 Ernst 方程式に対して逆散乱理論 [10]、広田の方法 [11] 等を適用した研究が行われた。

その頃、私は共同研究者とともに磁性の問題における Heisenberg model

$$H = -\sum_{\vec{n}\vec{m}} J(\vec{n},\vec{m})\vec{\mathbf{S}}_{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{S}}_{\mathbf{m}} \tag{4}$$

の古典版のソリトン的な非線形モードの存在を調べていた [12]。古典スピンベクトル $\vec{S}_{\vec{n}} = (S^x_{\vec{n}}, S^y_{\vec{n}}, S^z_{\vec{n}})$ をスピンの大きさを S として回転角 $\theta_{\vec{n}}, \varphi_{\vec{n}}$ を用いて以下の形

$$S^x_{\vec{n}} = S\sin(\theta_{\vec{n}})\cos(\varphi_{\vec{n}}), \quad S^y_{\vec{n}} = S\sin(\theta_{\vec{n}})\sin(\varphi_{\vec{n}}), \quad S^z_{\vec{n}} = S\cos(\theta_{\vec{n}}) \tag{5}$$

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

に表すとスピンの運動方程式は連続体近似の下で

$$\dot{\theta} = -J_S(0)(2\cos(\theta)\nabla\theta\cdot\nabla\varphi + \sin(\theta)\triangle\varphi),$$
$$\sin(\theta)\dot{\varphi} = J_S(0)\Big(\triangle\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)(\nabla\varphi)^2\Big) \tag{6}$$

となる。此処に

$$J_S(\vec{q}) = \sum_{\vec{m}} 2SJ(\vec{n},\vec{m})\exp[i\vec{q}\cdot(\vec{m}-\vec{n})] \tag{7}$$

である。定常な場合、即ち $\dot{\theta}_{\vec{n}} = \dot{\varphi}_{\vec{n}} = 0$ の場合上の式は

$$2\cos(\theta)\nabla\theta\cdot\nabla\varphi + \sin(\theta)\triangle\varphi = 0, \quad \triangle\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)(\nabla\varphi)^2 = 0 \tag{8}$$

となり、そのとき

$$\mu = \tan(\theta/2)\exp(i\varphi) \tag{9}$$

で定義される複素ポテンシャルの満たす式は Ernst 方程式と類似の形

$$(\mu\mu^* + 1)\triangle\mu = 2\mu^*(\nabla\mu)^2 \tag{10}$$

を取る。Ernst 方程式と古典的 Heisenberg model の式の類似性は Ernst ポテンシャル ξ を

$$\xi = \coth(\theta/2)\exp(i\varphi) \tag{11}$$

の形に parametrize したときの式

$$2\cosh(\theta)\nabla\theta\cdot\nabla\varphi + \sinh(\theta)\triangle\varphi = 0, \quad \triangle\theta - \sinh(\theta)\cosh(\theta)(\nabla\varphi)^2 = 0 \tag{12}$$

と (8) 式を比べてみても明らかである。私は古典的 Heisenberg model におけるソリトン的非線形モードの解から、Painlevé 方程式 [13] の解と関連付けられる Ernst 方程式の解を得たが（具体形は省略)、それは数学的に興味はあるかも知れないが、相対論的に意味のあるものとはならなかった。その後、このようなソリトンの問題におけるアナロジーを用いたアプローチは、それで論文を書くことは出来ても、私の場合落穂拾い的で自分独自の研究は出来そうにないことに気付き、止めることにした。Ernst 方程式を含むアインシュタイン方程式のソリトン的解の研究は現在も続けられているようである。尚、(6) 式は SU(2)-coherent state 表示と関連があり、超流動を含めた流体力学の方程式との類似性を持っている。Heisenberg スピンモデルで記述される系のコヒーレントな状態が実現された場合、そのソリトン的解は物理的にも興味あるものとなるかも知れない。

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

III. 非可積分系の量子化と Intrinsic localized mode (ILM)

非線形格子振動の問題をやっていたとき何時も思ったことは、物理の各方面に現れる調和振動子の量子化は量子力学のなかでも最も典型的なものの一つであり理論的にもすっきりしているが、これが非線形振動になると、問題が途端に曖昧なものとなってどうしてよいか分らないということであった。その後、アインシュタインが1917年に「Quantensatz von Sommerfeld und Epstein] という題名の論文 [14] を発表していて、それはこのことに関係していることが分った。この論文の内容を自己流に分り易く言えば、Bohr の原子模型や Sommerfeld の量子化の例に見られるように、円軌道や楕円軌道（図1）、あるいはもっと一般的に閉じた周期的な軌道を持つ力学系ではその量子化は可能であるが、図2のように非常に複雑で閉じない軌道

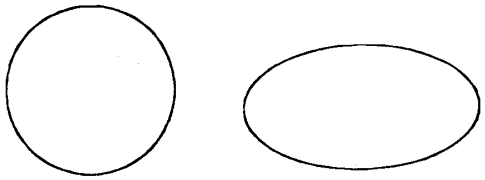

図1. 円軌道、楕円軌道

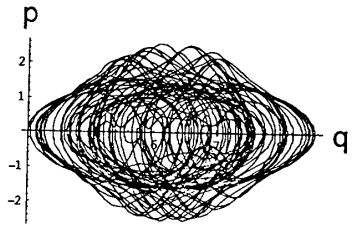

図2. 複雑な（非線形）運動の軌道

を持つ運動の量子化はどのようにしてやればよいだろうか、或いはそれは不可能ではないだろうかという問いかけである。

周知のように、Bohr-Sommerfeld の量子化の条件は

$$\int pdq = nh \quad 1\text{ 自由度}, \quad \int p_i dq_i = n_i h \quad \text{多自由度、変数分離可能}, \tag{13}$$

$$\sum_i \int p_i dq_i = nh \quad \text{それ以外} \tag{14}$$

で表される。アインシュタインは位相空間における線積分を用いて座標によらない量子化の条件を調べ、位相空間で不変トーラスというものが存在しない力学系の量子化は不可能であると考えた。当時この論文は全くオリジナルなものであった。Gutzwiller はアインシュタインの論文は発表以来４０年程の間全く無視されていたと述べている [15] が、1924年に de Broglie は彼の学位論文でアインシュタインのこの方法を用いたという記事がある。アインシュタインの考察は今日の chaotic な系の量子化に関するもので、このよ

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

うな意味でEinsteinはカオスの分野でも先駆者の一人とみなしてもよいであろう。自然界の複雑な運動の根底にはubiquitousな非線形性があり、運動の問題で解析的に解けず予測が困難なものは無数にあると考えられる。非線形力学と線形構造的な量子力学は互いに相容れず、非線形力学系の量子化は現代物理で最も基本的な課題の一つではないかと考えている。

