

誘導機の自励振動現象の解析<sup>†</sup>

黒 杭 宏\*

**ABSTRACT** When an induction motor generates a self-exciting oscillation, the induction motor's performance is expressed in the form of a closed-loop control system. Therefore, characteristics of the oscillation are analyzed by means of the Nyquist stability criteria.

If the phase angle characteristics of the induction motor partially cross a line of  $-180$  degrees, a self-exciting oscillation in the induction motor may be caused by choosing the amplitude of driving voltage, because the amplitude of gain characteristics of the system can be changed by changing the amplitude of the driving voltage independently of the phase angle characteristics.

Almost no induction motors which have power rate up to a few hundred watts will generate self-exciting oscillation, since the curves do not cross the line of  $-180$  degrees. The curves of almost all bigger ones cross this line, but self-exciting oscillation does not occur in these induction motors since the driving voltage required for a self-exciting oscillation to occur must be around ten times the rating voltage.

In the case of using induction motors in control systems, the induction motors require a quick response. But it is dangerous to reduce the moment of inertia of the rotor system, or to raise the driving frequency, because these make the induction motors unstable.

## 1. まえがき

誘導機はトルク・スピード特性が運転領域（同期速度近く）で右下がり特性を持つために、従来から安定な機器であると考えられてきた。しかし、これはあくまで静特性の面からのみいえることであり、駆動条件によっては自励振動が発生することを指摘した報告がなされている。

その一つに、D. J. N. Limebeer 氏は直列コンデンサにより給電された大形の誘導機が非同期共振特性を持っており、その共振点で強い振動が発生することを報告している。この報告によると、振動の周波数は給電回路のコンデンサと誘導機の励磁リアクタンスの共振周波数でその最低値が定まり、最高値はこのコンデンサと回転子拘束時のリアクタンスの共振周波数で与えられるとしている。さらに、回転子の慣性モーメントがある程度大きくないと共振現象が十分に育たず、

誘導機は安定に運転されるとしている。また、この振動の抑制はコンデンサに並列抵抗を挿入して回路の  $Q$  を下げることににより可能であることを示している<sup>1)2)</sup>。

次に、木下氏は長距離の低圧ケーブルで給電された誘導機が自励振動が発生すること、およびこのケーブルの代りに高抵抗を使っても同様な現象が発生することを紹介している。また、誘導機が同期速度で回転していれば、界磁巻線を短絡した同期機であると考えることができると仮定して、同期機の理論をこれに適用している。その結果、この自励振動は電機子抵抗の存在によって、電機子反作用が通常の場合とは逆に作用して振動が発生すると結論している<sup>3)</sup>。

上記の2論文の内、前者はコンデンサと誘導機巻線のインダクタンスの共振により発生する振動であるのに対して、後者は誘導機自身が帰還ループを持ち、このループが不安定になることから振動が発生するものである。これに対して、本論文は原理的に後者に属し、帰還ループの安定度をナイキストの判別法により解析したものである。また、振動の解析に当たって文献3)では同期機の理論が適用されたのに対して、本論文は誘導機の理論式中の回転子の回転速度へ連続振動を与えた時に発生する振動トルク特性から帰還ループの

An Analysis of Self Exciting Oscillation in Induction Motors. By Hiroshi Kurokui (Hiroshima Institute of Technology)

\* 広島工業大学電子工学科

† 1983年10月3日受付

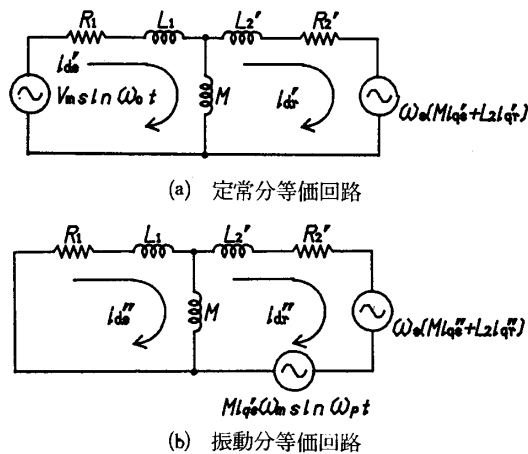


図1 自動振動の等価回路

特性を解析したものである。このような振動特性の解析法はすでに報告したところの2相サーボモータの第2調波振動の消去法の中で紹介した<sup>10)</sup>。これは定常的な振動を発生している誘導機の振動の振幅が非常に小さい場合に限って回転速度を一定値とすることにより誘導機の理論式を線形化するものである。

一方、誘導機の過渡特性の解析は上記の方法以外にアナログ計算機、ルンゲクッタ法等を使った近似値解を求める方法が従来多く用いられて来た<sup>4)~9)</sup>。これ等の方法は主に誘導機の始動特性、負荷変動特性、駆動電圧特性、不平衡始動特性等の検討に応用されてきた。本論文においてもルンゲクッタ・シミュレーションにより自動振動特性の解析を行ない、本論文の理論値の評価に利用した。

## 2. 自動振動の基本式

$d$ - $q$  軸法に基づく誘導機の基本式より、回転子が $\omega_p$ の角周波数の振動を持つ場合の基本式は<sup>11)</sup>

$$\begin{aligned} v_{ds} &= Z_1(p)i_{ds} + PMi_{dr} \\ v_{qs} &= Z_1(p)i_{qs} + PMi_{qr} \\ 0 &= Z_2(p)i_{dr} + PMi_{ds} + \omega_r(Mi_{qs} + L'_2i_{qr}) \\ 0 &= Z_2(p)i_{qr} + PMi_{qs} - \omega_r(Mi_{ds} + L'_2i_{dr}) \end{aligned} \quad (1)$$

