《論文》

論 2－1

関節型3重振立倒子の姿勢制御†

古田　勝久*・落合　敏昭**・小野　信任***

ABSTRACT This paper is concerned with the attitude control of a triple inverted pendulum, the angles of whose upper two hinges are controlled and the lowest hingle is made free for rotation. The procedure to design the control system for the pendulum is found effective to that for general unstable mechanical system, which may be a simulation of the procedure of the control system design.

The control system is designed by using CAD developed by author and is realized by a digital computer. The controller is designed as a robust servo controller based on a linearized model in the neighbourhood of the upright position of the pendulum. The function of the controller is found satisfactory even in cese when the upper angles of the pendulum are required to be changed. Thus this paper presents the result that the attitude control of the triple inverted pendulum is succeeded.

1. はじめに

実システムのために設計された制御系の有効性はシミュレーションによって検証されるが，シミュレーションに使用される数学モデルは一般に線形のような簡単なものでありすべてのシステム特性を表現しているものとは言い難く，結局制御系は設計されたものを実システムに適用し最終的には評価を行わざるを得ない．そのためあるシステムに対しうまくいった制御系設計の手順やその基礎となる理論が，類似のシステムにも有効に適用出来るかどうかは取扱うシステムのクラスを代表する最も制御し難いプラントに対し制御系を構成し検討されなければならない．これは設計手順のシミュレーション問題と考えられる．

最近状態空間に基づいた制御理論を用いてロボットのような機械系のデジタル制御系が構成される場合が多い．この制御系設計の手順の有効性の検証のための不安定システムとして，台車上の倒立振子の安定化制御が代表的なものとして研究されて来た[1),2)]．しかしこのシステムは1入力系でありかつ平衡点付近の挙動しか考えなくて良いため理論的モデルによる設計が良好な結果を与えることがわかっている．

本研究は，下端が回転自由の3重の倒立振子の2関節にトルクを加えることによって姿勢制御を行うデジタル制御系を構成する事を考えたもので，この種の類似のシステムの制御系設計に有効な制御系設計の手順を与えるものである．早勢らは[3)]，1関節にだけトルクを加えた2重倒立振子の制御を行っているが，本報告は，早勢らの2重倒立振子のうえにもう1つ振子を付けた2つの関節によって3重倒立振子の安定化を行う制御系の設計試作を行ったものである．この結果，このような関節型の倒立振子では3重倒立振子の1つの関節だけにトルクを加えることにより倒立点での安定化可能であり，更にトルクを加えられ3関節が多い程倒立点での安定化が容易である事が明らかになった．又，頑強なサーボ系により，下端の振子を垂直にしかつ倒立点で安定化したまま残り2本の振子の姿勢を変えられる制御系に対しても構成できることがわかった．このようなかなりの非線形なシステムに対しても線形システムに基づいて設計された線形制御系が有効であることが明らかになった．ここでの設計はすべて古田研で開発した制御系設計用 CAD プログラム DPACS (Design Package for Antomatic Control Systems)を使用し[4)]，これで設計された結果を RCOS (実時間制御用プログラム)を用いてデジタル制御を行

Attitude Control of Triple Inverted Pendulum by Torque Control. By *Katsuhisa Furuta* (Tokyo Institute of Technology), *Toshiaki Ochiai* (Toyota Motors) and *Nobuto Ono* (Daini Seikosha)