筆者は最近intrinsic localized mode (ILM) とそれに関連する 問題の研究を行なっている[16]。ILMは完全（周期）格子に系固有の非線形性がある場合生ずる局在状態である。完全格子には伝播波のみが存在するということは固体論のBlochの定理[17]で記述され、局在状態はそれに不純物や格子欠陥をドープしたときに生ずるということは物性論の常識であるが、それは線形の場のみに成り立つ。非線形性と空間構造の離散性により完全格子において何故局在モードが生ずるかということは、例えば、以下のように理解される。結晶、或いは周期格子では、線形の場合、Bragg散乱により波動の領域に許容帯と禁止帯が存在するが (図3)、格子に非線形性が存在するとこのselection ruleが破れ、禁止帯に固有状態が存在することが出来る。例えば、正の符号の非線形性が存在する場合、それは振動帯を構成する各振動レベルを正の向きにシフトさせる。シフトのオーダーは1/N (N: 原子の総数) であるが、最高位の振動レベルのシフトは有限であって、それは線形格子の禁止帯にシフトする。その模式的な様子を図4に示す。

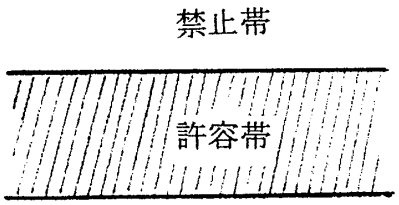

図3. 振動状態の許容帯と禁止帯

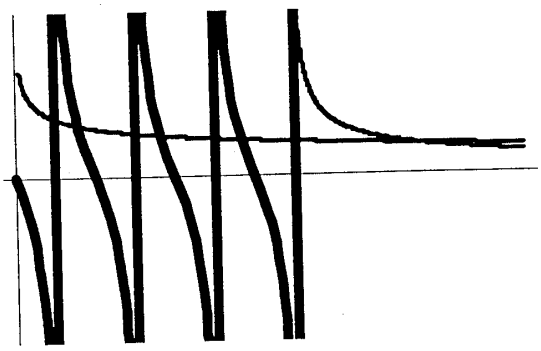

図4. 振動準位の非線形性によるシフト

その領域は元来禁止された状態であるから、原子は隣の原子との繋がりを絶たれその振動状態は空間的に局在せざるを得ないというものである。非線形モードとしてのILMをソリトンと比べてみると、後者は可積分系を対象とするが、ILMは現実の非可積分系、即ち、解析的には厳密に解けない系を考えている。現実の系におけるILMを観測しようとするとき、あるいは純理論的興味から、ILMにはどのような量子効果があるだろうか、（非可積分系における）ILMの量子化は可能だろうかという問いかけが起こる。これは1917年に アインシュタインが考えた問題に繋がると思われる。後に示すように、ILMは、あ

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

る意味において、離散・周期・非線形構造を持つ非可積分系における well-defined mode と見なすことができるから、その量子化は、出来るとすれば、アインシュタインが考えた力学系一般の場合より容易で あろうと予測される。

尚、以下では photonic crystal における ILM も考察するが、そこでは実験研究と対応して、半導体の場合と同様、不純物による局在状態も取り上げる。ILM の問題には不純物を含む固体における局在振動モードの研究の長い pre-history がある。不純物を含む格子の運動方程式は on-site ポテンシャルがある非線形完全格子の運動方程式と類似の形をしており、ILM の存在は早い段階で気付かれる筈であった。然し、実際の研究が始められたのはそれより 20-30 年後のことであった。ILM の研究は当初 1 次元の格子力学、モデル計算、数理物理学等の領域に止まっていたが、その後、固体における ILM が実験的に観測され、さらに、高温超伝導体のジョセフソン効果、photonic crystal, optical lattice、 DNA における local open state 等の具体的な問題とテクノロジーへの応用に進展している [18]。

ILM がどのようなものか, その性質を図を交えて具体的に例示するために次の方程式で記述される 1 次元非線形格子を考える

$$\ddot{u_n} = J_2[u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n] + J_4\Big[(u_{n+1} - u_n)^3 - (u_n - u_{n-1})^3\Big]. \tag{15}$$

$J_2 > 0, J_4 > 0$ は定数である。$N = 100$(N は原子の総数）のモデル非線形格子に対して (15) 式を数値的に解いた。その際 $n = 50, 51$ の原子の初期速度を、夫々、$v_0, -v_0$ とし、初期の位置はゼロとした。また $n = 50, 51$ 以外の位置にある総ての原子の初期の位置と初期速度はゼロとおいた。このような初期条件で上の式を解いて、この力学系の長時間振舞における総ての原子の space-time evolution と $n = 50, 45$ の位置にある原子の位相空間の軌道を、夫々、図 5, 図 6a, 6b に示した。

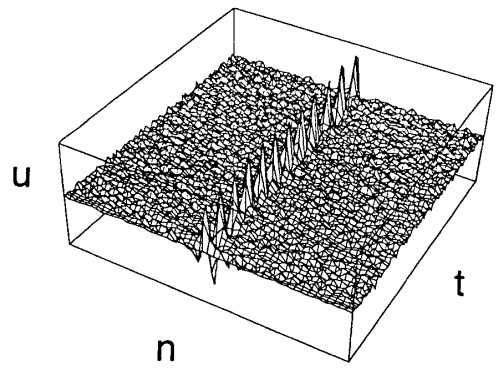

図 5. space-time evolution

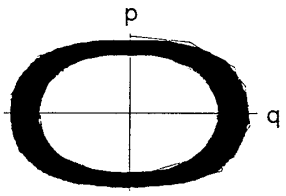

図 6a. ILM の軌道

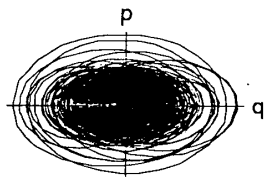

図 6b. 一般の原子の軌道

v_0 の値がある程度大きくなったときこの力学系の $n = 50, 51$ の場所の振動が局在する。

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

図6bは格子点 $n=45$ にある原子は複雑 (それ以外の原子も同様) な運動をするが、図6aはILMが存在する $n=50$ の原子の軌道は調和振動子的であることを示している。この意味でILMはwell-defined modeといって良いであろう。(15) 式で $v_n=u_{n+1}-u_n$ という新しい従属変数を導入すると、それとは少し別の形の非線形微差分方程式が得られる。このことを用いると、(15) 式のILMには、strong localization limitで、図7に示されるs型とp型の二つのタイプがあることを示すことが出来る。

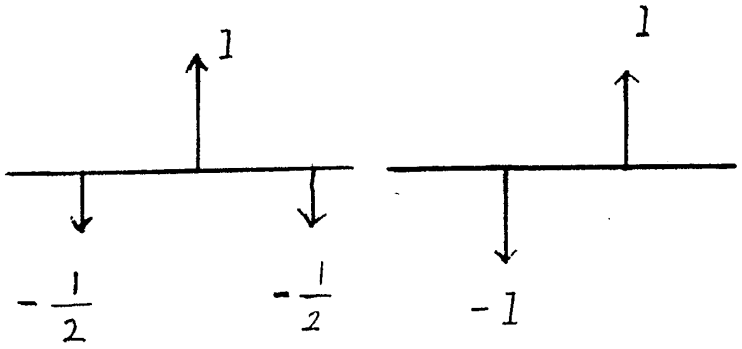

図7. s型 p型

上では4次の非線形性を持つ1次元格子を考えたが、一般の非線形格子におけるILMの存在はおよそ以下のようにして理解出来る [19]。任意次元の任意の非線形格子を考察する。格子点 $\vec{n}$ における原子 n の平衡の位置 $\vec{R}_n$ からの変位 $\vec{u}(\vec{n})$ の α-成分を $u_\alpha(\vec{n})\equiv u(x); x=(\vec{n},\alpha)$ とし, それにはたらく力を $F(\{u(x)\},\{u(x')\}$ とすると

$$\ddot{u}(x)=-\sum_{x'}J(\{u(x)\},\{u(x')\})\equiv-\sum_{x'}J_2(x,x')u(x')-\sum_{x'}J'(\{u(x)\},\{u(x')\}) \qquad (16)$$

