≪論文≫

論 6-10

有限要素法によるダイオードのスイッチング特性解析†

坂田　博*・磯村　滋宏*・正田　英介**

ABSTRACT Several properties of a PIN diode are numerically analyzed using the finite element method with one dimensional model. The internal voltage, hole and electron densities of the diode are shown for steady states and transient conditions. To investigate the characteristics of the two methods of analysis, finite element and finite difference, the accuracy and computing time for both of them are compared. It is shown that the finite element method is advantageous over the finite difference method for such problems as in this paper.

1. まえがき

近年，パワーエレクトロニクスの進展とともに，ダイオード，サイリスタ，GTO(ゲートターンオフサイリスタ)などの電力用半導体素子注1)は，より大形かつ複雑な構造のものとなり，素子のシミュレーションにより，その特性を予測することが必要になっている．しかし，そのための数値計算においては，半導体の内部現象の特徴として正孔密度及び電子密度の変数の桁が，素子内部の位置により例えば10^{15}も異なること，また電流密度の表現において非線形な指数項が含まれるため解が発散しやすい，などの困難な点がある．このような半導体素子の動作特性のシミュレーションについては，差分法[1]及び有限要素法[2]を用いて，大型計算機による数値解析が行なわれてきた．例えばGTOのターンオフ現象の解析には，２次元の差分法が利用されている[3)4)]．また，対象とする半導体も，小はLSI(集積回路)内のMOSFETから，大は電力制御用のGTOまで，広く２次元の差分法で解析が試みられている[5)6)]．一方，有限要素法に関しては，内外ともに，小容量の通信用半導体素子を除いては，適用例は少数に過ぎない．この理由としては，２次元モデルの場合，有限要素法の方が三角メッシュにより複雑な形状も表現できる反面，通常の差分法に較べ差分式の導出が複雑なものとなることが挙げられる．

そこで，本論文では，有限要素法と差分法を比較するために，単純なダイオードの１次元モデルを対象として，まず，有限要素法による数値解析の理論及び方法を示し，次に，定常状態及び過渡状態における，内部電位，正孔密度，及び電子密度を解析した．そして，同一分割数の条件下で，これらの結果をもとに精度や計算時間に関して差分法と比較し，相違を種々検討した注2),[8)9)10)]．

2. 解析理論

最初に，表１に，本論文で使用する変数及び定数の記号をまとめて示す．

2.1 半導体の基本式

一般に，半導体の内部電位V，正孔密度p及び電子密度nに関して，次の基本式が成立する．

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}V=-(q/\varepsilon)(p-n+N_d) \quad (1)$$

$$q\partial p/\partial t=-\vec{\nabla}\cdot\vec{J_p}-qR \quad (2)$$

$$q\partial n/\partial t=\vec{\nabla}\cdot\vec{J_n}-qR \quad (3)$$

(1)はポアソンの式，(2)，(3)はキャリアの連続の式と呼ばれる．N_dは，ドナー密度N_Dとアクセプタ密度N_Aとの差N_D-N_Aであり，半導体デバイス固有の不純物密度分布を示し，その特性を規定する．正孔電流密度$\vec{J_p}$及び電子電流密度$\vec{J_n}$は，次のようにド

注1) 電力用半導体素子：主にそのスイッチング特性を利用し，直流及び交流電力の相互変換に用いられる半導体素子

注2) 本稿は，本学会「第６回及び第７回電気工学への有限要素法の応用シンポジウム」において発表し，討議されたものをまとめたものである．

Switching Characteristic Analysis of Diode Using Finite Element Method. By *Hiroshi Sakata*, *Shigehiro Isomura* (Ehime University) *and Eisuke Masada* (University of Tokyo)

*愛媛大学工学部電気工学科

**東京大学工学部電気工学科

†1987年１月19日

表 1　記号の定義

q	：電気素量	R	：キャリア再結合速度
ε	：半導体の誘電率	J_p	：正孔電流密度
n_I	：真性半導体のキャリア密度	J_n	：電子電流密度
N_D	：ドナー密度	μ_p	：正孔移動度
N_A	：アクセプタ密度	μ_n	：電子移動度
V	：内部電位	D_p	：正孔拡散係数
E	：電界強度	D_n	：電子拡散係数
p	：正孔密度	τ_p	：正孔寿命
n	：電子密度	τ_n	：電子寿命