*東京工業大学　**トヨタ自動車　***第二精工舎

† 1982年8月受付

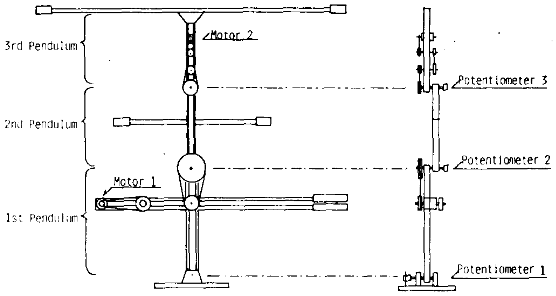

Fig. 1 Triple inverted pendulum

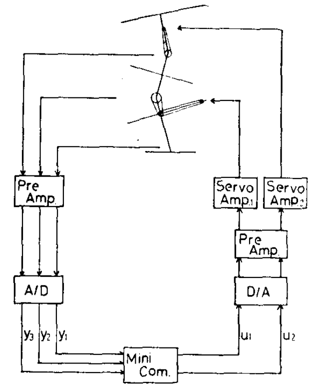

Fig. 2 Block diagram of control system

記 号 表

u_j	：計算機の出力で j モータ駆動系への入力
y_i	：3重倒立振子の角度の変位を推定するもの
l_i	：振子の長さ
h_i	：振子の下端からその重心までの距離
m_i	：振子の質量
I_i	：振子の重心回りの慣性
C_i	：関節部の粘性摩擦係数
θ_i	：振子の鉛直からの角度
T_{mi}	：モータ軸の出すトルク
θ_{mi}	：モータ軸の回転角度
G_{mi}	：u_i から拘束トルクまでのゲイン
C_{mi}	：速度変数定数の逆数
I_{mi}	：電機子慣性モーメント
K_i	：ベルト・プーリ系の歯数
C'_{pi}	：関節軸からみたベルト・プーリ系の粘性摩擦
I'_{pi}	：関節軸からみたベルト・プーリ系の慣性摩擦
g	：重力加速度
α_i	：ポテンショメータから A/D までのゲイン
i	：添字 i は i 番目の振子
m	：添字 m はモータを示す
その他	
M_1	$=m_1h_1+m_2l_1+m_3l_1$
M_2	$=m_2h_2+m_3l_2$
M_3	$=m_3h_3$
J_1	$=I_1+m_1h_1^2+m_2l_1^2+m_3l_1^2$
J_2	$=I_2+m_2h_2^2+m_3l_2^2$
J_3	$=I_3+m_3h_3^2$

ない得られた結果を本研究で延べている．

3. 3重倒立振子のモデル化

制御対象である重倒立振子の概略を **Fig. 1** に示す．3本の振子はベアリングを用いて鉛直面内で自由に回転出来る．各々の振子に取り付けてある横棒は，振子の重心回りの慣性を大きくするためのもので，これにより制御のし易さを調整している．3つの関節部にはポテンショメータを付けて振子の相互の角度差を検出する．第一振子と第三振子には D, C モータを付けタイミングベルトを用いて第二振子の両端の関節部にトルクを伝えている．

実験装置全体のブロック図を **Fig. 2** に示す．コントローラはミニコンを用いて実現されており，演算結果 u_1, u_2 は D/A 変換されたのちプリアンプからサーボアンプへ入力され，モータ1，2をそれぞれ動かしている．ポテンショメータで3つの振子の角度を検出し，プリアンプを通し A/D 変換しミニコンへ入力している．

この3重倒立振子の数式モデルを以下の仮定の下で立てた．(1)振子は剛体である．(2)摩擦は速度に比例する粘性摩擦のみである．(3)モータの電気的遅れはない．(4)ベルトは伸びない．

以上の仮定の下で振子の鉛直からの角度を θ_i とし一般化座標として θ_1, θ_2, θ_3 を選べば次のラグランジュの運動方程式が成立つ．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_i}=Q_{\theta i}+T_{\theta i} \qquad i=1,2,3 \tag{1}$$

ただし　L ：系全体の運動エネルギー T から位置エネルギー U を引いたラグランジュ関数

$Q_{\theta i}$：一般化座標 θ_i における非保存力（粘性摩擦）の一般力

$T_{\theta i}$：一般化座標 θ_i における非保存力（モータのトルク）の一般力

第 i 振子の運動エネルギーを T_i とし位置のエネルギーを U_i とし，重心の位置を (x_i, y_i) とすると，ラグランジュ関数は

$$L=\sum_{i=1}^{3}(T_i-U_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{1}{2}m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}I_i\dot{\theta}^2{}_i-m_igy_i\right\} \tag{2}$$

系全体の散逸関数 R は

$$R=\frac{1}{2}C_1\dot{\theta}_1{}^2+\frac{1}{2}C_2(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)^2+\frac{1}{2}C_3(\dot{\theta}_3-\dot{\theta}_2)^2 \tag{3}$$

よって

$$Q_{\theta1}=-\frac{\partial R}{\partial\theta_1}=-\{(C_1+C_2)\dot{\theta}_1-C_2\dot{\theta}_2\} \tag{4-1}$$

$$Q_{\theta2}=-\frac{\partial R}{\partial\theta_2}=-\{(C_2+C_3)\dot{\theta}_2-C_2\dot{\theta}_1-C_3\dot{\theta}_3\} \tag{4-2}$$

$$Q_{\theta3}=-\frac{\partial R}{\partial\theta_3}=-\{C_3\dot{\theta}_3-C_3\dot{\theta}_2\} \tag{4-3}$$

又，トルク T_1, T_2 の系に加える仕事は

$\delta W=T_1\delta(\theta_2-\theta_1)+T_2\delta(\theta_3-\theta_2)$ より

$$T_{\theta1}=\frac{\partial W}{\partial\theta_1}=T_1\frac{\partial(\theta_2-\theta_1)}{\partial\theta_1}+T_2\frac{\partial(\theta_3-\theta_2)}{\partial\theta_1}=-T_1 \tag{5-1}$$

$$T_{\theta2}=\frac{\partial W}{\partial\theta_2}=T_1-T_2 \tag{5-2}$$

$$T_{\theta3}=\frac{\partial W}{\partial\theta_3}=T_2 \tag{5-3}$$

この関節軸に加わるトルク T_1, T_2 はモータ軸に関して

$$T_{m_i}=G_{m_i}u_i-C_{m_i}\dot{\theta}_{m_i}-I_{m_i}\ddot{\theta}_{m_i}$$

関節軸に関して

$$T_1=K_1T_{m1}-C_{p1}'(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)-I_{p1}'(\ddot{\theta}_2-\ddot{\theta}_1) \tag{6-1}$$

$$T_2=K_2T_{m2}-C_{p2}'(\dot{\theta}_3-\dot{\theta}_2)-I_{p2}'(\ddot{\theta}_3-\ddot{\theta}_2) \tag{6-2}$$

