

有限要素法と剛体-ばねモデル法の併用解法の 接触問題への適用†

川島 成平*・杉本 正勝**・榎原 昌和**

ABSTRACT A combined model of the FEM and the RBSM is proposed and formulated to the plane stress problems by using the same concept in the RBSM.

The combination method is applied to the following typical contact problem. A plate with a circular hole contains a circular disk with the same initial diameter as the hole. The plate is loaded in uniaxial tension. The plate is divided into finite elements of the FEM and the disk into rigid elements of the RBSM, respectively. The combined model is introduced to the plate-disk interface, and the condition of perfect lubrication without any friction or sticking friction is assumed along the interface.

Distributions of the contact stresses, that is, the normal stresses on the contact arcs are analyzed by the combination method, and its results are compared with those by exact elastic analysis and the FEM. The combination method proposed here is found to be effective for contact problems.

Some techniques for mesh division of the disk are examined, and it is clarified that the total number of rigid elements can be reduced for analyzing contact problems.

1. はじめに

機械工学においては軸と軸受、歯車の伝動など、接触を考慮すべき問題は数多い。著者らの専門分野である塑性加工では、工具と素材が接触を通して加工が行なわれ、接触を考慮することは実際的問題の解析には不可欠である。

有限要素法（以下 FEM と略記）は連続体の解析手法として確立された感があり、種々な分野の問題にも活発に適用されている¹⁾。接触問題に対しても接触面における節点間の変位の適合条件および力のつりあい条件を剛性方程式に組み込んだり（たとえば 2)~4)), 接触面に“特殊な要素”を挿入したり（たとえば 5)~8)) して解析がなされている。しかし不連続部分の接触、口開きや再接触の判定及びその時の節点の取り扱い

いなどが煩雑のようである。

剛体-ばねモデル法⁹⁾（以下 RBSM と略記）は要素間のすべりを表現でき、接触問題を含む不連続体の解析には適している。RBSM は極限解析の手法としては非常に有効である一方で、弾塑性解析に対しては改良の余地があり、著者らは降伏の判定¹⁰⁾と塑性応力・ひずみマトリックス¹¹⁾に修正を加えた。しかし連続体の解法としては、今のところ FEM の方が使い易いようである。

これらのことを考えるとき、一つの解析対象において、連続体部分に FEM を、不連続が生じるまたは生じる可能性のある部分に RBSM を併用する解法は、その二解法の長所を利用するという観点から有用であると思われる。そこで本研究では、その二解法の境界での結合モデルを提案し、結合部分を定式化することにより併用解法を問題に適用可能な解法とする。またその併用解法を典型的な接触問題に適用し、その有効性を確かめた後に、適用方法について二・三の知見を得たので報告する。

2. 解法の定式化

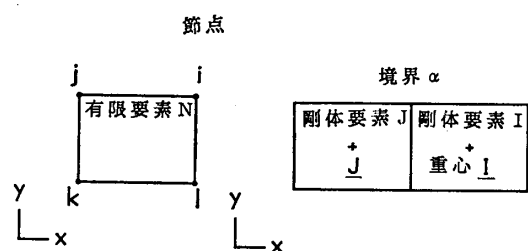
本研究では平面応力問題に対する解析を取り扱う。また要素の形状については FEM では四節点四角形要

Application to a Contact Problem of a Combination Method of FEM and RBSM. By Narihei Kawashima (Faculty of Junior College, Osaka Industrial University), Masakatsu Sugimoto & Masakazu Kashiwara (Department of Mechanical Engineering, University of Osaka Prefecture)

*大阪産業大学短期大学部

**大阪府立大学工学部機械工学科

†1986年11月20日受付



(a) FEMの有限要素 (b) RBSMの剛体要素

図1 有限要素と剛体要素

素, RBSM では長方形剛体要素とする.