リフト成分及び拡散成分から成り，V，p 及び n より求まる．

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V \tag{4}$$
$$\vec{J_p}=q(p\mu_p\vec{E}-D_p\vec{\nabla}p) \tag{5}$$
$$\vec{J_n}=q(n\mu_n\vec{E}+D_n\vec{\nabla}n) \tag{6}$$

また，キャリアの再結合速度Rは，SRH 型の再結合過程注3) を仮定した場合，次のように表わされる．

$$R=(pn-n_I^2)/\{\tau_p(n+n_I)+\tau_n(p+n_I)\} \tag{7}$$

なお，$\mu_p, \mu_n, D_p, D_n, \tau_p$ 及び τ_n などの係数は，厳密にはV，p 及び n に依存するが，ここでは定数として，取り扱う．本稿では，V，p 及び n 自体を変数として解析するが，次式で表される擬フェルミポテンシャル ϕ_p 及び ϕ_n を，p 及び n の代わりに用いた例もある[5]．ただし，kはボルツマン定数である．

$$p=n_I\ \exp\ \{q/kT(\phi_p-V)\} \tag{8}$$
$$n=n_I\ \exp\ \{q/kT(V-\phi_n)\} \tag{9}$$

ϕ_p 及び ϕ_n を変数とすると，位置による変化が線形となる反面，数値計算において指数項によるオーバーフローを生じやすいので，ここではp 及び n を変数とした[7]．また，この他に絶対温度Tに関する熱方程式も併せて解析し，熱破壊の可能性を検討した例もあるが[3]，本稿ではこれらについては，触れないことにする．

2.2 デバイスモデル

半導体デバイスとして図 1 (**a**)，(**b**)に示すような PIN ダイオード注4)を考え，1 次元即ち x 軸方向のみの分布を扱う．入力として与えられるのは，不純物密度 N_d の分布であり，それより，印加電圧 V_c の時の，V，p 及び n の分布を求めることを目的とする．

ここで，ダイオードの法線ベクトル n 方向の電界及び電流成分は存在しないので，

$$\vec{\nabla}V\cdot\vec{n}=0 \tag{10}$$

注3) SRH 型の再結合過程：Shockley, Read, 及び Hall が提唱した，キャリアの再結合過程に関する仮説

注4) PIN ダイオード：pn 接合のダイオードに真性半導体に近い I 層を挿入し，定格電圧を大きく取れるようにしたもの

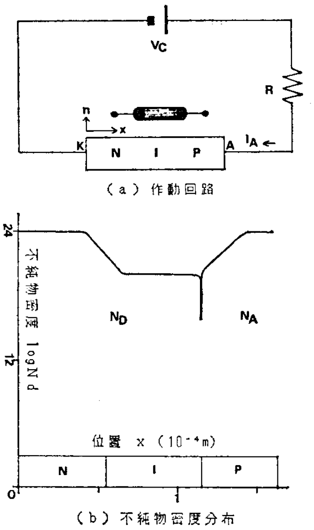

図 1　デバイスモデル（N_d の単位は m^{-3}）

$$\vec{J_p}\cdot\vec{n}=0 \tag{11}$$
$$\vec{J_n}\cdot\vec{n}=0 \tag{12}$$

が成立する．また，両端の電極付近の p 及び n は，常に熱平衡時の値をとり，一定とする．N域左端の V_K を 0 とし，P域右端の V_A は，外部回路との接続により定まり，

$$V_A=V_C-RI_A \tag{13}$$

が境界条件となる．

2.3 有限要素近似

基本式（4）～（7）を，基本式（1）～（3）に代入すれば，V，p 及び n に関する 3 元連立方程式となり，与えられた N_d 及び境界条件 (10)～(13) などのもとで，解くことができる．その際，半導体デバイスをメッシュに分割し，差分法を用いて数値解析する方法もあるがここでは有限要素法を適用して解析を行なう．なお，両者の比較については，第 5 章で述べる．