で表すことができる。ただし、 $Z_1(p) = R_1 + PL_1$ ,  $Z_2(p) = R_2' + PL_2'$ ,  $P = d/dt$ ,  $R_1$  と  $R_2'$  は1次と2次の抵抗,  $L_1$  と  $L_2'$  は1次と2次の自己インダクタンス,  $M$  は相互インダクタンス,  $\omega_r = \omega_s + \omega_m \sin \omega_p t$  で  $\omega_s$  は運転時の回転子平均角速度,  $\omega_m$  は自動振動の振幅,  $\omega_p$  は自動振動の角周波数,  $v_{ds}$  と  $v_{qs}$  は駆動電圧で平衡2相電圧,  $i_{ds}$ ,  $i_{qs}$ ,  $i_{dr}$ ,  $i_{qr}$  はそれぞれ $d$ 軸と $q$ 軸の1次と2次回路の電流である。

(1)式の電流  $i_{lm}$  ( $lm = ds, qs, dr, qr$ ) を定常分  $i'_{lm}$  と自動振動分  $i''_{lm}$  に分けて、(付録(A.3)式)

$$i_{lm} = i'_{lm} + i''_{lm} \quad (2)$$

とすれば、(1)式は次の2つの式に分解できる。

$$\begin{aligned} v_{ds} &= Z_1(p)i'_{ds} + PMi'_{dr} \\ v_{qs} &= Z_1(p)i'_{qs} + PMi'_{qr} \\ 0 &= Z_2(p)i'_{dr} + PMi'_{ds} + \omega_s(Mi'_{qs} + L'_2i'_{qr}) \\ 0 &= Z_2(p)i'_{qr} + PMi'_{qs} - \omega_s(Mi'_{ds} + L'_2i'_{dr}) \end{aligned} \quad (3)$$

自動振動分について無負荷運転時に  $i'_{ls} \gg i'_{lr}$  ( $l = d, q$ )

とすれば、(付録(A.4)式)

$$\begin{aligned} 0 &= Z_1(p)i'_{ds} + PMi''_{dr} \\ 0 &= Z_1(p)i'_{qs} + PMi''_{qr} \\ -\omega_m(\sin \omega_p t)Mi'_{qs} &= Z_2(p)i''_{dr} + PMi''_{ds} \\ &\quad + \omega_s(Mi''_{qs} + L'_2i''_{qr}) \\ \omega_m \sin \omega_p t Mi'_{ds} &= Z_2(p)i''_{qr} \\ &\quad + PMi''_{qs} - \omega_s(Mi''_{ds} + L'_2i''_{dr}) \end{aligned} \quad (4)$$

を得る。(3),(4)式の $d$ 軸分のみを図示すると図1(a)(b)のようになる。同図(a)は定常分トルクを発生する回路で、電源  $v_{ds} = V_m \sin \omega_0 t$  より電力が供給されるのに対して、同図(b)の自動振動分電流は  $\omega_m \sin(\omega_p t) Mi'_{qs}$  の電圧により供給される。この電圧は(3)式より求めた電流  $i'_{qs}$  を使って次のように書ける。(付録(A.6),(A.7)両式)

$$\begin{aligned} \omega_m \sin(\omega_p t) Mi'_{qs} &= \frac{\omega_m M V_m}{2} \left\{ -\frac{A_{12}(j\omega_0)}{D(j\omega_0)} \sin(\omega_0 t - \omega_p t) \right. \\ &\quad + \frac{A_{11}(j\omega_0)}{D(j\omega_0)} \cos(\omega_0 t - \omega_p t) + \frac{A_{12}(j\omega_0)}{D(j\omega_0)} \sin(\omega_0 t + \omega_p t) \\ &\quad \left. - \frac{A_{11}(j\omega_0)}{D(j\omega_0)} \cos(\omega_0 t + \omega_p t) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式は  $\omega_0 - \omega_p$  と  $\omega_0 + \omega_p$  の2つの角周波数を持つ電圧である。この回路の2次電流  $i''_{dr}$  を上記2種類の電源毎に分けて求めると、(付録(A.10)式)

$$\begin{aligned} i''_{dr} &= F_1(j\omega_0 - j\omega_p) \sin(\omega_0 t - \omega_p t) \\ &\quad - F_2(j\omega_0 - j\omega_p) \cos(\omega_0 t - \omega_p t) \\ &\quad - F_1(j\omega_0 + j\omega_p) \sin(\omega_0 t + \omega_p t) \\ &\quad + F_2(j\omega_0 + j\omega_p) \cos(\omega_0 t + \omega_p t) \end{aligned} \quad (6)$$

で表せる。一方、自動振動トルク  $\tau'$  は、(付録(A.12)式)

$$\begin{aligned} \tau' &= M(i'_{ds}i''_{qr} - i'_{qs}i''_{dr}) \\ &= K_1 \frac{A_{11}^2(j\omega_0) + A_{12}^2(j\omega_0)}{D^2(j\omega_0)} \\ &\quad \left[ \left\{ W_1(j\omega_0 - j\omega_p) \sin(\omega_p t) + W_2(j\omega_0 - j\omega_p) \cos(\omega_p t) \right\} \right. \\ &\quad \left. \frac{Z_1(j\omega_0 - j\omega_p)}{X^2(j\omega_0 - j\omega_p) + Y^2(j\omega_0 - j\omega_p)} \right. \\ &\quad + \left\{ W_1(j\omega_0 + j\omega_p) \sin(\omega_p t) - W_2(j\omega_0 + j\omega_p) \cos(\omega_p t) \right\} \\ &\quad \left. \frac{Z_1(j\omega_0 + j\omega_p)}{X^2(j\omega_0 + j\omega_p) + Y^2(j\omega_0 + j\omega_p)} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