2.1 有限要素法と剛体-ばねモデル法の概要

図1(a)に示す節点 i, j, k, l をもつ FEM の要素 N において

$$\{f\}_N = [K]_N \{u\}_N \quad (1)$$

ここで, $\{f\}_N$ は節点 $i \sim l$ の節点力を並べた 8 行 1 列のベクトル, $\{u\}_N$ は節点 $i \sim l$ の節点変位を並べた 8 行 1 列のベクトル, $[K]_N$ は 8 行 8 列の要素剛性マトリックスである.

図1(b)に示す重心 $\bar{I}, \bar{J}$ をもつ RBSM の要素 I, J の境界 α において

$$\{f\}_\alpha = [K]_\alpha \{u\}_\alpha \quad (2)$$

ここで, $\{f\}_\alpha$ は要素の重心 $\bar{I}, \bar{J}$ における x, y 方向力と回転力を並べた 6 行 1 列のベクトル, $\{u\}_\alpha$ は同じく x, y 方向変位と回転変位を並べた 6 行 1 列のベクトル, $[K]_\alpha$ は 6 行 6 列の剛性マトリックスである.

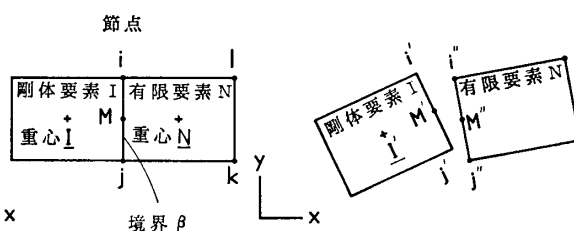
簡単にいえば, RBSM における境界が FEM の要素に対応し, 重心が節点に対応するということになる.

2.2 結合モデル

解析対象物に対して FEM と RBSM を併用すれば, その変形などが互いに影響を及ぼし合う両解法の境界での関係式を方程式, つまりは全体剛性マトリックスに組み入れる必要があり, ここではその二解法を結合するモデルを提案し, 定式化する.

図2(a)に示すように RBSM の剛体要素 I と FEM の有限要素 N が境界 β で接しており, 変形後図2(b)のような相対的な位置関係になったとする. 剛体要素 I の重心 $\bar{I} (x_I, y_I)$ の x, y 方向変位及び時計回り回転変位をそれぞれ u_I, v_I, θ_I とし, $\bar{I}$ が変形後 $\bar{I}'$ の位置に来て, 境界 β 上の節点 i, j 及び i と j の中点 M は, 変形後 i', i'', j' と j'' , M' と M'' になったとする. 剛体要素中の任意の点 $r (x_r, y_r)$ の変位 u_r は $\theta_I \ll 1$ として

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_I + (y_r - y_I)\theta_I \\ v_r &= v_I - (x_r - x_I)\theta_I \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



(a) 変形前 (b) 変形後

図2 剛体要素 I と有限要素 N

であることより, M' の座標は次のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} x_{M'} &= \frac{1}{2} \{x_i + x_j + 2u_I + (y_{iI} + y_{jI})\theta_I\} \\ y_{M'} &= \frac{1}{2} \{y_i + y_j + 2v_I - (x_{iI} + x_{jI})\theta_I\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで $x_{iI} = x_i - x_I, y_{jI} = y_j - y_I$ などである.

M'' は i'' と j'' の中点として

$$\left. \begin{aligned} x_{M''} &= \frac{1}{2} \{(x_i + u_i) + (x_j + u_j)\} \\ y_{M''} &= \frac{1}{2} \{(y_i + v_i) + (y_j + v_j)\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ベクトル $\overrightarrow{M'M''}$ の x 方向成分 $(M'M'')_x, y$ 方向成分 $(M'M'')_y$ は式(4), (5)から