ここで $\theta_{m1}=K_1(\theta_2-\theta_1)$, $\theta_{m2}=K_2(\theta_3-\theta_2)$ であるから

$$T_1=G_1u_1-C_{p1}(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)-I_{p1}(\ddot{\theta}_2-\ddot{\theta}_1) \tag{7-1}$$

$$T_2=G_2u_2-C_{p2}(\dot{\theta}_3-\dot{\theta}_2)-I_{p2}(\ddot{\theta}_3-\ddot{\theta}_2) \tag{7-2}$$

ただし

$$G_i=K_iG_{m_i}$$

$$C_{p_i}=C_{p_i}'+K_i^2C_{m_i}$$

$$I_{p_i}=I_{p_i}'+K_i^2I_{m_i}$$

以上から(2)，(4)，(5)，(7)を(1)に代入し，不安定平衡点 $(\theta_1=\theta_2=\theta_3=0)$ のまわりで線形近似を行い次の連立微分方程式が得られた．

$$M\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\\ \ddot{\theta}_3\end{bmatrix}+N\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}+P\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix}+G\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=0 \tag{8}$$

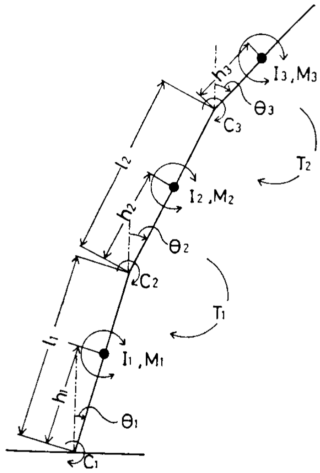

Fig. 3 Schematic Representation of symbols

ただし

$$M=\begin{bmatrix}J_1+I_{p1} & l_1M_2-I_{p1} & l_1M_3\\ l_1M_2-I_{p1} & J_2+I_{p1}+I_{p2} & l_2M-I_{p2}\\ l_1M_3 & l_2M_3-I_{p2} & J_3+I_{p2}\end{bmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix}C_1+C_2+C_{p1} & -C_2-C_{p1} & 0\\ -C_2-C_{p1} & C_{p1}+C_{p2}+C_2-C_3 & -C_3+C_{p2}\\ 0 & -C_3-C_{p2} & C_3+C_{p2}\end{bmatrix}$$

$$P-\begin{bmatrix}-H_1g & 0 & 0\\ 0 & -M_2g & 0\\ 0 & 0 & -M_3g\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}G_1 & 0\\ -G_1 & G_2\\ 0 & -G_2\end{bmatrix}$$

$M_1=m_1h_1+m_2l_1+m_3l_1$, $M_2=m_2h_2+m_3l_2$

$M_3=m_3h_3$

$J_1=I_1+m_1h_1{}^2+m_2l_1{}^2+m_3l_1{}^2$

$J_2=I_2+m_2h_2{}^2+m_3l_2{}^2$, $J_3=I_3+m_3h_3{}^2$

記号の説明を **Fig. 3** に与える．

入力 u を

$$u=[u_1,\ u_2]^T$$

状態 $\bar{x}$ を

$$\bar{x}=[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3]^T$$

と定義すると

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -M^{-1}p & -M^{-1}N\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\ -M^{-1}G\end{bmatrix}u \tag{9-1}$$

で与えられる．ポテンショメータから A/D までのゲインを $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 (1/rad)$ とすると出力 y は

$$y=[T_0\quad 0]\bar{x} \tag{9-2}$$

ここで

$$T_0=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ -\alpha_2 & \alpha_2 & 0\\ 0 & -\alpha_3 & \alpha_3\end{bmatrix}$$

さらに $T=\mathrm{diag}\{T_0, T_0\}$ とし

$$x=T\bar{x} \tag{10}$$

Table 1 Parameter of the controlled system

l_1 [m]	0.500	α_1 [1/rad]	1.146
l_2 [m]	0.400	α_2 [1/rad]	1.146
h_1 [m]	0.350	α_3 [1/rad]	0.9964
h_2 [m]	0.181	G_{m1} [Nm]	1.08
h_3 [m]	0.245	G_{m2} [Nm]	0.335
m_1 [kg]	3.25	c_{m1} [Nms]	2.19×10^{-3}
m_2 [kg]	1.90	c_{m2} [Nms]	7.17×10^{-4}
m_3 [kg]	2.23	I_{m1} [kgm^2]	2.40×10^{-5}
I_1 [kgm^2]	0.654	I_{m2} [kgm^2]	4.90×10^{-6}
I_2 [kgm^2]	0.117	c'_{p1} [Nms]	0.0
I_3 [kgm^2]	0.535	c'_{p2} [Nms]	0.0
c_1 [Nms]	6.54×10^{-2}	I'_{p1} [kgm^2]	7.95×10^{-3}
c_2 [Nms]	2.32×10^{-2}	I'_{p2} [kgm^2]	3.97×10^{-3}
c_3 [Nms]	8.80×10^{-3}	k_1	30.72
		k_2	27.00