となる。(7)式は  $\omega_p$  の角周波数を持つ振動トルクで

あり、その振幅と位相角は  $\omega_0$  と  $\omega_p$  の関数となっている。

### 3. 誘導機の帰還ループの安定度

帰還ループの伝達数は(7)式の振動トルクと次の運転方程式で与えられる。

$$JP\omega_r' = \tau'$$

ここに、 $J$ は回転系の慣性モーメント、 $\omega_r'$ は振動トルク  $\tau'$ によって生じた回転子の速度変動分である。ここで、(7)、(8)両式は  $\omega_r' = \omega_m \sin \omega_p t$  なので閉ループ系を構成することになる。すなわち、このループは図2(a)に示すように、回転子の速度変動分が  $\omega_m \sin \omega_p t$  であればこれによりトルク変動  $\tau'$ を生じる。このトルク変動は速度変動  $\omega_r'$ の形で回転子に速度変動を与えることになる。ここで、 $\tau'$ により発生した速度変動  $\omega_r'$ は  $\omega_m \sin \omega_p t$ に等しいので、同図(a)は同図(b)に示すように正帰還閉ループ系である。したがって、このループ・ゲインが  $0dB$ 以上で、かつ位相ずれが  $0^\circ$ であれば、この系は振動を持続することになる。この事は負帰還ループの制御理論でいわれているところの、系の位相遅れが  $-180^\circ$ の角周波数におけるループ・ゲインが  $0dB$ 以上になるとその系が不安定になる事と同様な意味を持つ。

このような安定限界を求めるためのループ・ゲイン  $A$ と位相ずれ  $\theta$ は図2(b)より得ることができる。すなわち、

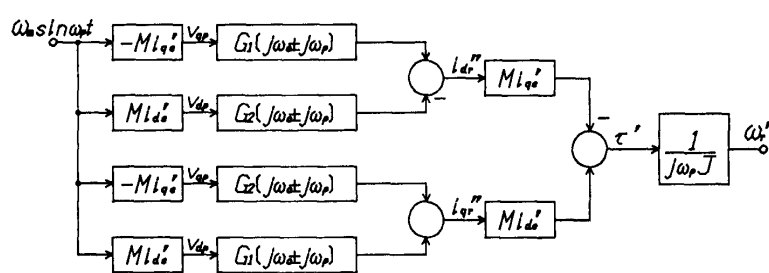
$$A = \left| \frac{M^2}{j\omega_p J} G_1(j\omega_0 \pm \omega_p) \left\{ \dot{I}_{ds}^2(j\omega_0) + \dot{I}_{qs}^2(j\omega_0) \right\} \right| \quad (9) \downarrow$$

$$\theta = \left[ \angle G_1(j\omega_0 \pm \omega_p) \left\{ \dot{I}_{ds}^2(j\omega_0) + \dot{I}_{qs}^2(j\omega_0) \right\} \right] - \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

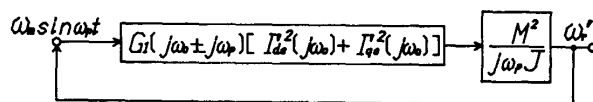
で与えられる。ここに、(10)式中の  $\pi/2$ の値は(8)式の位相遅れである。(9)、(10)両式を使って計算した1例を図3に示す。図中の実線はゲイン特性で、駆動電圧の大きさによりループ・ゲインが変化することを示している。このゲイン変化の原因は図2(b)に示すようにループ中に  $\dot{I}_{ds}^2 + \dot{I}_{qs}^2$ を含んでおり、これが  $V_m^2$ の関数であるためである。一方、位相特性は(10)式で求まるが、 $V_m$ と  $J$ はこの式に含まれていないために、この特性に影響を与えない。このことは図3に点線で示した位相特性が1本であることからいえる。次に電動機定数の1例を使って自励振動の発生条件を具体的に説明する。

### 4. 自励振動発生例

一般に市販されている誘導機で、前述の自励振動を



(a) 誘導機の振動系伝達関数



(b) 振動系の閉ループ伝達関数

図2 振動系の伝達関数

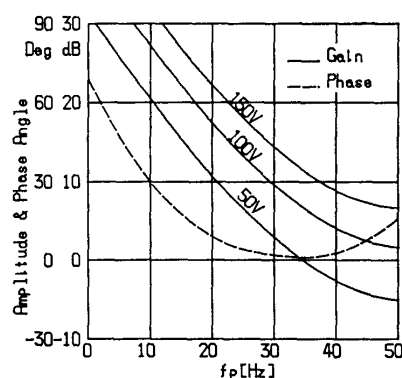


図3 振動回路の周波数特性

表1 市販機とモデル機の電動機定数

種類	2相サーボモータ ESB-25	モデル機	三相誘導機 3.7KW
定数名			
1次抵抗	21.2Ω	21.2Ω	0.3Ω
2次抵抗	115Ω	5.0Ω	0.3Ω
1次インダクタンス	0.628H	0.628H	0.055H
2次インダクタンス	0.510H	0.510H	0.051H
相互インダクタンス	0.479H	0.479H	0.047H
慣性モーメント	0.12kgcm <sup>2</sup>	0.12kgcm <sup>2</sup>	410kgcm <sup>2</sup>
自励振動を生じる駆動電圧	安定	84~124V	1310~2080V
駆動周波数	50, 60Hz	50Hz	50Hz

発生するものは皆無である。そこで、この節では市販の誘導機の自励振動発生条件がどの位置にあるかを示すために、市販の誘導機の定数の一部を変えたモデル機を使って自励振動の発生条件を検討してみる。

表1はN社製の25W級の2相サーボモータの定数を示している。当然の事ながら、この誘導機はこのままでは自励振動を発生する要素をまったく持っていない。そのために、同表中の  $R'_2$ のみを115Ωから5Ωに変えたモデル機を考えて、この定数により問題