$$\left. \begin{aligned} (M'M'')_x &= \frac{1}{2} \{u_i + u_j - 2u_I - (y_{iI} + y_{jI})\theta_I\} \\ (M'M'')_y &= \frac{1}{2} \{v_i + v_j - 2v_I + (x_{iI} + x_{jI})\theta_I\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで, $\overrightarrow{M'M''}$ は境界 β の中点の相対変位ベクトルであり, その剛体要素 I の辺 ij の法線, 接線方向成分をそれぞれ δ_v, δ_H とし, 辺 $i'j'$ と $i''j''$ の相対角変位を ϕ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \delta_v &= \frac{1}{2l_{ij}} [x_{ji} \{v_i + v_j - 2v_I + (x_{iI} + x_{jI})\theta_I\} \\ &\quad - y_{ji} \{u_i + u_j - 2u_I - (y_{iI} + y_{jI})\theta_I\}] \\ \delta_H &= \frac{1}{2l_{ij}} [x_{ji} \{u_i + u_j - 2u_I - (y_{iI} + y_{jI})\theta_I\} \\ &\quad + y_{ji} \{v_i + v_j - 2v_I + (x_{iI} + x_{jI})\theta_I\}] \\ \phi &= \theta_I - \theta_N \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで, $l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2}$ であり, θ_N は有限要素 N の仮想回転変位で, 変形前の辺 ij と変形後の辺 $i''j''$ のなす角とすれば

$$\theta_N = \frac{1}{l_{ij}^2} (y_{ji}u_{ji} - x_{ji}v_{ji}) \quad (8)$$

式(8)を式(7)に代入すれば δ_v, δ_H, ϕ は有限要素 N の節点 i と j の変位 $(u_i, v_i), (u_j, v_j)$ と剛体要素 I の重心 $\bar{I}$ の変位 (u_I, v_I, θ_I) によって表わされ

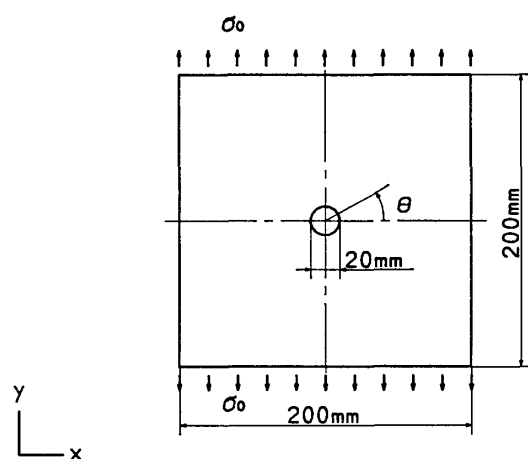


図3 円孔に円板がすきまなしにはまった平板の引張り

ている。相対変位 δ_V , δ_H , ϕ のそれぞれに対応するばね定数 k_n , k_s , k_r のばねに貯えられるエネルギー V は

$$V = (k_n \delta_V^2 + k_s \delta_H^2 + k_r \phi^2) / 2 \quad (9)$$

式(9)に Castigliano の定理を適用して境界 β における次の関係式が得られる。

$$\{f\}_\beta = [K]_\beta \{u\}_\beta \quad (10)$$

ここで, $[K]_\beta$ は7行7列の剛性マトリックス, すなわち結合モデルにおける要素剛性マトリックスであり $\{f\}_\beta$, $\{u\}_\beta$ はそれぞれ抵抗ベクトル, 変位ベクトルでいずれも7行1列のベクトルである。

境界 β の垂直ひずみ ε_n とせん断ひずみ γ_s を次のように定義する。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} \delta_V \\ \delta_H \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで IM , NM の長さをそれぞれ h_1 , h_2 として, $h = h_1 + h_2$ とする。式(11)に見られるように, h は相対変位 δ_V , δ_H を生じている境界におけるひずみを算定する標点間距離ともいえる量であり, 本研究では通常2つの要素の重心間距離を採用することにする。