まず，PIN ダイオードを，図 2 (**a**) のようにメッシュに分割し，左から 1, 2, …N の番号をつける．そして，図 2 (**b**) に示すように，番号 i の位置では 1，それ以外の位置では 0 となるような関数 $\phi_i(x)$ を定義し，これを形状関数と呼ぶ．すなわち，

$$\phi_i(x)=\begin{cases}(x-x_{i-1})/(x_i-x_{i-1}) & : x_{i-1}\leqq x\leqq x_i \\ (x_{i+1}-x)/(x_{i+1}-x_i) & : x_i\leqq x\leqq x_{i+1} \\ 0 & : x<x_{i-1},\ x>x_{i+1}\end{cases} \tag{14}$$

従って，番号 i での N_d，V，p，n 及び R をそれぞれ，N_{di}，V_i，p_i，n_i 及び R_i と置き，図 2 (**c**) に $p(x)$ を例として示したように折線近似すれば，各関数は次のように表現できる．

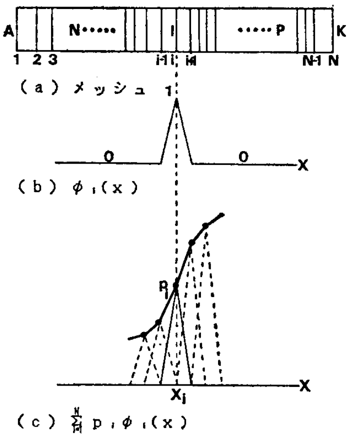

図 2 有限要素近似

$$N_d(x)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)N_{di} \tag{15}$$

$$V(x)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)V_i \tag{16}$$

$$p(x)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)p_i \tag{17}$$

$$n(x)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)n_i \tag{18}$$

$$R(x)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)R_i \tag{19}$$

2.4 基本式の差分化

$\vec{n}$方向に，特性の一様な幅をもたせ，2次元の広がりをもつダイオードの領域を考える．(1)式の両辺にϕ_iを乗じて全領域で積分すれば次のようになる．

$$\int\phi_i\nabla^2 Vds$$
$$=-(q/\varepsilon)\int\phi_i(p-n+N_d)ds \tag{20}$$

さらに，左辺にグリーンの定理を用いて整理すると，

$$\int\vec{\nabla}\phi_i\cdot\vec{\nabla}Vds-(q/\varepsilon)\int\phi_i(p-n+N_d)ds$$
$$=\oint\phi_i(\vec{\nabla}V\cdot\vec{n})dl \tag{21}$$

となる．ここで，両端の電極以外では境界条件(10)より右辺は0となり，(15)〜(18)式を代入すると，

$$\sum_{j=1}^{N}\{V_j\int\vec{\nabla}\phi_i\,\vec{\nabla}\phi_j ds$$
$$-(q/\varepsilon)(p_j-n_j+N_{dj})\int\phi_i\phi_j ds\}=0 \tag{22}$$

ただし，$i=2,3,\cdots N-1$

となる．さらに，行列 $\boldsymbol{K}^V, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}_d, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{p}$ 及び $\boldsymbol{n}$ を定義して書き直すと，次のようになる．

$$\underline{\boldsymbol{K}^V\boldsymbol{V}-(q/\varepsilon)\boldsymbol{M}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{n}+\boldsymbol{N}_d)=\boldsymbol{O}} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{K}^V{}_{ij}=\int\vec{\nabla}\phi_i\cdot\vec{\nabla}\phi_j ds \tag{24}$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}=\int\phi_i\phi_j ds \tag{25}$$

$$\boldsymbol{N}_d=(N_{d1},N_{d2},\cdots N_{dN})^t \tag{26}$$

$$\boldsymbol{V}=(V_1,V_2,\cdots V_N)^t \tag{27}$$

$$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots p_N)^t \tag{28}$$

$$\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,\cdots n_N)^t \tag{29}$$

同様に，(2)式の両辺に ϕ_i を乗じて全領域で積分し，グリーンの定理を用いると，次のようになる．

$$q\int\phi_i\partial p/\partial t ds-\int\vec{\nabla}\phi_i\cdot\vec{J}_p ds+q\int\phi_i R ds$$
$$=-\oint\phi_i(\vec{J}_p\cdot\vec{n})dl \tag{30}$$