が得られる。$J_2(x,x'), J'(\{u(x)\},\{u(x')\})$ は、それぞれ、原子の質量で割った、線形のバネ定数、非線形のバネ定数である。この式のILM解は, 定常モードの場合には以下のように一般的に求められる。即ち

$$u(x)\equiv u(x,t)=\phi_0(x,t)+2\sum_{\ell=1}^{\infty}\phi_\ell(x)\cos(\ell\omega t) \qquad (17)$$

とおき $\phi_\ell(x)$ は時間に依らないとしてそれを上の運動方程式に代入し両辺の $\cos(\omega t)$ の等しい次数を比較すると以下の式が得られる、

$$\sum_{x_1}J_2(x,x_1)\phi_\ell(x_1)+\sum_{x_1x_2}J_3(x_1,x_2,x_3)U_{\ell 3}(\{\phi\})+\sum_{x_1x_2x_3}J_4(x_1,x_2,x_3,x_4)U_{\ell 4}(\{\phi\})+\ldots$$
$$=(\ell\omega)^2\phi_\ell(x),\quad \ell=0,1,2,3,\ldots\ldots . \qquad (18)$$

J_3, J_4 は3次、4次の非線形ポテンシャルから導かれる (質量で割った) バネ定数、$U_{\ell 3}(\{\phi\})$, $U_{\ell 4}(\{\phi\})$ 等は $\phi_\ell(x)$ の組の関数である。此処で線形格子を reference system と見做し、

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

dynamical matrix $J_2 = (J_2(x,x'))$ の固有値問題

$$\sum_{x_1} J_2(x,x_1)\varphi_\mu(x_1) = \omega(\mu)^2\varphi_\mu(x),$$
$$\sum_{\mu} \varphi_\mu(x)\varphi_\mu(x')^* = \Delta(x,x') \quad \sum_{x} \varphi_\mu(x)\varphi_\nu(x)^* = \Delta(\mu,\nu) \tag{19}$$

の固有値 $\omega(\mu)^2$、固有関数 $\varphi_\mu(x)$ から作られる格子グリーン関数

$$g(x,x';\omega) = \sum_{\mu} \frac{\varphi_\mu(x)\varphi_\mu(x')^*}{\omega^2 - \omega(\mu)^2}, \tag{20}$$

を導入する。ここで、格子グリーン関数 $g(x.x';\omega)$ は一般に ω が振動数帯 $\omega(\mu)$ の外にあるとき、$|x-x'|$ の単調減少関数となるという性質を用いる。この格子グリーン関数 g を導入すると (18) 式は以下の形

$$\phi_\ell = \sum_{x'} g(x,x';\ell\omega)V_\ell(\{\phi\}), \tag{21}$$

$$V_\ell(\{\phi\}) = \sum_{x_1x_2} J_3(x_1,x_2,x_3)U_{\ell 3}(\{\phi\}) + \sum_{x_1x_2x_3} J_4(x_1,x_2,x_3,4)U_{\ell 4}(\{\phi\}) + ... \tag{22}$$

に reduce される。そして、上記の性質を用いるとこの系に任意個数の ILM が存在することを示すことが出来る。完全非線形格子の ILM と線形格子における不純物、格子欠陥等により生じた局在状態との基本的な相違は、前者が任意の格子点に自発的に発生するのに対して後者は不純物、格子欠陥の位置のみに発生するということである。また、この方法を用いて $\phi_0(x), \phi_2(x), \phi_3(x), ...$ を $\phi_1(x)$ で表し、$J_2 > J_3, J_4, ...$ のとき $\phi_1 > \phi_0$, $\phi_1 >> \phi_2, \phi_3, ...$ の関係が成り立つことを示すことが出来る。例えば、次の関係：$\phi_\ell(x) \approx (c_\ell/\ell^2)\phi_1(x)$, $c_\ell < 1$, $\ell = 2,3,...$; c_ℓ : 定数 がある。(17) 式において $\ell = 1$ の項のみをとり、それ以外の高次の項を総て無視する近似を回転波近似 (RWA) という。数学的な証明はないが、heuristic な RWA から得られる結果は多くの非線形格子における ILM の数値実験の結果と可成よく一致している。その理由は、そこでは相殺の効果がはたらいるのかもしれない。

RWA の下での ILM 量子化を考える。簡単のために、4 次の非線形性のみが存在する場合にはなしを限り、(18) 式を考える。その場合、$\ell = 0,2,3,...$ の項とともに $\phi_0(x)$, $J_3(x_1,x_2,x_3), ...$ の項はなく、$\phi_1(x), J_2(x_1,x_2), J_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$ のみが存在することに着目する。この考察の下に (18) 式を以下の有効線形固有値方程式に還元する [20]。

$$\sum_{x_1}\left[J_2(x,x_1) + \sum_{x_2,x_3}\tilde{J}_4(x,x_1,x_2,x_3)\gamma(x_2,x_3)\right]\phi(x_1), = \omega^2\phi(x);\ \gamma(x,x') =< \phi(x)\phi(x') >, \tag{23}$$

ここで $\phi_1(x)$ を改めて $\phi(x)$ と書き

$$\tilde{J}_4(x,x_1,x_2,x_3) = [J_4(x,x_1,x_2,x_3) + J_4(x,x_2,x_1,x_3) + J_4(x,x_3,x_2,x_1)]; \tag{24}$$

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

と置いた。平均操作 $< .. >$ は後で self-consistent に決められる。これより、有効 dynamical matrix $D(x,x_1) = J_2(x,x_1) + \sum_{x_2,x_3} \tilde{J}_4(x,x_1,x_2,x_3)\gamma(x_2,x_3)$ とそれより得られる有効線形固有値方程式

$$\sum_{x_1} D(x,x_1)\psi_\mu(x_1) = \Omega_\mu^2 \psi_\mu(x);\ \sum_\mu \psi_\mu^*(x)\psi_\mu(x') = \Delta(x,x'),\quad \sum_x \psi_\mu^*(x)\psi_{\mu'}(x) = \Delta(\mu,\mu') \tag{25}$$

が導かれる。固有値方程式 (25) には有効 Hamiltonian

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\sum_x [\tilde{p}(x)]^2 + \frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2} D(x_1,x_2)\tilde{v}(x_1)\tilde{v}(x_2),\quad \tilde{p}(x) = \dot{\tilde{v}}(x) \tag{26}$$

が付随している。正準共役座標 $\tilde{p}(x) = \sum_\mu p_\mu \psi_\mu, \tilde{v}(x) = \sum_\mu q_\mu \psi_\mu$ を導入し、有効 Hamiltonian H_{eff} を以下の形に表す

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\sum_\mu \left[p_\mu p_\mu^* + \Omega_\mu^2 q_\mu q_\mu^*\right]. \tag{27}$$