なお垂直応力 σ_n とせん断応力 τ_s の導入方法, および k_r と k_n の関係式の導入は RBSM と同様に⁹⁾行えば定式が完了する。

2.3 解法の導入

解析対象を要素に分割し, そのうち FEM による解析部の要素には式(1), RBSM による解析部の要素には式(2), 結合モデル部には式(10)を適用して要素剛性マトリックスをそれぞれ作成し, それらを重ね合わせることによって全体剛性方程式の係数マトリックスである全体剛性マトリックスを構成する。その後に変位, 荷重などの解析条件を導入するのは FEM と同じであり, 問題は多元連立一次方程式を解くことに

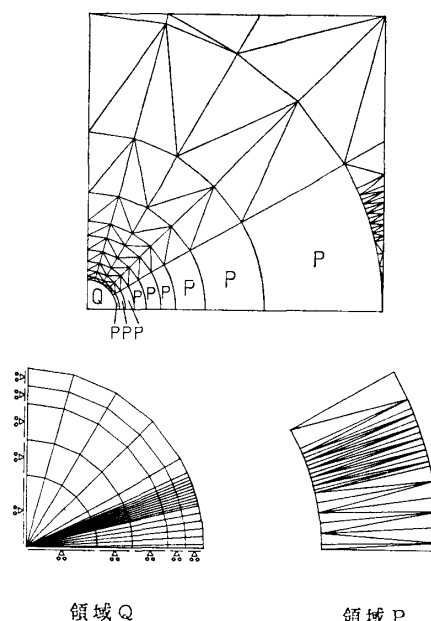


図4 本併用解法による要素分割 A

帰着され, その連立方程式の未知数は節点および要素の重心の変位である。

定式化において明らかなように, 結合モデルは有限要素や剛体要素が図2の例と異なっても簡単な修正で導入できる。たとえば, 図2において, 有限要素 N が ij を一辺とする定ひずみ三角形要素であっても, 結合モデルの定式化においては重心 N の座標つまり式(11)における h が変わるだけである。結合モデルの基本的な考え方は RBSM と同じであるため, 平面問題に対して RBSM で開発された手法やアルゴリズムを簡単に本結合モデルに取り入れることができる。

3. 接触問題への適用

3.1 解析対象とそのモデル化

典型的な接触問題であり, 図3に示すような寸法をもつ円孔に円板がすきまなくはまった平板の引張りを解析する。対称性から図3の平板の1/4部分に本併用解法を適用し, 有孔平板を FEM, 円板を RBSM でモデル化し, 図4に示すように要素分割する。

ここで円板つまり剛体要素は領域 Q のみで, P を含む他の領域はすべて有限要素への分割である。後に円板の要素分割について検討するために, 本要素分割を要素分割 A と呼ぶ。分割した有限要素数は 438, 剛体要素数は対称軸上の境界要素を含めて 120 であり, 両要素の境界すべてを対象として, 結合モデルを適用する境界線分数は 22 である。RBSM の対称軸上に設けられた境界要素では, 図中に示されているように対称

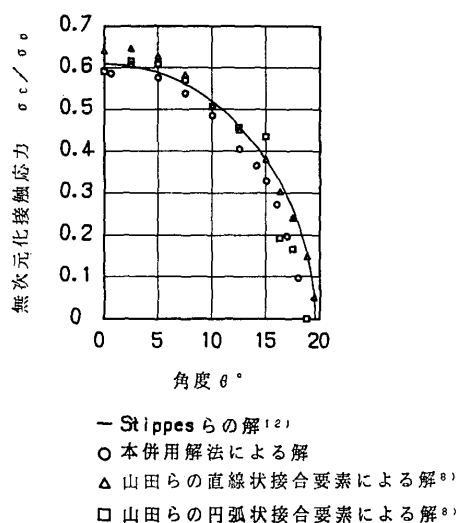


図5 完全潤滑状態での接触応力分布

軸に平行な方向以外の変位は拘束し、幅が0であることを除けば円板内の剛体要素と同様に取り扱った。

解析は平面応力問題とし、材料定数は有孔平板、円板ともに縦弾性係数 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、引張応力 $\sigma_0=1 \text{ kgf/mm}^2$ を FEM の節点への相当荷重として負荷した。