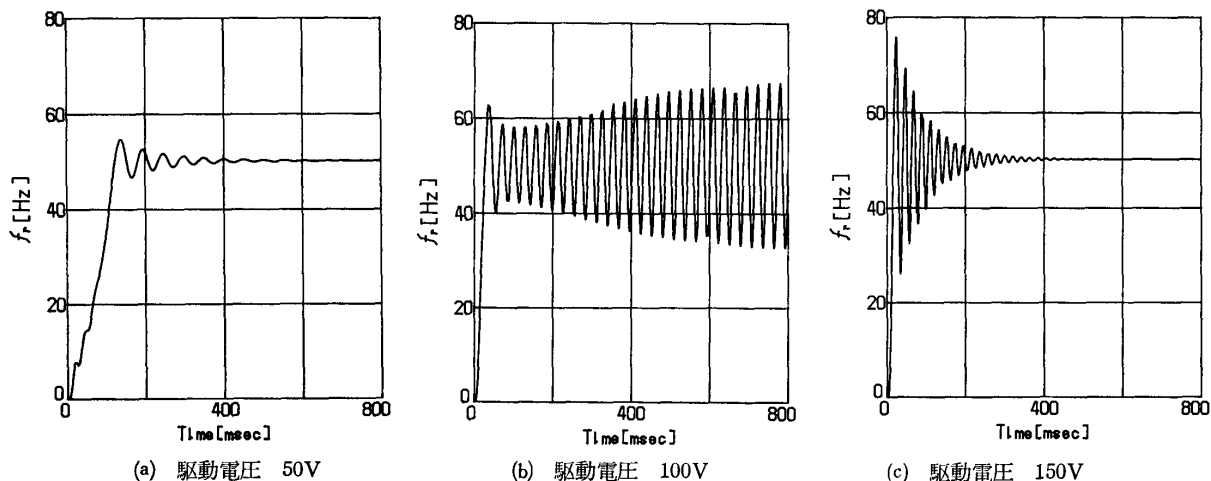


図4 誘導機のステップ応答

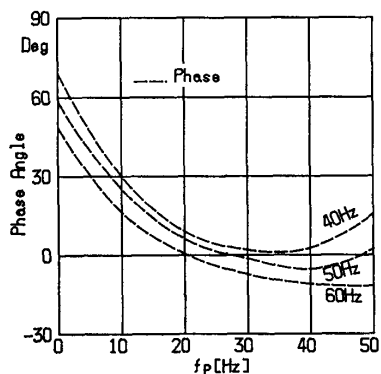


図5 振動回路の位相特性

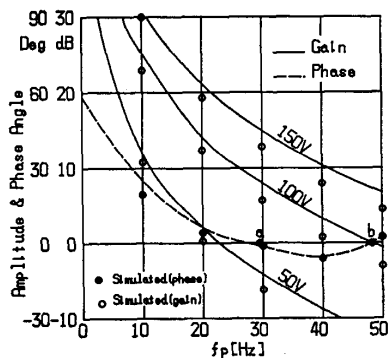


図6 自励振動する場合の周波数特性

の検討を進める。

図4はモデル機の駆動電圧をステップ状に印加した時の回転子の応答を(8), (A.1)と(A.2)式からルンゲクッタ・シミュレーションにより求めたものである。これ等の内、駆動電圧が100Vの(b)図のみが連続振動を発生しており、(a), (c)図の50V, 150Vの時には振動が早い時期に収斂している。すなわち、モデル機は駆動電圧が50Vと150Vの間で自励振動の発生の可能性を持っていることになる。次に、このよ

うな自励振動を発生する領域(不安定領域とも呼ぶ)について検討を加える。

図5は(10)式の駆動周波数 $\omega_0$ を変化した時の入力角周波数 $\omega_p$ に対する $\theta$ の特性を示したものである。図中の $f_0$ が40Hzの場合には $\theta$ の値は $0^\circ$ の線を切らない。このことは $f_0$ を40Hzとすれば、いかなる駆動電圧を加えても自励振動を生じないことを意味する。この点について、ルンゲクッタ・シミュレーションによっても確認したが、自励振動の発生は認められなかった。次に、50Hzの場合は位相特性が $0^\circ$ を切っているため、自励振動を発生する。ここで、発生する自励振動の角周波数は位相特性が $0^\circ$ を切る角周波数となることから、図5では32Hzであり、図4(b)のシミュレーションのそれは35Hzで、両者は非常に近い値を示している。

以上は自励振動の現象を中心に説明したが、次にナイキストの判別法を使って説明しよう。図4と同一条件で系の開ループ伝達関数を求めると図6のようになる。さらに、制御理論で言うGH平面に、これを書くと図7のようになる。同図の3本の特性曲線の内、100Vの曲線は $-1+j0$ の点を囲むため、系は不安定で自励振動を発生する。すなわち、図6のゲイン曲線が位相曲線の $0^\circ$ を超える2点aからbの間を切るような駆動条件で駆動された時、特性曲線は $-1+j0$ の点を囲み系は不安定になる。図6からこの値を求めると63Vから100Vまでの間になる。試みにルンゲクッタ・シミュレーションでこれを求めると84Vから124Vとなり理論値と良く一致する。

## 5. 自励振動と電動機定数の関係

前節においては駆動条件と自励振動の関係を説明し

たが、この節では電動機定数に対する自励振動の発生条件について検討を加えることにより、一般の誘導機と自励振動発生の関係を結びつける。

図7で説明したように、位相特性が $0^\circ$ を切らない誘導機は絶対に自励振動を発生しない。また、 $0^\circ$ を切る位相特性を持つ誘導機は駆動電圧の値を変えることにより、かならず自励振動を発生する領域を持つことになる。したがって、誘導機が自励振動を発生するか否かは、まず、その位相特性を検証しなければならない。次にこの方法を示す。

誘導機の位相特性は(10)式で表せるが、この式は複雑な形をしているため、次のような方法でこれを簡単化してみる。まず、誘導機の等価回路の1次と2次インダクタンスは等しいとして、次式で表せるとする。

$$L_1 = L_2 = L = l + M \quad (11)$$

ここに、 $l$ は1次または2次の漏れインダクタンスである。また、1次と2次の抵抗値もほぼ同じ値のものが多いために、

$$R_1 \doteq R \doteq R_2 \quad (12)$$

で与えられるものとする。さらに、一般の誘導機は $l \ll M$ のものが多く、また、 $R \ll \omega_0 M$ の条件も殆どどの機械が持っていることから、これ等の関係を使って(9)式の $G_1(j\omega)$ は、

$$G_1(j\omega) \doteq \frac{(-\omega^2 \beta + j\omega \alpha)(R + j\omega L)}{(-\omega^2 \beta + j\omega \alpha)^2 + \omega_s^2 (RL + j\omega \beta)^2} \quad (13)$$