量子化は消滅、生成演算子 $a_\mu, a_\mu^\dagger$ を次のように

$$\hat{q}_\mu = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega(\mu)}}(\hat{a}_\mu + \hat{a}_\mu^\dagger),\quad \hat{p}_\mu = \sqrt{\frac{\hbar\Omega(\mu)}{2}}\frac{1}{i}(\hat{a}_\mu - \hat{a}_\mu^\dagger), \tag{28}$$

導入して (q_μ) と (p_μ) を c-数から関係式 $[\hat{p}_\mu, \hat{q}_{\mu'}] = -i\hbar\delta_{\mu,\mu'},\ [\hat{p}_\mu, \hat{p}_{\mu'}] = [\hat{q}_\mu, \hat{q}_{\mu'}] = 0$ を満たす q-数 $(\hat{q}_\mu)$、$(\hat{p}_\mu)$ に移行させることによって以下のように得られる。

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_\mu \hbar\Omega(\mu)\left[\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu + \frac{1}{2}\right]. \tag{29}$$

上の式の取扱いの簡単な例として座標 x_0 にある原子が自発的に大振幅の振動運動をし、その周りのすべての原子は小振幅の振動運動をしている場合を考えると

$$< \phi(x_0)^2 > >> < \phi(x)^2 > \quad \text{for}\ \ x \neq x_0. \tag{30}$$

の関係が成り立つ。multi-ILM problem として、ILM が位置 $x_{0j}, j = 1,2,...$ にある場合は

$$< \phi(x_{0j})^2 >>>< \phi(x)^2 > \quad \text{for}\ \ x \neq x_{0j}. \tag{31}$$

の関係が得られる。単一の ILM の場合 $< .... >$ として以下の二つの場合を考える

$$< \phi(x_0)^2 >= \begin{cases} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \phi(x_0,t)^2 dt & \text{long time average} \\ \text{Tr}\left[\phi(x_0,t)^2 e^{-\beta\hat{H}}\right]/\text{Tr}\left[e^{-\beta\hat{H}}\right] & \text{thermal average} \end{cases} \tag{32}$$

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

此処で、$\beta = 1/k_BT$であり, k_B と T は夫々Boltzmann 定数、絶対温度である。ILMが現れる興味ある状況は系が非平衡にある場合である。このときは上の始めの式を用いる。(17) 式をこの式に代入するとき、偶数次の非線形項のみの場合第1項はなく, またその式で$\ell = 1$の場合を考えているから以下の式が得られる。

$$< \phi(x_0)^2 >= \phi_1(x_0)^2 = (\text{ILMの振幅})^2 \tag{33}$$

ILMの固有振動数は振幅に依存するが、理論的取り扱いではパラメーターと見なしてよい。実験によってILMが生成される場合、振幅は実験状況によって決まる。

IV. photonic crystal、局在モード と現代テクノロジー

1905年にアインシュタインは特殊相対性理論 [4, 5]、ブラウン運動の論文 [2, 3] ともに光電効果の論文 [1] を発表し、そのことに関する業績でノーベル賞が授与されたことは周知の通りである。近年光の科学・技術の急速な発展は光電効果の重要性を一段と認識させるものとなっている。web 記事では 1905 年のアインシュタインの論文で真に革命的なものは光電効果の論文であるという論説が現れている。アインシュタインの提唱したphotonの概念は物理学のみならず、化学、生物学、医学等自然科学の殆どの総ての分野に影響を与えたが、テクノロジーの分野でもそれは深く浸透し広く応用されていることは周知の通りである。多種多様な感光製品、センサー装置、情報記録，情報通信，太陽電池、加工，医療分野等はその例である。

20 世紀のテクノロジーの発展に大きく寄与し、我々の生活に便宜を齎したたものの一つは半導体テクノロジーであった。「21 世紀は光の世紀」と言われているが、その推進役の一つとなる可能性を秘めているものがphotonic crystalである。それはある種の誘電体を加工してphotonに半導体に於ける電子と同じ役割を持たせようとする人工の結晶である。photonic crystalの概念が提唱されたのは1987年のことであるが [21, 22]、近年実験技術の進歩によってそれは科学·技術の両面で一層興味深いものになっている。テクノロジーの面ではphotonic crystalの資料作成とその機能発現等が最も重要な問題であるが, 野田等の先端的な研究が注目されている [23]。ここでは理論屋からみてphotonic crystalは局在モードの概念が適用される格好の舞台となっていることを述べ、photon trapping, 光回路に少しふれることにする。

photonic crystalは誘電的に不活性な媒質 (固体) に誘電的に活性な誘電体を周期的に配列することにより作られる。その結果、このなかの電磁波は結晶の周期場により Bragg 散乱を受け、固体電子論における電子の場合と同様に、photonのバンド、即ちphotonic bandが形成される。半導体の場合には不純物をドープすることにより電子の donor, acceptor 準位が形成されるが、photonic crystalの場合には (a) 不純物、あるいは defect がある場

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

合の外に、(b) 系に固有な非線形性がある場合に photon の局在状態が生ずる。

簡単のために、z 方向に棒状の誘電体を周期的に配列した場合を考えると (図 8)、この系の (x,y) 面は 2 次元の photonic crystal を形成する。電場 $\vec{E}(\vec{r},t)$ を $\vec{E}(\vec{r},t)=(0,0,E(\vec{r},t))$ の形にとり、$c=1$ となる単位系を導入すると、(x,y)-面上を伝播する電場 $E(\vec{r},t)\equiv E(x,y,t)$ は以下の Maxwell 方程式で記述される。

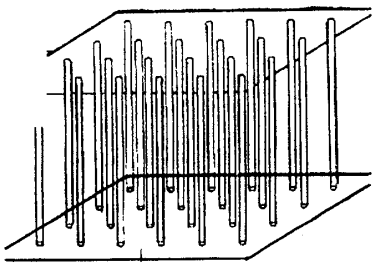

図 8. 2 次元 photonic crystal の模式図

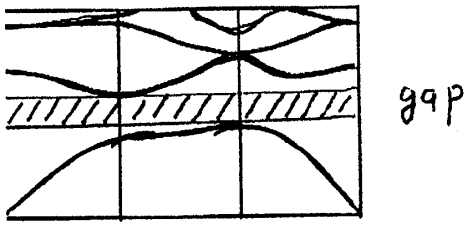

図 9. photonic band の模式図

$$\triangle_2 E(\vec{r},t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\epsilon(\vec{r})E(\vec{r},t)]=0,\quad \triangle_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{34}$$

$\epsilon(\vec{r})\equiv\epsilon(x,y)$ は誘電関数である。光が振動数 ω の単色光の場合、以下の形

$$E(\vec{r},t)=\exp(-i\omega t)\phi(\vec{r},\omega),\qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}<<\omega\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{35}$$

を仮定して上の式に代入すると

$$\left[-\triangle_2-\omega^2\epsilon(\vec{r})\right]\phi=i2\omega\epsilon(\vec{r})\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{36}$$