有孔平板と円板間には摩擦が働かない完全潤滑状態の場合と、摩擦係数が無限大である固着摩擦状態の場合を解析したが、両方の場合ともに平板と円板の接触境界では引張応力は生じないが、圧縮応力は生じ、その圧縮応力のことを接触応力 σ_c と表わす。つまり本研究では接触境界における垂直応力を接触応力と呼ぶ。完全潤滑状態では接触境界にせん断応力は生じず、結合モデルのせん断ばねを切るつまり式(9)の $k_s=0$ とするという方法で解析し、固着摩擦状態では接触境界の結合モデルは円板内部の RBSM と同様に取り扱い、したがってせん断応力も生じる。

なお接触していない境界つまり分離境界では、対応する結合モデルの垂直、せん断の両ばねを切るという操作によって解析を遂行した。また図3に示す θ で、 $-\theta_c \leq \theta \leq \theta_c$ が接触領域であるとき、 θ_c を接触角度と呼ぶ。

3.2 解析結果とその有効性

本問題のように、はめこまれた円板が弾性体である場合の報告は比較的少なく、Stippes らの解析¹²⁾、平板と円板のはめあいを考慮した山本らの解析¹³⁾など完全潤滑状態での弾性厳密解析があり、FEM による解析では、山田らによる接触境界に三角形接合要素を導入した完全潤滑状態での報告⁸⁾がある。

図5に、完全潤滑状態で解析した接触応力 σ_c の分布を、 θ を横軸とし、引張応力 σ_0 で除した無次元量の分布として示す。Stippes らの厳密解、山田らの辺が直線状と円弧状の2つの三角形接合要素を用いた FEM 解析結果を併記するが、Stippes らの結果は平板が無限平板の場合であり、最大の $\sigma_c/\sigma_0=0.609$ 、接触角度 $\theta_c=19.2^\circ$ である。

本併用解法の結果は山田らの2つの解析結果と比較して、直線状の三角形接合要素を導入した解析よりはなめらかな分布となっており、定量的にも円弧状の三角形接合要素を導入した解析結果の程度には、Stippes らの厳密解と合致しているといえる。本併用解法は、図5の結果とその解法の簡便さを考え合わせたとき、充分に実用的な接触問題の解法として有用であると思われる。

固着摩擦状態についての解析結果は、比較ができる解析結果が報告されていないようであるので、完全潤滑状態の Stippes らの結果と著者らの結果を再記し、図6に示す。

3.3 円板の要素分割法に対する検討

RBSM は、簡単なモデルでありながら要素間のすべりを表現できるなど様々な有用な特徴を有する解法であるが、剛体要素の形状が変化しても境界が同じであればわずかな式の修正で適用できることもその重要な特徴であり、長所である。そこで、著者らは本併用解法に RBSM のその長所を取り入れて接触問題を解析することを試み、RBSM 部つまり本例でははめこまれた円板の要素分割を種々に換え、解析を遂行した。そのとき、図4の要素分割Aを本併用解法における比較すべき要素分割とし、図5の結果を比較すべき解析結果として採用した。

図7に検討した円板の剛体要素分割B~Dを示す。平板つまり FEM 部の要素分割は図4と同じにし、結合モデルを適用する線分要素数も図4と同じである。

要素分割Bは、要素分割Aが円板を半径方向に5分割したのに対して3分割とし、接触境界に近い1分割目は要素分割Aと同じ位置にした。要素分割Cは円板を半径方向には分割せず、22の三角形剛体要素に分割した。いずれも対称軸上の境界要素は、その対称軸に平行な方向以外の変位は拘束した。要素分割Dは、円板を円周が区分的線分である1つの剛体要素とし、この剛体要素は変位を持たない(固定されている)とした。要素分割B、Cでは、結合モデルにおける式(11)の h を算出するのに要素の重心間距離を用いるが、要素分割Dでは妥当と思われる算出方法をいくつ

