

フィードバック制御下の Harada-Sasa 等式とその制限

東京大学 理学系研究科 伊藤創祐¹, 佐野雅己

1 Introduction

近年、非平衡状態の遷移とエントロピー生成の関係の理解がゆらぎの定理や Jarzynski 等式の発見によって進んでいる。これらの定理、等式は経路の確率に関する "Local detailed balance" を前提として成立する。また "Local detailed balance" は、古典系における "Maxwell の悪魔" の問題である、情報とエントロピー生成の理解の前提ともなっている [1]。一方で、経路の確率を用いて、その摂動依存性から揺動散逸定理の一般化がなされており [2]、この一般化は Langevin 系において、エネルギー散逸率と揺動散逸定理の破れの関係式である Harada-Sasa 等式 [3] を含んでいる。

そこでわれわれは、フィードバックのある非平衡遷移中での Harada-Sasa 等式相当の表式から、揺動散逸定理の破れの相互情報量に関する制限式を導出した。この制限式は力学的なフィードバックによって有効温度を下げる場合 [4] の、測定誤差に関する有効温度の理論的下限を示している。

2 Approach

フィードバック効果を入れた Langevin 方程式

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = F_y(t) + \epsilon f_p(t) + \xi(t) \quad (1)$$

を考える。 ξ は平均 0 分散 $\frac{2\gamma}{\beta}$ ($\beta = \frac{1}{k_B T}$) の白色ガウスノイズとする。時刻 $t=0$ から $t=\tau$ までの遷移を考え、フィードバック効果は以下のように導入する。

1. 時刻 $t = t_{M_i}$ で i 回目の測定を行う。 ($0 \leq t_{M_1} < \dots < t_{M_i} < \dots < t_{M_n} \leq \tau$)
2. 相空間 $\Gamma_{M_i} \equiv (x(t_{M_i}), \dot{x}(t_{M_i}))$ に対し、条件付き確率 $P_i(y_i | \Gamma_{M_i})$ で測定結果 y_i を得る。
3. $F_y(t)$ は時刻 $t = t_{M_i}$ 以降に y_i に依存して時間発展することができる。

このとき測定結果 $y(\equiv \{y_1, \dots, y_n\})$ を固定したときの経路の確率は、経路積分表示で得ることができ、その経路の確率から Local detailed balance を経て generalized Jarzynski equality [1] が得られる。ここから Langevin 系における熱力学第二法則の一般化を得ることが可能である。一方で Harada-Sasa 等式相当についても、経路積分表示の摂動依存性を用いて得ることができる。

¹E-mail: sosuke@daisy.phys.s.u-tokyo.ac.jp

3 Result

フィードバック制御下での Harada-Sasa 等式の表現

$$\gamma \left\{ \langle \dot{x}(\tau) \dot{x}(\tau) \rangle_{\epsilon=0} - \frac{2}{\beta} R(\tau; \tau) \right\} = \langle \dot{x}(\tau) F_y(\tau) \rangle_{\epsilon=0} - \langle m \dot{x}(\tau) \ddot{x}(\tau) \rangle_{\epsilon=0} \quad (2)$$

と、フィードバック制御下での熱力学第二法則の拡張

$$\beta \int_0^\tau ds \langle \dot{x}(s) F_y(s) \rangle_{\epsilon=0} - \beta \left\langle \frac{m \dot{x}^2}{2}(\tau) - \frac{m \dot{x}^2}{2}(0) \right\rangle_{\epsilon=0} - \langle \ln \rho(\tau) - \ln \rho(0) \rangle_{\epsilon=0} \geq - \left\langle \sum_i I_i \right\rangle_{\epsilon=0} \quad (3)$$

が得られた。 $R(t; t)$ は応答関数であり、 I_i は i 回目の測定における測定結果 y_i と相空間 Γ_i 間の相互情報量、 $\rho(t)$ は時刻 t での確率密度分布である。式 (2) は終時刻 τ のとり方に依らず成り立つので、式 (2)、(3) から揺動散逸定理の破れに対する相互情報量に対する制限式

$$\beta \int_0^\tau ds \gamma \left\{ \langle \dot{x}(s) \dot{x}(s) \rangle_{\epsilon=0} - \frac{2}{\beta} R(s; s) \right\} \geq \langle \ln \rho(\tau) - \ln \rho(0) \rangle_{\epsilon=0} - \left\langle \sum_i I_i \right\rangle_{\epsilon=0} \quad (4)$$

が得られる。この結果は Langevin 系における非平衡なフィードバック過程で一般に成り立つ。

われわれはまた、粒子の速度を測定し、ガウス分布の誤差で測定結果をえて、得られた結果に対して負の係数をかけた外力を加え、一定時間遷移させるという一連のループを繰り返すモデルを解析的に計算した。このモデルは系の有効温度を下げる特徴的な系であり、計算の結果パラメータによらず式 (4) が成り立つことを示した。

このモデルにおいて分布が定常なガウス分布の時、相互情報量は定常分布の分散と測定誤差の分散の比 σ_r で、 $\ln(1 + \sigma_r^2)$ とかける。つまり、式 (4) は力学的なフィードバックにおいて有効温度を下げる過程での、測定誤差による有効温度の下限をあらわしているとみなせる。

特にフィードバックによって達成される定常状態を仮定して、 $R(s; s) = \frac{1}{2m}$ とし、 $\frac{m}{2} \langle \dot{x}^2(s) \rangle_{\epsilon=0} = \frac{kT_{eff}}{2}$ と有効温度 T_{eff} を揺動項と散逸項の比で定義すると、式 (4) は

$$\frac{T - T_{eff}}{T} \leq \left\langle \sum_i^{t_{M_i} \in [0, \frac{m}{\gamma}]} I_i \right\rangle \quad (5)$$

となる。これは平衡に緩和する時間スケール $\frac{m}{\gamma}$ 間に得られた全情報量が、達成できる有効温度 T_{eff} の下限を決定しているという表式である。

Reference

- [1] T. Sagawa and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **104** 090602 (2010).
- [2] M. Baiesi, C. Maes and B. Wynants, Phys. Rev. Lett. **103** 010602 (2009).
- [3] T. Harada and S. Sasa, Phys. Rev. Lett. **95** 130602 (2005).
- [4] G. Jourdan *et al.*, Nanotechnology. **18** 475502 (2007).