とすると

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{11-1}$$

$$y=Cx \tag{11-2}$$

となる.

$$A=\begin{bmatrix}0 & I\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ B_2\end{bmatrix},\quad C=[I\quad 0]$$

$$A_{21}=-I_0M^{-1}PT_0^{-1}\quad A_{22}=-T_0M^{-1}NT_0^{-1}$$

$$B_2=-T_0M^{-1}G$$

となり，出力を状態変数とする2入力出力6次のシステムが得られる.

3. パラメータ同定とモデルの特徴

以上のようにして得られたモデルのパラメータは次のようにして行い，**Table 1** のような結果を得た. これらのパラメータは次のように同定された.

- m_i, h_i, l_i : 直接測定
- I_i, C_i : 各振子を自由振動させ，その減衰曲線から周期と減衰率を求め算出した.
- I_{pi} : 実験的には良い結果が求まらず理論計算によって求めた.
- C_{pi}' : モータへの入力電圧とプーリ系の最終段の定常回転数の測定より無視出来ることがわかったので，無視した.
- G_{mi} : トルクから直接測定した.
- C_{mi} : モータの無負荷回転数から求めた.
- I_{mi}, K_i : カタログ値を採用した.

以上の同定結果を用いて Fig. 1 に示す実験に用いたシステムの状態表現は次のように与えられた.

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 12.54 & -8.26 & -0.39 & -0.043 & 2.75 & -0.36\\ -4.38 & 36.95 & -3.00 & 0.086 & -9.57 & 2.29\\ -6.82 & -22.94 & 11.93 & -0.034 & 6.82 & -2.86\end{bmatrix}x$$

$$+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ -50.0 & 6.12\\ 174.4 & -38.93\\ -124.2 & 48.62\end{bmatrix}u$$

このシステムの極は $\{35.2,\ 2.82,\ 2.40,\ -2.73,\ -4.24,\ -14.24\}$ と与えられた. この極からわかる通り，与えられたシステムは3個の不安定なモードをもつことがわかる. このシステムの可制御行列

$$V=[B, AB, \cdots\cdots, A^{n-1}B] \tag{12}$$

によりシステムの可制御部分空間は I_mV で与えられる. しかるに V はユリタリ行列 U, W を用いて

$$V=U\Sigma W$$

と表わせる. ただし Σ は次のような行列である.

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma r\end{bmatrix}$$

A の特異値 $\sigma_1, \cdots, \sigma r$ はよって実験的意味の V の階数が与えられるが，この場合

$\{\sigma_1, \cdots, \sigma_6\}=\{1.13\times10^8, 1.17\times10^4, 1.60\times10^2, 1.26\times10, 1.07\times10\}$

であることから与えられたシステムは可制御であることがわかる.

Fig. 1 に示すような横棒及び重りを取去ると，システムの可制御行列の特異値は

$\{1.88\times10^{10}, 4.95\times10^6, 1.57\times10^3, 1.43\times10^2, 1.57\times10,\ 1.44\times10\}$

となる. この場合の方が最大，最小特異値の比が大きくなっている. これから横棒を付けたシステムの方が制御し易いことがわかる.

Fig. 1 のシステムで Motor 1 を取り去った場合の可制御行列の特異値は $\{1.5\times10^6,\ 1.58\times10^4,\ 2.79\times10^2,\ 6.94\times10,\ 1.17,\ 1.13\}$ で与えられ，Motor 2 を取り去った場合のそれは $\{6.91\times10^7,\ 2.54\times10^3,\ 3.53\times10,\ 3.35\times10,\ 4.55\times10^{-1},\ 4.28\times10^{-1}\}$ で与えられる. これからいずれの場合も理論的には可制御であるが，モータが1個になると制御し難いシステムとなる事がわかる.