か試みた。

図8に要素分割A, B, Cの各々の場合の解析結果として、接触応力の分布を示す。

完全潤滑状態で解析した各要素分割での結果はほとんど変わらず、完全潤滑状態では、その接触応力方向に対して平行（接触境界に対して垂直）な方向に要素分割を行うだけで、十分な解析結果が得られることがわかる。そのことにより、本例ではRBSM部の分割要素数を約1/5に軽減できる。

一方、固着摩擦状態で解析した結果は要素分割A, Bについてはほとんど変わらないが、要素分割Cの結果は他の2つの結果と定性的にも異なっている。このことは後述する要素分割Dの結果も合わせて考えたとき、固着摩擦によって発生するせん断応力による円周方向のずれが、円板内で表現または取り入れられていない結果であると思われる。しかしこの場合も、要素分割Bに見られるように、分割数は少なくとも接触境界に対して平行な要素分割を加えるだけで、十分な解析結果が得られている。

次に要素分割Dに対して、結合モデルの式(11)の $h=h_1+h_2$ において、 h_1 を円板の半径として $h=10.3$ mmとした場合(D-Iと略記)、要素分割Cと同じく $h=3.67$ とした場合(D-II)、要素分割A, Bと同じく $h=0.83$ とした場合(D-III)、 $h_1=0$ つまり $h=0.33$ とした場合(D-IV)について解析した。

図9に完全潤滑状態での無次元化した接触応力の分布を示すが、図5と比較して分布の定性的な形は同じであっても、その値は非常に異なっている。RBSMでは剛体要素そのものは変形しないが、その要素の変形を要素間の境界に集約しており、図9の結果は円板内部に境界を設けなかったために得られたものであり、円板内部の変形が考慮されていない結果であると考えられる。水嶋らは剛体円形充てん物を持つ無限平板の引張り問題の弾性厳密解¹⁴⁾を報告しており、摩擦のない場合最大の $\sigma_c/\sigma_0=1.07$ 、接触角度 $\theta_c=19.6^\circ$ となっている。その解析結果の接触応力分布図は小さいために正確な比較はできないが、その分布形状が本併用解法の結果と同じであり、D-IVの解析結果は定量的にもかなり良く水嶋らの結果と合致していると判定できる。このことは、D-IVのように剛体要素1つで与えた併用解析では式(11)の h 、つまりひずみ算出の標点間距離にあたるものをFEM部のみの距離とすれば、結合モデルの相対変位がFEM部の変形のみによって生じたと算定することになり、RBSM部が変形しないつまり剛体である場合の解析結果が得られる