で与えられる。また、 $\alpha$ と $\beta$ は

$$\alpha = R_1 L_2' + R_2' L_1 = 2RL$$

$$\beta = L_1 L_2' - M^2 = (l + M)(l + M) - M^2 \doteq 2lM \quad (14)$$

で表すことができる。したがって、(13)式の分母の位相角 $\theta_d(\omega)$ は、

$$\theta_d(\omega) = \tan^{-1} \frac{2\omega^3 L \beta R}{(\omega RL)^2} \doteq \tan^{-1} \frac{4\omega l}{3R} \quad (15)$$

となる。また、分子の位相角 $\theta_n(\omega)$ は、

$$\theta_n(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega \alpha}{-\omega^2 \beta} + \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \doteq \tan^{-1} \frac{R}{\omega l} + \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

で与えられる。ここに、 $R \ll \omega L$ のため $\tan^{-1}(\omega L/R) \doteq \pi/2$ となる。次に電流 $I_{s1}(j\omega_0)$ と $I_{s2}(j\omega_0)$ の位相角は $A_{11}$ 、 $A_{12}$ 、 $\angle$ により決まる。これ等の位相角は

$$\angle A_{11} \doteq \tan^{-1}(3R/\omega M) \doteq 0$$

$$\angle A_{12} = -\pi/2$$

$$\angle \Delta = \tan^{-1}(4\omega l/3R) \quad (17)$$

となり、(15)、(16)、(17)式はいずれも $\omega l/R$ の関数である。これ等の式を使って、ループの位相角 $\theta_0$ は、

$$\theta_0 = \tan^{-1} \frac{|G_1(j\omega_1)| \sin \theta_{\omega_1} + |G_1(j\omega_2)| \sin \theta_{\omega_2}}{|G_1(j\omega_1)| \cos \theta_{\omega_1} + |G_1(j\omega_2)| \cos \theta_{\omega_2}}$$

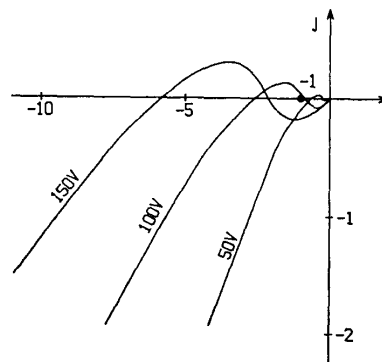


図7 ナイキスト線図による安定判別

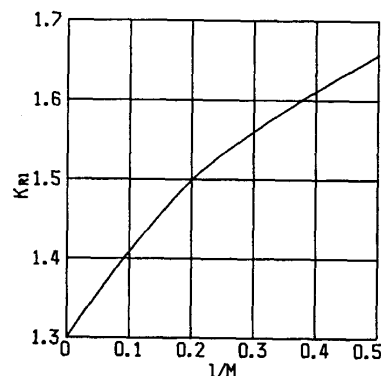


図8  $\omega l/R$  の値と  $1/M$  の関係

$$-2 \tan^{-1} \frac{4\omega l}{3R} - \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

で与えられる。ここに、 $\omega_1 = \omega_0 - \omega_p$ 、 $\omega_2 = \omega_0 + \omega_p$ 、 $\theta_{\omega_1} = \theta_n(\omega_1) - \theta_d(\omega_1)$ 、 $\theta_{\omega_2} = \theta_n(\omega_2) - \theta_d(\omega_2)$ である。この式を満足する $\omega_0 l/R$ の値 $K_{Rl}$ を求めると、

$$K_{Rl} = \omega_0 l/R \doteq 1.3 \quad (K_{Rl} > 1.3 \text{ で } 0^\circ \text{ を切る}) \quad (19)$$

となり、(19)式は位相特性が $0^\circ$ を切るか否かの条件を与える。図8は(10)式を使って位相特性が $0^\circ$ を切る境界点の $K_{Rl}$ の値を求めたものである。図の $K_{Rl}$ の値は(19)式の1.3より $l/M$ の増加と共に微増している。これは(14)式を導くに当り $l \ll M$ の近似を行なったことによるものである。このように $K_{Rl}$ の値は $\omega_0 l/R$ と $l/M$ により変化するが、1次と2次抵抗が

$$R_1 \doteq R \doteq R_2 \quad (20)$$

の場合にもまた微少変化を生じる。すなわち、(15)式の右辺と(17)式の $\angle \Delta$ の右辺の分母の $3R$ が、

$$3R = 2R_1 + R_2 \quad (21)$$

のようになり、さらに、(16)式の右辺は

$$\theta_n(\omega) \doteq \tan^{-1} \{(R_1 + R_2)/2\omega l\} + \pi/2 \quad (22)$$

の形で表せる。そのため、 $R_1 \doteq R_2$ の時には(20)式の $R$ の値は

$$\begin{aligned} R' &= 2R_1/3 + R_2/3 \\ R'' &= R_1/2 + R_2/2 \\ R &= (R'' + 3R')/4 \end{aligned} \quad (23)$$