が得られる。いま、誘電関数 $\epsilon(\vec{r})$ は線形で座標の周期関数である部分 $\epsilon_{\rm p}(\vec{r})$ と非線形、または非周期的な部分 $\epsilon'(\vec{r})$ （非線形の場合 $\epsilon'(\vec{r})\equiv\epsilon'(\vec{r},|\phi|)$) から成っているものとする。即ち

$$\epsilon(\vec{r})=\epsilon_{\rm p}(\vec{r})+\epsilon'(\vec{r})\ \ \text{with}\ \ \epsilon_{\rm p}(\vec{r})=\epsilon_{\rm p}(\vec{r}+\vec{R}),\qquad \vec{R}=n_1\vec{a}_1+n_2\vec{a}_2\equiv\vec{R}(\vec{n}), \tag{37}$$

$\vec{R}$ は 2 次元の格子ベクトル、$\vec{a}_1,\vec{a}_2$ はこの格子を特性付ける単位胞の基本ベクトル,n_1,n_2 は整数である。(36) 式は以下の形に書き直すことが出来る。

$$[-\triangle_2+V_{\rm P}(\vec{r})]\phi=\omega^2\epsilon'(\vec{r})\phi+i2\omega\epsilon(\vec{r})\frac{\partial\phi}{\partial t},\quad V_{\rm P}(\vec{r})=-\omega^2\epsilon_{\rm P}. \tag{38}$$

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

演算子

$$[-\Delta_2 + V_{\rm P}(\vec{r})]\phi \tag{39}$$

の固有値 $\omega_\alpha(\vec{k})^2$, 固有関数 $\varphi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r})$ は、夫々、photonic band, Bloch function である。$\vec{k}, \alpha$ は、夫々、波数ベクトル、band index である。2次元 正方格子の場合の photonic band を図9に示す。

$\epsilon_{\rm p}(\vec{r})$ は既知として、$\epsilon(\vec{r})$ の $\epsilon_{\rm p}(\vec{r})$ からのずれ,$\epsilon'(\vec{r})$ が系固有 の非線形性による場合と不純物の存在による場合とを個別に取り扱う。

(1) 非線形性による場合

誘電関数を以下の形に表すと

$$\epsilon_{\rm P}(\vec{r}) = \sum_{\vec{n}} \epsilon_{1\rm P}(\vec{r} - \vec{n}), \quad \epsilon'(\vec{r}) = \sum_{\vec{\ell}} \epsilon'_1(\vec{r} - \vec{\ell}, |\phi(\vec{r})|), \tag{40}$$

(38) 式は

$$\begin{aligned}[-\Delta_2 + V_{\rm P}(\vec{r})]\phi(\vec{r}) &= \omega^2 \sum_{\vec{\ell}} \epsilon'_1(\vec{r} - \vec{\ell}, |\phi(\vec{r})|)\phi(\vec{r}) \\ &+ i2\omega \left[\sum_{\vec{n}} \epsilon_{1\rm P}(\vec{r} - \vec{n}) + \sum_{\vec{\ell}} \epsilon'_1(\vec{r} - \vec{\ell}, |\phi(\vec{r})|)\right] \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial t}.\end{aligned} \tag{41}$$

となる。ここで、$\epsilon_{1\rm P}(\vec{r} - \vec{n}), \epsilon'_1(\vec{r} - \vec{\ell})$ は, 夫々、格子点 $\vec{n}$、$\vec{\ell}$ のまわりの局所誘電関数であり、$\vec{\ell}$ は非線形媒質の格子の位置ベクトルを表す。$\vec{n}$ は周期場を構成する格子点のベクトルである。

(38),(41) 式は系の空間周期構造と系固有の非線形性が共存する系を記述する式であり、photonic crystal が ILM の格好の舞台となっていることが分る。これらの式の左辺は固体電子論における Schrödinger 方程式と類似の形を持っている。局在状態を調べるには固体電子論の例に倣って左辺の演算子 $-\Delta_2 + V_{\rm P}(\vec{r})$ の固有関数である Bloch 関数 $\varphi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r})$ から定義される Wannier 関数 $w_\alpha(\vec{r} - \vec{n})$ [17],

$$w_\alpha(\vec{r} - \vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{n}} \varphi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) \quad \text{or} \quad \varphi_{\alpha\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{n}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{n}} w_\alpha(\vec{r} - \vec{n}) \tag{42}$$

を導入し、envelope function ϕ を以下のように Wannier 関数について展開する。

$$\phi(\vec{r}) = \sum_\beta \sum_{\vec{m}} u_\beta(\vec{m}, t) w_\beta(\vec{r} - \vec{m}) \equiv \sum_\beta \sum_{\vec{m}} u_\beta(\vec{m}) w_\beta(\vec{r} - \vec{m}) \equiv \sum_\beta \sum_{\vec{m}} u_\beta(\vec{m}) |\vec{m}, \beta> . \tag{43}$$

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

NはBravais格子のなかの格子点の総数である。(43)を(41)に代入する。そのときWannier関数の正規直交性を考慮すると以下のような連立差分非線形Schrödinger (NLS)方程式が得られる。

$$\sum_{\vec{m}\beta} J_{\alpha\beta}(\vec{n},\vec{m};\omega)u_\beta(\vec{m}) = \omega^2 \sum_{\beta,\beta'} \epsilon'_{1\alpha\beta\beta'}(|u_{\beta'}(\vec{n})|)u_\beta(\vec{n}) + i2\omega \sum_\beta \left[\epsilon_{1\mathrm{P}\alpha\beta} + \sum_{\beta'} \epsilon'_{1\alpha\beta\beta'}(|u_{\beta'}(\vec{n})|)\right] \frac{\partial u_\beta(\vec{n})}{\partial t}. \tag{44}$$

$\epsilon_{1\mathrm{P}}(\vec{r}-\vec{n}), \epsilon'_1(\vec{r}-\vec{\ell}, |\phi(\vec{r})|)$は夫々の格子点$\vec{n},\vec{\ell}$の周りに強く局在しているからWannier関数の局在性を考慮して行列要素はすべてsite indexについて対角なもののみを取った。Wannier関数についての行列要素を以下のように定義してある。

$$< \alpha\vec{n}|(-\triangle + V_P(\vec{r})|\beta\vec{m} >= J_{\alpha,\beta}(\vec{n},\vec{m};\omega),\ < \alpha\vec{n}|\epsilon'_{1P}(\vec{r}-\vec{n})|\beta\vec{m} >= \epsilon'_{1P\alpha,\beta}\Delta(\vec{n},\vec{m}), \tag{45}$$

$$< \alpha\vec{n}|\epsilon'_1(\vec{r}-\vec{\ell}, |u_{\beta'}(\vec{m}')|)|\beta\vec{m} >= \epsilon'_{1\alpha\beta\beta'}(|u_\beta(\vec{n})|)\Delta(\vec{n},\vec{m}). \tag{46}$$

(45)の第2式は$\vec{n}$-independentとした。$\epsilon'_{1\alpha\beta\beta'}(|u_{\beta'}(\vec{n})|)$の最も標準的なものは以下のKerr nonlinearityの場合である。

$$\epsilon'_{1\alpha\beta\beta'}(|u_{\beta'}(\vec{n})|) = \epsilon'_{1\alpha\beta\beta'}|u_{\beta'}(\vec{n})|^2. \tag{47}$$