ここでも同様に，電極以外の点では，境界条件(11)より右辺は0となる．さらに，メッシュ間ではVは線形に変化し，$\vec{J}_p$は一定として，(5)式を変形すると，メッシュ間の電流密度は，次のようになる[7]．

$$J_{pi+1/2}=q(f_{pi}p_i-g_{pi}p_{i+1}) \tag{31}$$

$$f_{pi}=(\mu_p/h_i)(V_{i+1}-V_i)$$
$$/(\exp[\theta(V_{i+1}-V_i)]-1) \tag{32}$$

$$g_{pi}=(\mu_p/h_i)(V_{i+1}-V_i)$$
$$/(1-\exp[\theta(V_i-V_{i+1})]) \tag{33}$$

ただし，$x_{i+1}-x_i=h_i, \mu_p/D_p=q/kT=\theta$

そこで，(16)〜(19)式及び(31)式を，(30)式に代入すると，次のようになる．

$$-f_{pi-1}p_{i-1}+(g_{pi-1}+f_{pi})p_i-g_{pi}p_{i+1}$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\{\partial p_j/\partial t\int\phi_i\phi_j ds+R_j\int\phi_i\phi_j ds\}=0 \tag{34}$$

ただし，$i=2,3,\cdots N-1$

さらに，行列 $\boldsymbol{K}^P$ と，(26)式等と同様な行列 $\boldsymbol{R}$ を定義し，行列を用いた形式に書き直すと，次のようになる．

$$\underline{\boldsymbol{M}\partial\boldsymbol{p}/\partial t-\boldsymbol{K}^P\boldsymbol{p}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{O}} \tag{35}$$

同様に，(6)式と(3)式は次のようになる．

$$J_{ni+1/2}=q(-g_{ni}n_i+f_{ni}n_{i+1}) \tag{36}$$

$$f_{ni}=(\mu_n/h_i)\ (V_{i+1}-V_i)$$
$$/(\exp[\theta(V_{i+1}-V_i)]-1) \tag{37}$$

$$g_{ni}=(\mu_n/h_i)\ (V_{i+1}-V_i)$$
$$/(1-\exp[\theta(V_i-V_{i+1})]) \tag{38}$$

$$\underline{\boldsymbol{M}\partial\boldsymbol{n}/\partial t+\boldsymbol{K}^n\boldsymbol{n}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{O}} \tag{39}$$

一方，過渡特性を求めるために，(35)及び(39)式の時間微分に陰的1次補間を用いると，次のようになる．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^*)/\Delta t$$
$$+1/2(-\boldsymbol{K}^P\boldsymbol{p}-\boldsymbol{K}^{P*}\boldsymbol{p}^*+\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}^*)=\boldsymbol{O} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}^*)/\Delta t$$
$$+1/2(\boldsymbol{K}^n\boldsymbol{n}+\boldsymbol{K}^{n*}\boldsymbol{p}^*+\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}^*)=\boldsymbol{O} \tag{41}$$

すなわち，時間 Δt 前の解 $\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{n}^*$ 等を用い，(40)及び(41)式を解き，順次，時間を進めて行くことになる．

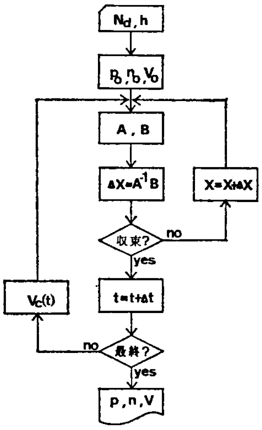

図 3　フローチャート

3.　解析方法

3.1　計算アルゴリズム

(23), (40) 及び (41) 式の連立方程式を，大型計算機で実際に解くためには工夫を必要とする．すなわち，p 及び n は，位置により 10^{10} から $10^{24}/\mathrm{m}^3$ までの範囲の値をとるので，加減算で桁落ちを生じる，また，行列 $\boldsymbol{K}^p$ 及び $\boldsymbol{K}^n$ の要素 f_i 及び g_i の中に，exp V の項が含まれているので非線形性を持つ，といった問題点がある．そこで，3つの式を一括して，ニュートン法を用いて解くことにする．変数 V，p，n に関する3つの式を，真値 V_0，p_0，n_0 との差 ΔV，Δp, Δn についての方程式に書き直す．すなわち，偏微分を実行し整理すると，3式はいずれも，次のような形式となる[10]．