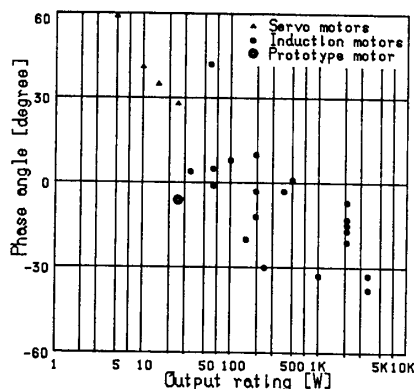


図9 定格出力と位相特性

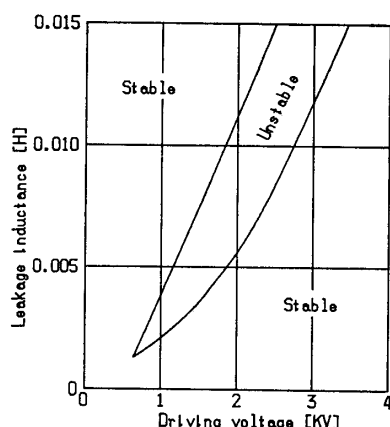


図10 自励振動を生じる駆動電圧の例

で求めなければならない。ここに、 $R'$  の係数の3は(10)式中の  $\Delta$  が  $\Delta^2$  で分母に有り、かつ、(15)式も分母に有るため  $R'$  は  $R' + 2R' = 3R'$  の重みを持つことになり(23)式を得る。このようにして得た  $R$  の値から(19)式または図8を使って位相特性の安定判別を行なうことができる。

次にループ・ゲイン特性について検討する。この値は(9)式から求めることができる。すなわち、図6の位相特性が  $0^\circ$  を切るa点とb点の角周波数を  $\omega_{pa}$  と  $\omega_{pb}$  とすれば、自励振動を発生するゲイン条件は  $odB$  であるために、

$$A_a = |G_1(j\omega_{pa}) \{ \dot{I}_{d1}^2(j\omega_0, V_{ma}^2) + \dot{I}_{q1}^2(j\omega_0, V_{ma}^2) \} | M^2 / J\omega_{pa} = 1$$

$$A_b = |G_1(j\omega_{pb}) \{ \dot{I}_{d1}^2(j\omega_0, V_{mb}^2) + \dot{I}_{q1}^2(j\omega_0, V_{mb}^2) \} | M^2 / J\omega_{pb} = 1 \quad (24)$$

となり、 $V_{ma}$  から  $V_{mb}$  の間の駆動電圧を加えると自励振動を発生する。次に前記した位相条件とゲイン条件を使った実例を示す。

図9は市販の誘導機について(10)式から最大位相ずれを生じる位相角を求めて、その値と定格出力の関係を示したものである。この図の  $0^\circ$  を境に上側は安定で

下側は不安定の可能性を持つものである。図より100Wを境に大形機は不安定、小形機は安定になっている。すなわち、小形機は始動トルクを重視されるものが多く、一般に、 $R > \omega l$  に設計されるのに対して大形機では効率を重視するため  $R < \omega l$  のようになっているため、このような結果になった。

次にゲイン条件について検討する。図10は表1の3.7KWの機械について、その漏れインダクタンス  $l$  の変化に対する不安定駆動電圧領域を示したものである。図より  $l$  の減少にともない不安定になる駆動電圧は低下している。これは(9)式の  $G_1(j\omega_0)$  と  $\dot{I}_{d1}^2, \dot{I}_{q1}^2$  中の  $\Delta^2(j\omega_0)$  を(13)式の形で近似すれば、

$$A \approx 2\omega L \sqrt{R^2 + (\omega l)^2} \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} / \omega^2 L^2 R (\sqrt{(3R)^2 + (4\omega l)^2})^3 \quad (25)$$

となり、 $l$  の減少に対して  $A$  の値が大きくなるためである。また、 $l$  の非常に小さい部分で系は安定領域に入る。なお、図10の結果は(A.1)、(A.2)、(8)式を使ってルンゲクッタ・シミュレーションにより求めたものである。

## 6. まとめ

誘導機が自励振動を発生している場合の、振動特性を表す式を導いた。その結果、誘導機は正帰還を持つ閉ループ系として取扱うことができ、閉ループ系の位相特性が不安定な系はその駆動電圧または回転子系の慣性モーメントの値を変えると、かならず自励振動を発生することが明らかになった。これは誘導機の  $\omega l / R$  の値が1.3より大きければ位相特性が不安定要素を持つことになり、駆動電圧、または回転子系の慣性モーメントの大きさを変えることにより、ループゲインを位相特性の不安定領域内で  $odB$  にすると自励振動を発生するものである。

この理論を市販の誘導機に適用した結果、数百W以下の機械は位相特性が定格周波数で安定なのに対して、これより大きい機械は定格周波数で位相特性に不安定要素を持ち、駆動電圧の大きさ、または回転子系の慣性モーメントの値いかんにより自励振動を発生する可能性を持っていることがわかった。

これ等の理論により求めた値はルンゲクッタ・シミュレーションにより求めた値と比較した。その結果、この理論がルンゲクッタ・シミュレーションと良く一致することが明らかになり、誘導機の自励振動発生条件の解析に有用であることが立証できた。

## 付録

$d-q$  軸法によると, 平衡巻線を持つ誘導機の電圧方程式とトルクの式は次のようになる<sup>11)</sup>.

$$\begin{pmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ v_{dr} \\ v_{qr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(p), & 0, & PM, & 0 \\ 0, & Z_1(p), & 0, & PM \\ PM, & \omega_r M, & Z_2(p), & \omega_r L'_2 \\ -\omega_r M, & PM, & -\omega_r L'_2, & Z_2(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\tau = M(i_{dr}i_{qs} - i_{ds}i_{qr}) \quad (\text{A.2})$$

今,  $\omega_r = \omega_s + \omega_m \sin(\omega_p t)$  とする. ただし,  $\omega_s$  は無負荷回転数,  $\omega_m$  は自励振動の振幅,  $\omega_p$  は自励振動の角周波数である. また,  $v_{ds} = V_m \cos(\omega_0 t)$ ,  $v_{qs} = V_m \sin(\omega_0 t)$ ,  $v_{dr} = v_{qr} = 0$  とし, 各電流を  $\omega_s$  の回転数を与える定常分電流  $i'_{em} (em = ds, qs, dr, qr)$  と自励振動を与える振動分電流  $i''_{em}$  に分けると, 定常分電流は,

$$\begin{pmatrix} V_m \cos \omega_0 t \\ V_m \sin \omega_0 t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(p), & 0, & PM, & 0 \\ 0, & Z_1(p), & 0, & PM \\ PM, & \omega_s M, & Z_2(p), & \omega_s L'_2 \\ -\omega_s M, & PM, & -\omega_s L'_2, & Z_2(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i'_{ds} \\ i'_{qs} \\ i'_{dr} \\ i'_{qr} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