$\epsilon'_{1\alpha\beta\beta'}$は定数である。簡単のためにsingle-band approximationを採用するとband index α,β,β'をすべて落とすことができて上の式は

$$\sum_{\vec{m}} J(\vec{n},\vec{m};\omega)u(\vec{m}) = \omega^2\epsilon'_1(|u(\vec{n})|)u(\vec{n}) + i2\omega[\epsilon_{1\mathrm{P}} + \epsilon'_1(|u(\vec{n})|)]\frac{\partial u(\vec{n})}{\partial t} \tag{48}$$

という形にreduceされる。ここで得られたNLS方程式にはILMが存在することが示される。このことは、photonic crystalを用いてphoton trappingやphoton trappingをある経路に沿って連続的に起して光の伝送回路を作ることが出来ることを示している。

envelope function $\phi(\vec{r})$, $u(\vec{n})$が時間に依らない定常問題では(48)式は以下のようになる。

$$\sum_{\vec{m}} K(\vec{n},\vec{m};\omega)u(\vec{m}) = \omega^2 u(\vec{n}) + \omega^2\epsilon'_1(|u(\vec{n})|)u(\vec{n}), \tag{49}$$

$$K(\vec{n},\vec{m};\omega) =< \alpha\vec{n}|(-\triangle - \omega^2\epsilon^*(\vec{r})|\beta\vec{m} > . \tag{50}$$

ここに

$$\epsilon^*_{\mathrm{P}}(\vec{r}) = \epsilon_{\mathrm{P}}(\vec{r}) - 1 \tag{51}$$

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

は誘電関数 $\epsilon_{\rm P}(\vec{r})$ の真空値からのずれである。行列 $K(\omega)=(K(\vec{n},\vec{m};\omega))$ の固有値 $\Omega(\vec{q})^2$, 固有関数 $\psi_{\vec{q}}(\vec{n})$ から定義される格子グリーン関数 $G(\vec{n},\vec{m};\omega)$ を以下

$$G(\vec{n},\vec{m};\omega)=\sum_{\vec{q}}\frac{\psi_{\vec{q}}(\vec{n})\psi_{\vec{q}}(\vec{m})^*}{\omega^2-\Omega(\vec{q})^2} \tag{52}$$

で導入すると (49) 式は

$$u(\vec{n})=\omega^2\sum_{\vec{m}}G(\vec{n},\vec{m};\omega)\epsilon_1'(|u(\vec{m})|)u(\vec{m}) \tag{53}$$

となる。(53) 式は (21) 式と本質的に同じ形の式である。

(2) 線形の不純物のみを含む場合

この場合は半導体の物理と対応する。誘電関数の周期性からのずれを以下のように表し

$$\epsilon'(\vec{r})=\sum_{\vec{i}}\epsilon_1'(\vec{r}-\vec{i}), \tag{54}$$

非線形の場合と同じ方法を用いると、(48), (53) 式は、夫々, 以下のようになる。

$$\sum_{\vec{m}}J(\vec{n},\vec{m};\omega)u(\vec{m})=\omega^2\epsilon_1'u(\vec{i})+i2\omega[\epsilon_{1\rm P}+\epsilon_1']\frac{\partial u(\vec{i})}{\partial t}, \tag{55}$$

$$u(\vec{n})=\omega^2\epsilon_1'\sum_{\vec{i}}G(\vec{n},\vec{i};\omega)u(\vec{i}). \tag{56}$$

(56) 式は不純物を含む格子振動の場合の式と全く同じ形をしている。

photonic crystal における非線形性による局在モードの観測結果の要約を図 10 に示す (18)。

図 10. 非線形性による局在モード (実験)

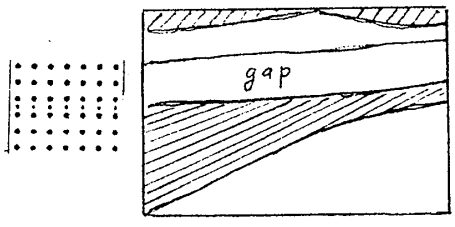

図 11. 線状配列の不純物と非線形性の場合（計算）

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

図11では線状に配列した不純物とKerr nonlinearityが共存する場合の局在モードの数値計算の結果を示す[24]。図12は折れ曲がった形をしたphotonic crystalのillustration, 図13はそれにKerr nonlinearityがある場合の局在モードのプロファイルの数値計算の結果である[25]。

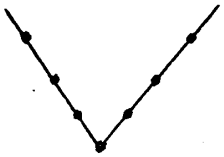

図12. bentのあるphotonic crystal

図13. bentと非線形性による局在モード

V. Bose-Einstein 凝縮、optical lattice、物質波の局在モード

Bose-Einstein 凝縮、超流動現象は物理のいろいろな現象のなかでも最もドラマチックなものの一つであろう。その理論的な研究はBose、Einsteinに始まりLandau, Feynman等に遡るが、最近の実験物理、特にレーザー科学技術の進展はこの問題を物理のなかで最もホットな分野の一つとしている。1995年にアルカリ原子気体のBose-Einstein 凝縮が発見されて以降Bose-Einstein 凝縮の研究は新たな段階に入ったと見なすことが出来るであろう[26]。更に、昨年はフェルミ統計に従うアルカリ原子気体のクーパー対の超流動現象が発見されている[27]。これらのBose-Einstein 凝縮は10^{-7}K程度の極超低温で実現されるが、それを実現するためにレーザー冷却という方法が用いられている。

アインシュタインがBose統計に従う粒子系は極低温で奇妙な性質を示すことを始めて指摘したことは周知の通りであるが、1916年に発表された「量子論における輻射の放出、吸収」という題目の論文[28]はレーザーの物理の基礎となっている。そのなかでアインシュタインは誘導放出の概念を導入した。アインシュタインはこの論文で用いられた方法を使ってプランクの熱輻射の式が非常に簡単に導かれることを示したが、彼はこのことを殊の外喜んでいたそうである。アインシュタインのこの論文の発表からレーザーの発見までは可成の年数を経過しているが、Townesはレーザーはそれが世に現れる３０年程前に作れたのではないかと述べている。また、アインシュタインの論文にはコヒーレンスということばは出ていないが、議論したとすればそれに類したことを言ったであろうと述べている。Bose-Einstein 凝縮とレーザーという二つの分野でもアインシュタインは先駆的に重要な基礎研究を行ったのであるが、レーザーは既に現代テクノロジーのいろいろな分野

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

で広く用いられていることは周知の通りである。即ち、レーザーを使った光プロセス技術は半導体、電子部品、光学機器、IT、自動車、分析装置、医療、医療機器、環境関連など、広範囲な分野へ普及している。

ボース統計、ボース粒子等にくらべてボース自身については余り知られていないように思われるので本論に入る前にBoseとEinsteinとの関係に少しふれることにする。ボースはアインシュタインより１５歳若く、アインシュタインが1905年に３つの分野における論文を発表したときは１１歳であった。光電効果の論文に影響されてボースは静止質量ゼロの粒子に粒子数保存の枠を除いた統計を導入してプランクの熱輻射の式を導き、その論文をヨーロッパの雑誌に投稿したが受理されなかったそうである。1924年ボースはアインシュタイにこの論文を同封した手紙を送ったが、アインシュタインはその論文が当時最も権威があったZeitschrift f. Physikで受理されるよう取り計らったといわれている。