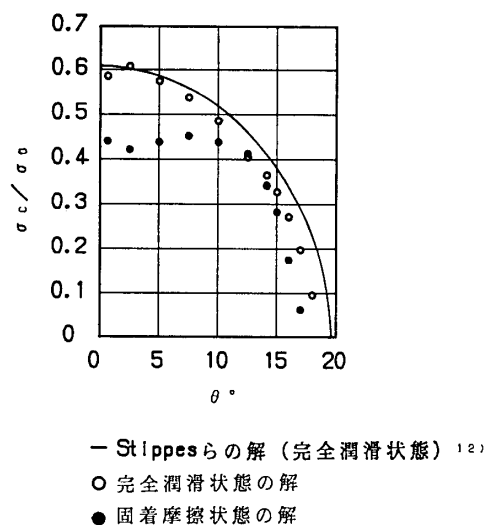


図6 固着摩擦状態での接触応力分布

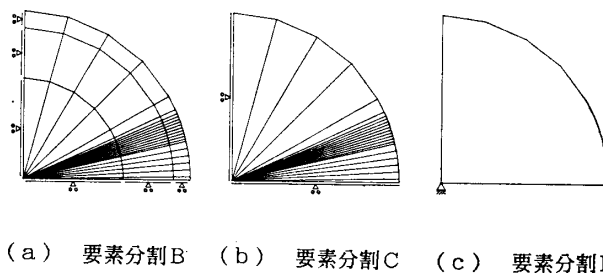
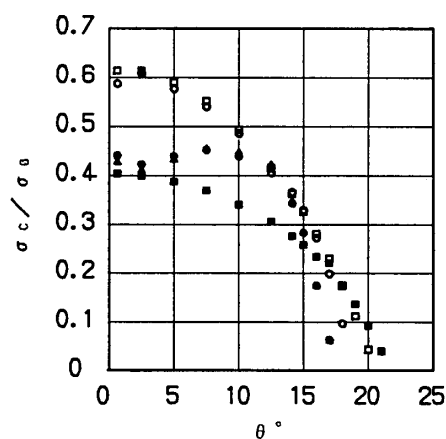
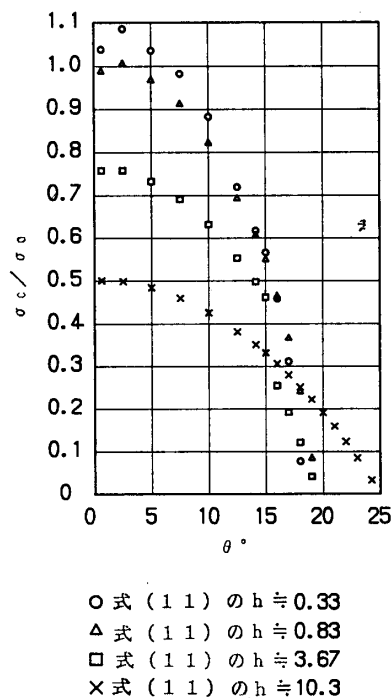
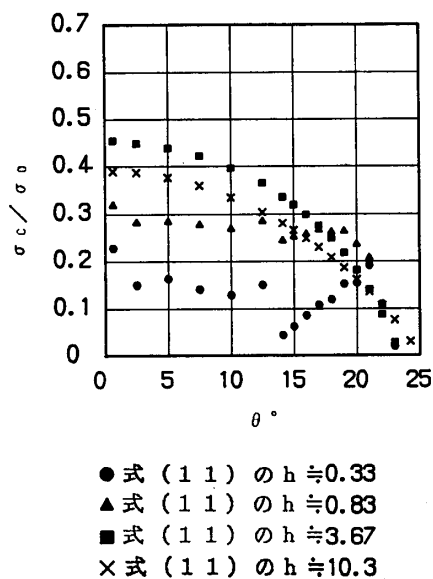


図7 検討した円板の要素分割



完全潤滑状態 固着摩擦状態
○ 要素分割A ● 要素分割A
△ 要素分割B ▲ 要素分割B
□ 要素分割C ■ 要素分割C

図8 要素分割A, B, Cによる接触応力分布

図9 要素分割 D による完全潤滑状態での接触応力分布図10 要素分割 D による固着摩擦状態での接触応力分布

ことを示している。

要素分割 D での固着摩擦状態の結果を図10に示す。水嶋ら¹⁴⁾は無限平板と剛体円板間に摩擦を考慮した解析も遂行しているが、摩擦係数と相対すべり量との間に仮定をおいた解析であり、本解析における固着摩擦の結果と単純に比較はできない。しかし水嶋らの結果では摩擦係数が大きくなると最大接触応力の値は減少し、その位置は θ の大きい方へ移動し、接触角度は増

加している。本解析の D -IV の結果はなめらかな結果とはなっていないが、最大接触応力の減少と接触角度の増加という定性的な傾向は表現されていると思われる。

4. おわりに

有限要素と剛体要素の結合モデルを提案し、定式化することによって有限要素法と剛体ばねモデル法の併用解法を確立した。その併用解法を「円孔に円板がすぎまなくはまった平板の引張り」という典型的な接触問題に適用し、その解析結果を弾性厳密解と比較することによって併用解法の接触問題に対する有効性を確認した。