4. 制御系設計と実験結果

3重倒立振子の制御は，倒立点における安定化を行うための状態フィードバック系と，姿勢制御迄実行するためのサーボ系の両方の制御系を用いて行った．いずれの場合も2次形式評価関数に対する最適制御で制御則を与えた．

(11)のシステムに対するフィードバック則は，評価関数

$$J=\int_0^{\infty}(\|x\|^2{}_{H^TQH}+\|u\|^2{}_R)dt \tag{13}$$

を最小にするような

$$u=Fx \tag{14}$$

で与えた．ただし

$$F=-R^{-1}B^TP \tag{15-1}$$

$$A^TP+PA+H^TQH-PBR^{-1}B^TP=0 \quad (P>0) \tag{15-2}$$

である．

具体的には

$$H=\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\alpha_1} & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} & \end{array}\right]$$

$$Q=\begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad R=I$$

で求めた制御則

$$F=\begin{vmatrix} 23.86, & 8.422, 4.78, & 7.9421, 3.421, 1.738 \\ 35.88, & 13.45, 3.85, & 11.86, 5.017, 2.262 \end{vmatrix} x$$

を用いて制御を行った．このときの閉ループ系の極は $-2.962\pm0.09954j$，$-4.263\pm2.227j$，$-13.91\pm9.384j$ で与えられる．**Fig. 4** に制御時の各振子の角度および入力波形を示す．オブザーバは後に述べるように設計した1次系のものを個並列に用いた．それらの極は-0.6に設定し，サンプル幅は5 m sec とした．

3重倒立振子では，その各々の振子の角度 θ_1, θ_2, θ_3 のうち 2つの角度を任意に指定して倒立させる事が出来る．本論文では $\theta_3-\theta_2$, $\theta_2-\theta_1$ の2つを階段状に変化させる制御系をサーボ系を用いて構成する事を考えた．

まず(11)式の3重倒立振子系の第2，第3出力だけを制御量とするから制御量を $\tilde{y}$ とするとき，(11) を次のように変形する．

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{11-1)'$$

$$\tilde{y}=Cx \tag{11-2)'$$

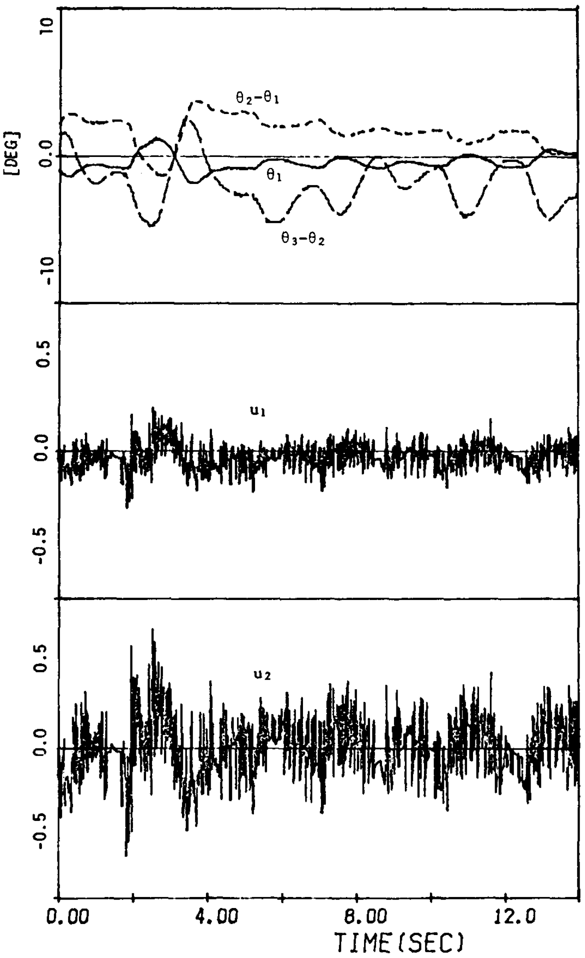

Fig. 4 Example of measured data of outputs and inputs

ただし

$$\tilde{C}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

しかるにこのシステムは

1) (A, B)が可制御

2) $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix}$ 二次元数制御量の数

の2条件を満たしているから，倒立点で安定に $\tilde{y}$ を所定の目標値 y_r にする制御則が存在する．このような制御系は，まず拡大系

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 0 \\ -y_r \end{bmatrix} \tag{16}$$

に対し $y_r=0$ とした場合の レギュレータ 問題を考える．

$$J=\int_0^{\infty}\left\{\begin{bmatrix} x^T, & \eta^T \end{bmatrix} H^TQH\begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix}+u^TRu\right\}dt \tag{17}$$

ただし

$$H=\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} \end{pmatrix}$$

Qは5×5の非負定行列，Rは2×2の正定対称行制とする．

与えられた評価関数を最小にする最適制御Fは

$$F=-R^{-1}\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}^T P \triangleq [\underbrace{F_1}_{5列},\ \underbrace{F_2}_{2列}]$$

で与えられる．ただしPは$P>0$なる

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix}^T P + P\begin{bmatrix} A & 0 \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} + H^T Q H$$

$$-P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1}\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}^T P=0 \tag{18}$$