アルカリ原子気体のBose Einstein凝縮が実験的に実現されてより、Bose-Einstein凝縮の問題は最近研究が最も活発に行なわれている分野の一つとなっている。周知の如く、Bose-Einstein凝縮体を記述するマクロな波動関数 $\Psi \equiv \Psi(\vec{r},t)$ は以下の形のGross-Pitaevskii方程式により記述される。

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi + g|\Psi|^2\Psi. \tag{57}$$

m, g は、それぞれ、アルカリ原子の質量、イオン間の相互作用の定数である。ここでは、非線形性は粒子間の相互作用に由来している。この凝縮体に、図のようにsinusoidal formのレーザー光を照射することにより周期場 $V_{\rm P}(\vec{r})$ を導入することが出来る（図14）。

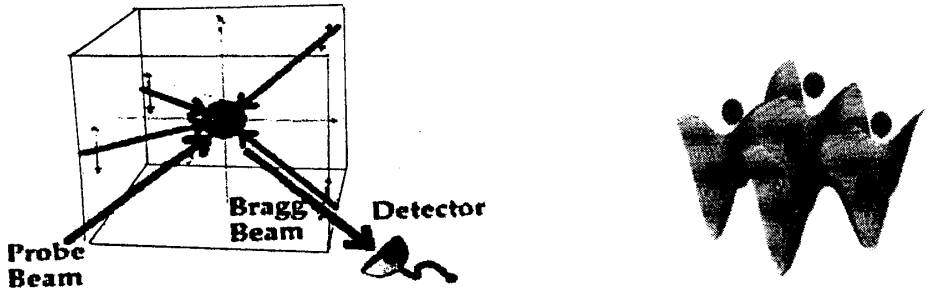

図14. sinusoidalなレーザー光による周期場の発生

この周期場の下でのGross-Pitaevskii方程式は以下の形を取る

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi + V_{\rm P}(\vec{r})\Psi + g|\Psi|^2\Psi, \qquad V_{\rm P}(\vec{r}) = V_{\rm P}(\vec{r}+\vec{R}). \tag{58}$$

それはphotonic crystalの場合と同様に周期性と非線形性が共存し、そこに局在モードが存在することが分かる。ここで、$\vec{R}$ は格子ベクトルである。このことに着目して演算子

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

$-(\hbar^2/2m\triangle + V_{\rm P}(\vec{r})$ の固有関数（Bloch 関数）から導かれる Wannier 関数 w を導入し、巨視的な波動関数 Ψ を w で展開すると photonic crystal の場合と同様に ((43) 式参照)、展開係数、即ち envelope 関数 u について以下の NLS 型の非線形差分方程式が得られる。

$$i\hbar\frac{\partial u_\alpha(\vec{n})}{\partial t} = \sum_{\vec{m}} J_\alpha(\vec{n},\vec{m})u(\vec{m}) + g\sum W_{\alpha\beta\beta_1\beta_2}(\vec{n},\vec{m},\vec{m}_1,\vec{m}_2)u_\beta(\vec{m})u_{\beta_1}(\vec{m}_1)^* u_{\beta_2}(\vec{m}_2) \quad (59)$$

和は $\vec{m},\vec{m}_1,\vec{m}_2,\beta,\beta_1,\beta_2$ について取られ、Wannier 関数についての行列要素を以下の如く定義してある。

$$\begin{aligned} &< \alpha\vec{n}|(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + V(\vec{r})|\beta\vec{m} >= J_\alpha(\vec{n},\vec{m})\triangle(\alpha,\beta), \\ &< \alpha\vec{n}\beta_1\vec{m}_1|\beta\vec{m},\beta_2\vec{m}_2 >= W_{\alpha\beta\beta_1\beta_2}(\vec{n},\vec{m},\vec{m}_1,\vec{m}_2) \end{aligned} \quad (60)$$

single-band approximation の下で上の式は

$$i\hbar\frac{\partial u(\vec{n})}{\partial t} = \sum_{\vec{m}} J(\vec{n},\vec{m})u(\vec{m}) + g\sum_{\vec{m}}\sum_{\vec{m}_1}\sum_{\vec{m}_2} W(\vec{n},\vec{m},\vec{m}_1,\vec{m}_2)u(\vec{m})u(\vec{m}_1)^* u(\vec{m}_2) \quad (61)$$

となる。(59), (61) 式も数値計算で解くことができる。ここでは物理的に最も興味ある解は渦解と ILM 解である。渦解は超流動体で典型的なものであるが、ILM は optical lattice 固有のものであり、sinusoidal なレーザーで超流動体のなかに作られた周期場とイオン間の相互作用による非線形性により生ずる物質波の局在状態を表している。尚、この二つの非線形モードは実験的にも観測されている [29]。optical lattice のバンド構造の例を図 15 に示し、ILM の実験結果を図 16(29)、数値計算結果を図 17 [30] に示す。

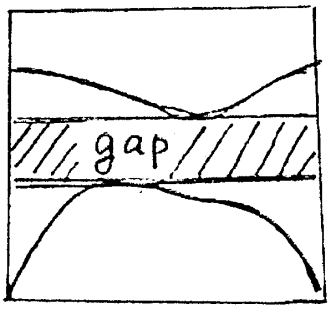

図 15. optical lattice のバンド構造

図 16. ILM の実験結果（概略)

図 17. optical lattice における ILM の計算結果

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

Bose 凝縮相に周期場を付加した optical lattice は極超低温においてのみ実現可能な物質であり、それに対する興味は現在のところアカデミックな範囲に止まっているように思われる。この optical lattice の問題が quantum information processing 等に適用出来ないかという最近のはなし等がある。

VI. 結語、感想と謝辞

思いもかけずこの論説を書くことになったが、それは物理の同窓会における提案が発端となったものである。この解説では、「アインシュタインと非線形の世界」という題目で、(a) 軸対称重力場の方程式と Heisenberg スピン系、(b) intrinsic localized mode (ILM) とその量子化、(c) photonic crystal, (d) optical lattice に於ける ILM という四つの問題における自己の研究でアインシュタインとの係わり合いにつき論じた。換言すれば、アインシュタインの仕事を自己の研究に関して非線形という側面から考察したものである。緒言でもふれたが、それはアインシュタインの業績の説明としては大変一方的で片寄ったものとなっている。(a) ではアインシュタイン方程式に物理的に意味のあるソリトン解が発見されたらすばらしいと思う。(b) では本来線形的な量子力学と非整合の関係にある非線形力学系で量子化の方法が見出されるであろうかと思う。(c) では局在モードの物理から photon trapping, photon circuit 等のテクノロジーへの進展を期待している。(d) では optical lattice における局在状態がテクノロジー的に役にたつこと、例えば、quantum information processing の問題に繋がらないだろうかと思う。