となる. また, 振動分電流は,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{qp} \\ v_{dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(p), & 0, & PM, & 0 \\ 0, & Z_1(p), & 0, & PM \\ PM, & \omega_s M, & Z_2(p), & \omega_s L'_2 \\ -\omega_s M, & PM, & -\omega_s L'_2, & Z_2(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i''_{ds} \\ i''_{qs} \\ i''_{dr} \\ i''_{qr} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

で表せる. ここに,  $v_{dp}$ ,  $v_{qp}$  は回転子に  $\omega_m \sin(\omega_p t)$  の速度変動が生じたために発生した起電力で,

$$\begin{aligned} v_{qp} &= -\omega_m \sin(\omega_p t) \{M(i'_{qs} + i''_{qs}) + L'^2_2(i'_{qr} + i''_{qr})\} \\ v_{dp} &= \omega_m \sin(\omega_p t) \{M(i'_{ds} + i''_{ds}) + L'^2_2(i'_{dr} + i''_{dr})\} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

である. (A.5) 式中の定常電流は無負荷運転時において  $i'_{ds} \gg i'_{dr}$ ,  $i'_{qs} \gg i'_{qr}$  で, かつ, 自励振動の振幅は非常に小さく  $\omega_s \ll \omega_m$  であるとすれば  $i'_{ds} \gg i'_{dr}$ ,  $i'_{qs} \gg i'_{qr}$  であるため (A.5) 式は

$$\begin{aligned} v_{qp} &= -\omega_m M i'_{qs} \sin(\omega_p t) \\ &= -\omega_m M |i'_{qs}| \sin(\omega_0 t + \theta_{qs}) \sin(\omega_p t) \\ &= -\omega_m M |i'_{qs}| \{ \cos(\omega_0 t - \omega_p t + \theta_{qs}) \\ &\quad - \cos(\omega_0 t + \omega_p t + \theta_{qs}) \} / 2 \\ v_{dp} &= \omega_m M |i'_{ds}| \{ \sin(\omega_0 t - \omega_p t + \theta_{ds}) \\ &\quad + \sin(\omega_0 t + \omega_p t + \theta_{ds}) \} / 2 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

で表せる. ここに,  $\theta_{em} = L i'_{em} (em = ds, qs)$ ,  $v_{qp}$ ,  $v_{dp}$  は共に  $\omega_0 - \omega_p$  と  $\omega_0 + \omega_p$  の2つの角周波数を持つ電圧

である.

次に (A.3) 式の各電流を求めると,

$$\begin{aligned} i'_{ds} &= V_m \{ A_{11}(j\omega_0) \cos(\omega_0 t) \\ &\quad - A_{12}(j\omega_0) \sin(\omega_0 t) \} / \Delta(j\omega_0) \\ i'_{qs} &= V_m \{ A_{12}(j\omega_0) \cos(\omega_0 t) \\ &\quad + A_{11}(j\omega_0) \sin(\omega_0 t) \} / \Delta(j\omega_0) \\ i'_{dr} &= V_m \{ A_{13}(j\omega_0) \cos(\omega_0 t) \\ &\quad - A_{14}(j\omega_0) \sin(\omega_0 t) \} / \Delta(j\omega_0) \\ i'_{qr} &= V_m \{ A_{14}(j\omega_0) \cos(\omega_0 t) \\ &\quad + A_{13}(j\omega_0) \sin(\omega_0 t) \} / \Delta(j\omega_0) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

となる. また,  $A_{1j}(j\omega_0)$  と  $\Delta(j\omega_0)$  は

$$\begin{aligned} A_{11}(j\omega_0) &= R_1 R'^2_2 + \omega_s^2 L'^2_2 R_1 - \omega_0^2 L'^2_2 \alpha \\ &\quad - \omega_0^2 \beta R'_2 + j \{ \omega_0 \alpha R'_2 + R_1 R'_2 \omega_0 L'_2 \\ &\quad + \beta L'^2_2 (\omega_s^2 \omega_0 - \omega_0^3) \} \\ A_{12}(j\omega_0) &= -j \omega_0 \omega_s M^2 R'_2 \\ A_{13}(j\omega_0) &= \omega_0^2 M \alpha - \omega_s^2 M L'_2 R_1 - j \omega_0 M \{ R_1 R'_2 \\ &\quad + (\omega_s^2 - \omega_0^2) \beta \} \\ A_{14}(j\omega_0) &= \omega_s M R'_2 Z_1(j\omega_0) \\ \Delta(j\omega_0) &= (R_1 R'_2 - \omega_0^2 \beta)^2 - (\omega_0 \alpha)^2 - (\omega_0 \omega_s \beta)^2 \\ &\quad + (\omega_s L'_2 R_1)^2 + j 2 \omega_0 \times \{ R_1 \omega_s^2 L'_2 \beta \\ &\quad + \alpha (R_1 R'_2 - \omega_0^2 \beta) \} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

である. ここに,  $\alpha = R_1 L'_2 + R'_2 L_1$ ,  $\beta = L_1 L'_2 - M^2$  である.