で与えられる．このとき(11)′で与えられるシステムを$\tilde{y}\to y_r$にする制御則は

$$u=F_1 x+F_2\int_0^t(\tilde{y}(t')-y_r)dt' \tag{19}$$

で与えられる．

$Q=\mathrm{diag}\{10^{-3},\ 0.5,\ 0.5,\ 0.05,\ 0.05\}$

$R=\mathrm{diag}\{1,\ 1\}$

のとき

$$F_1=+\begin{bmatrix} 23.2, & 8.20, & 3.84, & 7.73, & 3.31, & 1.64 \\ 31.2, & 11.7, & 3.67, & 1.03, & 4.35, & 1.96 \end{bmatrix}$$

$$F_2=\begin{bmatrix} -4.135\times10^{-3}, & 2.24\times10^{-1} \\ 1.95\times10^{-1}, & 4.75\times10^{-3} \end{bmatrix}$$

のとき極は

$\{-0.223,\ -0.305,\ -2.92\pm0.172j,$

$-3.83\pm1.235j,\ -11.315\pm4.737j\}$

で与えられる．$\Delta t=7$ m sec，Observer $\hat{a}_1=-1$，$\hat{a}_2=-3$とした場合に本論文で設計した制御系を用いて計算機制御した実験結果を Fig. 4, Fig. 5 に示す．Fig. 4 は約2秒の時点で倒立状態にある振子の第3振子に外乱を加えた場合の3本の振子と関節にトルクを与える2個のモータへの入力を示したもので，外乱に対しても頑強な制御系が構成されていることがわかる．Fig. 5 は，倒立状態を保ちつつ3本の振子の姿勢の目標値を $\theta_3-\theta_2=17$ 度，$\theta_2-\theta_1=-15$ 度に与える場合の挙動の実験結果を示す．制御系設計に用いた線形モデルを用いて目標値変化に対する制御系の挙動を Fig. 5 の点線で示す．実システムは，周期成分を含んで目標値のまわりで動いているが，これはシステムの駆動機構の非線形系性によるものと考えられる．この場合の3重倒立振子の動きの様子を **Photo 1** に示す．写真の時間間隔は 1.8 sec である．このように設計した制御系は，安定性を保ちつつ姿勢目標値の変化追従に対し有効であることがわかった．

5. 観測器の設計

制御対象(11)のシステムで直接測定出来るものは3個であるから状態を推定しなければならない．しかるに(11)のシステムの可観測指数は2であるから，入力の状態フィードバック部 F_1x の i 番目の推定 $\hat{f}_i$ を与える汎関数観測器は次のように1次で構成できる[2]．

$$\dot{z}_i=\hat{a}_i z_i+\hat{b}_i{}^T y+\hat{j}^T u \tag{20−1}$$

$$\hat{f}_i=\hat{c}_i z_i+\hat{d}_i y \tag{20−2}$$

i 番目の入力 u_i の推定値 $\hat{u}_i$ は(19)より

$$\hat{u}_i=\hat{f}_i+F_i{}^2\int^t(\tilde{y}-y_r)d\zeta \tag{20−3}$$

ただし

$\hat{a}_i=-\rho_i \quad (\rho_i>0)$

$\hat{b}_i=F'_{i2}\{-\rho_i L_i+A_{21}\}$

$\hat{c}_i=1$

$\hat{d}_i{}^T=(F'_{i1}+F'_{i2}L_i)$

$\hat{j}_i{}^T=F'_{i2}B_2$

$$F_1=\begin{bmatrix} F'_{11} & F'_{22} \\ F'_{21} & F'_{22} \end{bmatrix},\quad F_2=\begin{bmatrix} F^2{}_1 \\ F^2{}_2 \end{bmatrix}$$

$L_i=A_{22}+\rho_i I$

(20)で与えられる観測器は連続系であるので $k+1$ 時刻目の離散系の値は

$$z_i(k+1)=\hat{\Phi}_i z_i(k)+\hat{\gamma}_i\hat{b}_i{}^T y(k)+\hat{j}_i{}^T u(k) \tag{21−1}$$

$$\hat{f}_i(k)=\hat{z}_i(k)+\hat{d}_i{}^T y(k),\ \ i=1,2 \tag{22−2}$$

で与えた．ただしサンプル幅を Δt とするとき $\hat{\Phi}_i$，$\hat{\gamma}_i$ は

$$\hat{\Phi}_i=e^{\hat{a}_i\Delta t} \tag{23−1}$$

$$\hat{\gamma}_i=\int_0^{\Delta t}e^{\hat{a}_i(\Delta t-\tau)}d\tau \tag{23−2}$$

i 番目の入力の推定値 $\hat{u}_i$ は，f_i と積分項からなるから，

$$\hat{u}_i(k)=\hat{f}_i(k)+F_i{}^2\Delta t\sum_{i=0}^{k}[\tilde{y}(k)-y_r(k)] \tag{24}$$

で与えられている．

ここでの解析は Δt m sec を単位時間とするとき測定時間ごとに出力を測定し，その結果(24)に基づいた制御則を計算し加え，更に次の制御則の為に既め計算出来る部分の計算をする．このとき測定時間と制御則の間に遅れ時間 δ が生ずる．このためシステム(16)の