今回のことが契機となって、学部卒業後５０年以上になって始めて、アインシュタインの 1905 年をはじめとする幾つかの原論文に接した。そのために京大基礎物理学研究所（基研）の地下の書庫に度々足を運んだが、このような経験はなかなか得られないことを実感した。The Collected Papers of Albert Einstein という論文集のページを捲って深い興味を覚えたが、それらのいくつかを列挙してみると：(i) アインシュタインの原論文は必ずしも読み易い形には書かれてはいなかった（本に書いてあるアインシュタインの理論は例外を除き高校の数学程度の知識で理解出来るという説がある）。(ii) 特殊相対性理論の論文の題名が"On the electrodynamics of moving bodies"（英訳）となっていてそれが相対性理論の論文と identify するのに少し時間を要した。(iii) 質量とエネルギーとの同等性を示した 1905 年の最後の論文には例の $E = mc^2$ という式そのものはいくら探しても見当たらなかった。(iv) 特殊相対性理論と $E = mc^2$ の論文にもは引用文献が一つも無かった、等等である。幾つかの volume から成るこの論文集を読めばアインシュタインに関する今迄知らなかった多くのはなしに出会えると思う（万事に忙しい現代人にはそのような

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

時間はないかも知れない)。其の他いくつかの資料の参照にも基研の図書室を利用させて頂いた。海外の web site には実に多くの話題があった。これらを総合して、アインシュタインについて今迄知らなかったことがいろいろあることが分ったが、その過程で幾度となくアインシュタインの偉大さを再認識することになった。アインシュタインは史上最大の科学者の一人であるということに誰も依存はないであろう。

アインシュタインは晩年プリンストンで家から研究所まで毎朝バスで通っていたが、乗り合わせて来る人たちは、目礼はしても、殆ど誰も話し掛けなかったという記事に昔接したように思う。

WYP に関心を寄せられた黄檗会の会員諸氏、基研、ミスタイプ等を指摘され原稿を修正していただいた物性研究刊行会に謝意を表します。

参考文献

以下では reference The Collected Papers of Albert Einstein を、簡単のために、CPA Einstein と略記する。

[1] A. Einstein, On a heuristic viewpoint concerning the production and transformation of light (light quantum/photoelectric effect paper) (17 March, 1905) Annalen der Physik **17** (1905), pp.132-148; CPA Einstein Vol. 2 (Princeton University Press, 1989), pp.150-169.

[2] A. Einstein, A new determination of molecular dimension (Einstein's doctoral dissertation) (30 April, 1905); CPA Einstein Vol. 2 (Princeton University Press, 1989), pp.186-205. Buchdruckerei K.J. Wyss, Berbn, 1906. Annalen der Physik **19** (1906), pp.289-305.

[3] A. Einstein, On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat." (Brownian motion paper) (May 1905; received 11 May, 1905) Annalen der Physik **17** (1905), pp.549-560; CPA Einstein Vol. 2 (Princeton University Press, 1989), pp.224-236.

[4] A. Einstein, On the electrodynamics of moving bodies" (special relativity) (June 1905; received 30 June, 1905) Annalen der Physik **17** (1905), pp.891-921; CPA Einstein Vol. 2 (Princeton University Press, 1989), pp.276-310.

[5] A. Einstein, Does the inertial of a body depend on its energy content?" ($E = mc^2$) (September 1905; received 27 September, 1905) Annalen der Physik **18** (1905), pp.639-41. CPA Einstein Vol. 2 (Princeton University Press, 1989), pp.312-315.

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

[6] 中原 紀、電子材料　2005年2月号、pp.69-80.

[7] 例えば、藤井 保憲、時空と重力、産業図書 (1974).

[8] J. Ernst, Phys. Rev. **167** (1968), 1175.

[9] A. Tomimatsu and H. Sato, Phys. Rev. Lett. **29** (1972), 1344; Prog. Theor. Phys. **50** (1973), 99.

[10] P.D. Lax, Commun. Pure Appl. Math. **21** 467.

[11] R. Hirota, in *Bäcklund transformation*, Lecture Notes in Mathematics, ed. A. Dodd and B. Eckmann (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976), Vol. 515, p.40.

[12] S. Takeno and S. Homma, Prog. Theor. Phys. **65** (1981), 1844; S. Takeno, Prog. Theor. Phys. **66** (1981), 1250.

[13] 例えば、E.L. Ince, *Ordinary Differential Equations* (Dover Pub. Inc. New York, 1956).

[14] A. Einstein, Quantensatz von Sommerfeld und Epstein, Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen **19** (1917), 82-92; CPA Einstein Vol. 6 (Princeton University Press, 1996), pp.556-567

[15] M.C.Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1990), Chap. 14.

[16] S. Takeno, Prog. Theor. Phys. **75** (1986), 1-14; A.J. Sievers and S. Takeno, Phys. Rev. Lett. **61** (1988), 970; S. Takeno, K. Kisoda and A.J. Sievers, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 94 (1988), 242.

[17] J.M. Ziman, *Principles of the Theory of Solids* (Cambridge Univ. Press, 1964).

[18] D.K. Campbell, S. Flach and Y.S. Kivshar, *Localizing Energy Through Nonlinearity and Disorder*, Physics Today, January 2004, 43-49.

[19] S. Takeno, J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1991), 2821-2834.

[20] S. Takeno and V. Konotop, in *Nonlinearity and Disorder: Theory and Applications*, F. Abdullaev, O.bang and M.P. Sorensen, eds, (Kluwer Acad. Pub., 2001), 159-171.

[21] 例えば、J.D. Joannopoulos, R.D. Meade, and J.N. Winn, *Photonic crystals: molding*

NII-Electronic Library Service

Bussei Kenkyu

the flow of light (Princeton University Press, Princeton, 1995).

[22] 最近の研究動向の例 G.V.d. Sandel, B. Maes, P. Bienstman, J. Danckaert, R. Baets and I. Veretennicoff, Optics Express **13** (2005), 1544-1554.

[23] S. Noda, A. Chutinan and M. Imada, Nature **40** (2000), 608-610; M. Fujita, S. Takahashi, Y. Tanaka, T. Asano and S. Noda, Science **308** (2005), 1296-1298, and references cited therein.

[24] S.F. Mingaleev, Y.S. Kivshar and R.A. Sammut, Phys. Rev. E **62** (2000), 1-6.

[25] Y.S. Kivshar, P.G. Devrekidis and S. Takeno, Phys. Lett. A **307** (2003), 287-291.

[26] A. Trombettoni and A. Smerzi, Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 2353; F. Kh. Abdullaev et al., Phys. Rev. A **64** (2001), 043606; F. S. Cataliotti et al., Science **293** (2001), 843; A. Smerzi et al., Phys. Rev. Lett. **89** (2002), 170402; G. L. Alfimov et al., Phys. Rev. E **66** (2002), 046608; Carretero-González and K. Promislow, Phys. Rev. A **66** (2002), 033610.

[27] C.A. Regak, M. Greisen and D.S. Jim, Phys. Rev. Lett. **92** (2004), 040403.

[28] A. Einstein, Emission and absorption of radiation in quantum theory, Deutsche Phys. Geselschaft Verhandlungen **18** (1916), 318; CPA Einstein Vol. 6 (Princeton University Press, 1996), pp.364-370.

[29] O. Cohen, G. Bartal, H. Bugov, T. Carmon, J.W. Flleischer, M. Segev and D.N. Christodoulides, Nature **433** (2005), 500, and references cited therein.

[30] E.A. Ostrovskaya and Y.S. Kivshar, Phys. Rev. Lett. **90** (2003), 160407.

NII-Electronic Library Service