次に (A.2) のトルクについて検討を加える. 同式の電流を定常分と振動分で表し, さらに, (A.6) 式で使った各電流間の関係を使うと,

$$\begin{aligned} \tau &= M \{ (i'_{dr} + i''_{dr})(i'_{qs} + i''_{qs}) - (i'_{ds} + i''_{ds}) \\ &\quad (i'_{qr} + i''_{qr}) \} \\ &= M \{ i'_{dr} i'_{qs} - i'_{ds} i'_{qr} + i'_{dr} i''_{qs} - i'_{ds} i''_{qr} + i''_{dr} i'_{qs} \\ &\quad - i''_{ds} i'_{qr} + i''_{dr} i''_{qs} - i''_{ds} i''_{qr} \} \\ &\doteq M \{ (i'_{dr} i'_{qs} - i'_{ds} i'_{qr}) + (i'_{qs} i''_{dr} - i'_{ds} i''_{qr}) \} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

の関係を得る. (A.9) 式の第1項目は定常トルクを, また2項目は振動トルクを表している. この式を求めるために  $i''_{dr}$  と  $i''_{qr}$  が必要なので, (A.4), (A.6) 式からこれを求めると,

$$\begin{aligned} i''_{dr} &= \{ v_{qp} X(p) - v_{dp} Y(p) \} Z_1(p) / \{ X^2(p) + Y^2(p) \} \\ &\quad p = j\omega_0 \pm j\omega_p \\ &= F_1(j\omega_0 - j\omega_p) \sin(\omega_0 t - \omega_p t) \\ &\quad - F_2(j\omega_0 - j\omega_p) \cos(\omega_0 t - \omega_p t) \\ &\quad - F_1(j\omega_0 + j\omega_p) \sin(\omega_0 t + \omega_p t) \\ &\quad + F_2(j\omega_0 + j\omega_p) \cos(\omega_0 t + \omega_p t) \\ i''_{qr} &= F_1(j\omega_0 - j\omega_p) \cos(\omega_0 t - \omega_p t) \\ &\quad + F_2(j\omega_0 - j\omega_p) \sin(\omega_0 t - \omega_p t) \\ &\quad - F_1(j\omega_0 + j\omega_p) \cos(\omega_0 t + \omega_p t) \end{aligned}$$

$$-F_2(j\omega_0 + j\omega_p) \sin(\omega_0 t + \omega_p t) \quad (\text{A. 10})$$

ただし,

$$\begin{aligned} F_1(p) &= K \frac{\{X(p)A_{11}(j\omega_0) - Y(p)A_{12}(j\omega_0)\}Z_1(p)}{A(j\omega_0)\{X^2(p) + Y^2(p)\}} \\ F_2(p) &= K \frac{\{X(p)A_{12}(j\omega_0) + Y(p)A_{11}(j\omega_0)\}Z_1(p)}{A(j\omega_0)\{X^2(p) + Y^2(p)\}} \\ X(p) &= R_1 R_2' + P^2 \beta + P\alpha \\ Y(p) &= X_2 \omega_s L_2' + P\omega_s \beta \\ Z_1(p) &= R_1 + PL_1 \\ K &= \omega_m M V_m / 2 \end{aligned} \quad (\text{A. 11})$$

(A. 7), (A. 9), (A. 10) の各式より, 振動分トルク

$\tau'$  は,

$$\begin{aligned} \tau' &= M(i'_{qs} i''_{dr} - i'_{ds} i''_{qr}) \\ &= K_1 \frac{A_{11}^2(j\omega_0) + A_{12}^2(j\omega_0)}{A(j\omega_0)} \\ &\quad \left[ \left\{ W_1(j\omega_0 - j\omega_p) \sin(\omega_p t) + W_2(j\omega_0 - \omega_p) \cos(\omega_p t) \right\} \right. \\ &\quad \times \frac{Z_1(j\omega_0 - j\omega_p)}{X^2(j\omega_0 - j\omega_p) + Y^2(j\omega_0 - j\omega_p)} \\ &\quad \left. + \left\{ W_1(j\omega_0 + \omega_p) \sin(\omega_p t) - W_2(j\omega_0 + j\omega_p) \cos(\omega_p t) \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{Z_1(j\omega_0 + j\omega_p)}{X^2(j\omega_0 + j\omega_p) + Y^2(j\omega_0 + j\omega_p)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A. 12})$$

ここに

$$\begin{aligned} W_1(p) &= X(p) + Y(p) \\ W_2(p) &= X(p) - Y(p) \\ K_1 &= K V_m \end{aligned}$$

である.

## 参 考 文 献

- 1) D. J. N. Limebeer & R. G. Harley: Subsynchronous Resonance of single-cage Induction Motors, *PIEE*, 128, Pt. B, 1, 33/42 (1981)
- 2) D. J. N. Limebeer & R. G. Harley: Subsynchronous Resonance of Deep-bar Induction Motors, *PIEE* 128, Pt. B, 1, 43/51 (1981)
- 3) 木下裕道: 誘導機の負制動現象, *電学論*, 98, 5, 417/424 (1978)
- 4) 松瀬, 西山, 高木: 三相誘導電動機の始動過渡特性に及ぼす高調波電圧の影響, *電学誌*, 91, 7, 1281/1290, (1971)
- 5) 山田重知: 変動負荷を有する系統に接続された誘導電動機の過渡特性に関する考察, *電学誌*, 86, 9, 1540/1549 (1966)
- 6) 江尻正員: 2相サーボモータのトルク変動と振動, *計測自動制御学論*, 1, 2, 189/198 (1965)
- 7) A.K.D. Sarkar & G. J. Berg: Digital Simulation of Three-phase Induction Motors, *Trans. IEEE, PAS-70*, 4, 1031/1037 (1970)
- 8) P. C. Krause: Simulation of Unsymmetrical 2-phase Induction Machines, *Trans. IEEE, PAS-84*, 11 1025/1037 (1965)
- 9) C. N. Weygandt & S. Chapp: Electromechanical Transient Performance of Induction Motors, *AIEE, Trans.* 165, 1000/1009 (1946)
- 10) H. Kurokui & M. Nakano: Reduction of Vibrational Torque in 2-phase Servomotors, *IEE EPA* 2, 5, 161/166 (1979)
- 11) たとえば, 茂木, 大隅: 小型回転機ハンドブック, 電気書院, 4-8, 4-11 (1966)