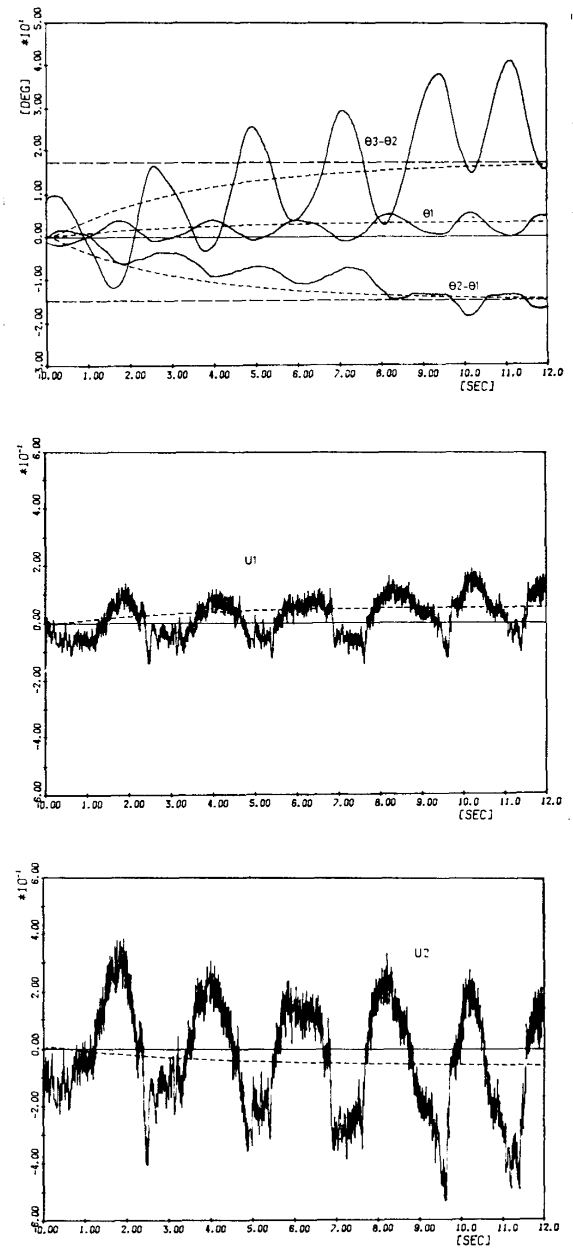

Fig. 5 Measured data of attitude control

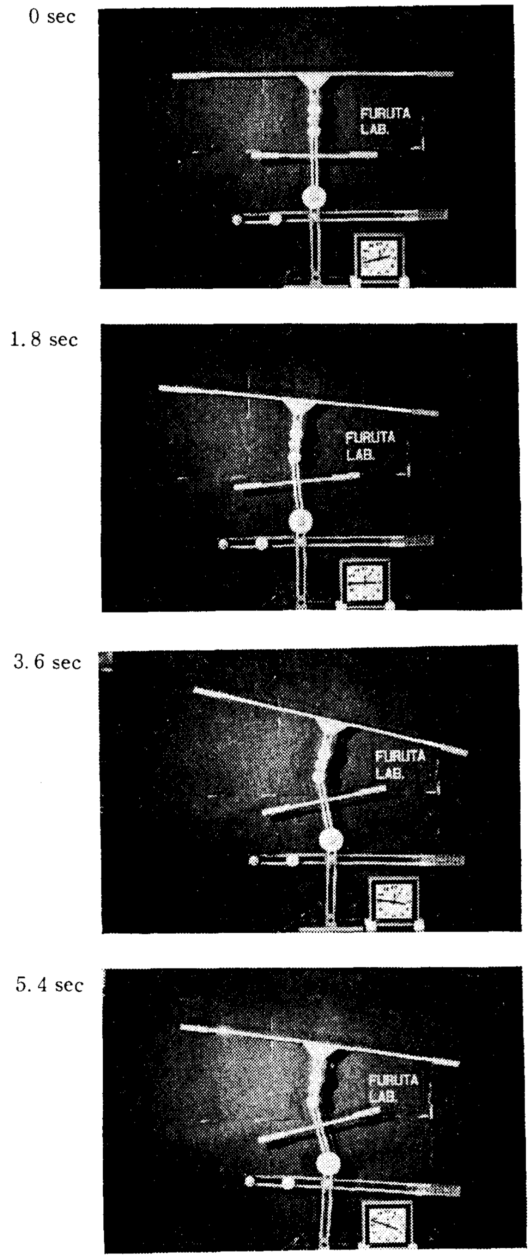

Photo. 1 Attutude control of triple inverted pendulum

測定 $k\Delta t$ における状態を $\tilde{x}(k)$, $k\Delta t+\delta$ に与えられる制御則を $u(k)$ とすると

$$\tilde{x}(k+1)=\Phi\tilde{x}(k)+\Gamma_1 u(k-1)+\Gamma_2 u(k) \qquad (25)$$

で与えられる．ただし

$$\Phi=e^{A\Delta t}$$

$$\Gamma_1=\int_{k\Delta t}^{k\Delta t+\delta} e^{A[(k+1)\Delta t+\delta-\tau]}\,Bd\tau$$