さらに、接触問題に適用する場合の剛体要素の分割法について検討を加え、接触応力を得るのに少ない要素数で充分であることを示したが、各解析条件に対する結果は次のとおりである。

(1) 接触境界が完全潤滑状態のときは、その接触境界に垂直な方向の要素分割が必要であり、平行な方向の要素分割はあえて必要はない。

(2) 接触境界が固着摩擦状態のときは、その接触境界に平行な方向の要素分割が重要である。このことはせん断応力の伝達が生じるためであると思われる。固着摩擦状態のみならず完全潤滑状態以外の場合にはあてはまると思われる。

(3) 接触体を剛体要素1つで解析する場合、接触境界の結合モデルで、有限要素の重心から接触境界までの距離をひずみ算出の標点間距離(式(11)の h)として採用することにより、剛体と弾性体間の接触問題の解析ができる。

今後、本結果を踏まえ、併用解法を塑性加工の解析に適用して行きたい。

なお、計算には大阪府立大学計算センターの ACOS-S850 を用いた。

本研究を進めるにあたり、東京大学生産技術研究所 川井忠彦(現東京理科大学)教授、都井裕助教授に激励いただきました。記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) O.C.Zienkiewicz: The Finite Element Method 3rd edition, McGraw Hill (1977)
- 2) 大手: 有限要素法による弾性接触応力の解析, 日本機械学会論文集, 38-313, 2210/2216 (1972)
- 3) 薦, 山地: 接触問題の有限要素解析法に関する研究, 日本機械学会誌, 76-651, 348/358 (1973)
- 4) 岡本: 有限要素法による非線形接触問題の解析, 日本機

- 械学会論文集, 43-374, 3716/3722 (1977)
- 5) R. E. Goodman, R. L. Taylor and T. L. Brekke : A Model for the Mechanics of Jointed Rock, Proc. ASCE, 94-SM3, 637/659 (1968)
 - 6) H. Schäfer : A Contribution to the Solution Contact Problems with the Aid of Bond Elements, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 6, 335/354 (1975)
 - 7) Y. Yamada, Y. Ezawa, I. Nishiguchi and M. Okabe: Handy Incorporation of Bond and Singularity Elements in the Finite Element Solution Routine, Trans. 5th Int. Conf. Struct. Mech. Reactor Tech., paper M9/8, (1979)
 - 8) 山田, 江澤 : 接合要素とその有限要素解析における応用, 生産研究, 31-6, 5191524 (1979)
 - 9) T. Kawai : New Element Method in Discrete Structural Analysis, J. Soc. Nav. Arch. Jpn., 141, 174/180 (1977)
 - 10) 杉本, 川島, 上西 : 接触問題としての片持ちばりの平面応力解析, 塑性と加工, 25-280, 402/409 (1984)
 - 11) M. Sugimoto, N. Kawashima : Elasto-Plastic Analysis for Plane Stress Contact Problems Using a Modified RBPM Method, Finite Elements in Analysis and Design, 2-4, 347/356 (1986)
 - 12) M. Stippes, H. B. Wilson, Jr. and F. N. Krull : A Contact Stress Problem for a Smooth Disk in an Infinite Plate, Proceeding of the 4th U. S. National Congress of Applied Mechanics, 2, 799/806 (1962)
 - 13) 山本, 津村 : 円形はめあい充てん物を含む無限板の引張り (圧縮), 日本機械学会論文集 (A編), 52-475, 601/607 (1986)
 - 14) 水嶋, 浜田, 北川 : 剛性円形充てん物を持つ無限平板の引張りと圧縮 (摩擦がある場合), 同上 (A編), 48-425, 42/48 (1982)