$$=\int_0^{\delta} e^{A(\tau+\Delta t)}Bd\tau$$

$$\Gamma_2=\int_{k\Delta t+\delta}^{(k+1)\Delta t} e^{A[(k+1)\Delta t+\delta-\tau]}Bd\tau$$

$$=\int_0^{\Delta t-\delta} e^{A\tau}Bd\tau$$

(25)は書き直すと

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}(k+1)\\ u\ \ (k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi & \Gamma_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\ \ (k)\\ u(k-1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Gamma_2\\ I\end{bmatrix}u(k)$$

(26)

と書けるが本論文で使用したように

$$u(k)=F\tilde{x}(k) \qquad (27)$$

なる制御則を用いると(26)のシステムの極は

CONTROL TIME = 0.00000000D 0

POLES OF DIGITALLY CONTROLED SYSTEM

NO.	REAL	IMAGINARY
(1)	9.98438541D -1	0.00000000D 0
(2)	9.97867572D -1	0.00000000D 0
(3)	9.80454257D -1	1.48784491D -3
(4)	9.80454257D -1	-1.48784491D -3
(5)	9.71973076D -1	8.41511448D -3
(6)	9.71973076D -1	-8.41511448D -3
(7)	9.22331154D -1	3.31222167D -2
(8)	9.22331154D -1	-3.31222167D -2
(9)	0.00000000D 0	0.00000000D 0
(10)	0.00000000D 0	0.00000000D 0

SAMPLING TIME = 7.00000000D -3

CONTROL TIME = 1.00000000D -3

POLES OF DIGITALLY CONTROLED SYSTEM

NO.	REAL	IMAGINARY
(1)	9.98438221D -1	0.00000000D 0
(2)	9.97867763D -1	0.00000000D 0
(3)	9.80623023D -1	1.50781396D -3
(4)	9.80623023D -1	-1.50781396D -3
(5)	9.71521339D -1	8.41057672D -3
(6)	9.71521339D -1	-8.41057672D -3
(7)	9.22058835D -1	3.38916831D -2
(8)	9.22058835D -1	-3.38916831D -2
(9)	1.58580663D -2	0.00000000D 0
(10)	1.05101417D -2	0.00000000D 0

CONTROL TIME = 2.00000000D -3

POLES OF DIGITALLY CONTROLED SYSTEM

NO.	REAL	IMAGINARY
(1)	9.98437905D -1	0.00000000D 0
(2)	9.97867951D -1	0.00000000D 0
(3)	9.80777097D -1	1.50974225D -3
(4)	9.80777097D -1	-1.50974225D -3
(5)	9.71079117D -1	8.39841673D -3
(6)	9.71079117D -1	-8.39841673D -3
(7)	9.21674590D -1	3.46636604D -2
(8)	9.21674590D -1	-3.46636604D -2
(9)	3.16299523D -2	0.00000000D 0
(10)	2.09763575D -2	0.00000000D 0

Table 2 Poles of the digital control systems without and with delay in control action

$$\det\left(Iz-\begin{bmatrix}\Phi+P_2F_1, & \Gamma_1+P_2F_2\\ F_1\quad , & F_2\end{bmatrix}\right)=0 \tag{28}$$

の根で与えられる．$\Delta t=7$ m sec のとき δ によって (19) の制御則による (28) の根の変化を **Table 2** に $\delta=0$，1, 2 m sec について示した．これから本論文で構成したデジタル制御系では δ をほとんど考慮しなくてよいことがわかる．

5. 結論

本研究は状態空間に基づいて設計された制御系による関節部にトルクを加えて重倒立振子の姿勢制御を行ったものである．システムが不安定で強い非線形性をもつにもかかわらず線形モデルに基づいて設計されたサーボ系は十分頑強であることがわかった．これは，類似の実機械システムの制御系設計のある意味でシミュレーションと考えられ，ここで示した手順が実システムの制御系設計にも有効であることを示した．

参考文献

1) 森，西原，古田：倒立振子用ハイブリット制御系，計測自動制御学会論文集，2—4，482/487 (1976)

2) K. Furuta, T. Okutani, H. Sone : Computer Control of a Double Inverted Pendulum, Computer & Elec. Eng., 5, 67/84 (1978)

3) 岡崎，小林，早勢：関節部の回転調節による倒立2重振子の安定化，計測自動制御学会第8回制御理論シンポジウム (1979)

4) 古田，梶原：制御系のための CAD，計測と制御，18-9，777/786 (1879)

5) E. J. Davison : The Output Control of Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Unmeasurable Arbitrary Disturbances, IEEE AC17-5 (1972)