$$a_{Vi-1}\Delta V_{i-1}+a_{Pi-1}\Delta p_{i-1}+a_{ni-1}\Delta n_{i-1}$$
$$+a_{Vi}\Delta V_i+a_{pi}\Delta p_i+a_{ni}\Delta n_i$$
$$+a_{Vi+1}\Delta V_{i+1}+a_{Pi+1}\Delta p_{i+1}+a_{ni+1}\Delta n_{i+1}=b_i \tag{42}$$

ここで，両端の電極上の1番と N 番においては，p 及び n は，常に熱平衡状態として次のように指定しておく．また，常に $V_1=0$ と定めると次のようになる．

$$\Delta V_1=0,\ \Delta p_1=0,\ \Delta n_1=0 \tag{43}$$

$$\Delta p_N=0,\ \Delta n_N=0 \tag{44}$$

さらに，次のような行列 $\boldsymbol{X}$ を新たに定義し，

$$\boldsymbol{X}=(V_1, p_1, n_1, \cdots, V_N, p_N, n_N)^t \tag{45}$$

試行値を $\boldsymbol{X}_0$ とし，修正値を $\Delta\boldsymbol{X}$ とすると，

$$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B} \tag{46}$$

という形に全方程式を一括することができる．ただし，行列 $\boldsymbol{A}$ 及び $\boldsymbol{B}$ は，それぞれ，$\boldsymbol{X}_0$ より求まる $3N\times 3N$ の係数行列及び $3N\times 1$ の定数行列である．従って，$\Delta\boldsymbol{X}$ が0に近くなるまで，(46) 式の計算を繰り返し，$\boldsymbol{X}$ の収束値を求める計算アルゴリズムとなる．

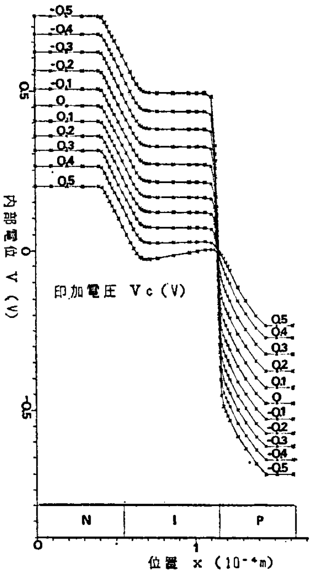

図 4　内部電位分布

3.2　初期値及び境界条件

図3に，計算機プログラムのフローチャートを示す．まず，メッシュ幅 h_i と不純物密度 N_{di} の分布を読み込み，次のように初期値 X_0 を計算する．

$$p_i=-N_d/2+\sqrt{\{(N_d/2)^2+n_I{}^2\}} \tag{47}$$

$$n_i=N_d/2+\sqrt{\{(N_d/2)^2+n_I{}^2\}} \tag{48}$$

$$V_i=(kT/q)\{\ln(n_i/n_1)\} \tag{49}$$

次に，係数行列 $\boldsymbol{A}$ と定数行列 $\boldsymbol{B}$ を計算し，修正値 $\Delta\boldsymbol{X}$ を求め，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+\Delta\boldsymbol{X}$ を新たな試行値として，収束するまで計算を繰り返す．収束条件は，$|\Delta X_i|/|X_{0i}|\leqq 10^{-4}$ とした．ここで，図1のような電圧印加時の境界条件を再検討する．N 番の電極の電流密度を，(31)，(36) 式より求め，素子の断面積を $1\ \mathrm{mm}^2$ とし，SI 単位系の電流値に直すと，次のようになる．

$$I_A=-(J_{PN-1/2}+J_{nN-1/2})\times 10^{-6} \tag{50}$$

拡散電位[注5] V_{diff} を差し引き外部回路条件 (13) から，

$$V_N=V_C-V_{diff}-RI \tag{51}$$

が成立する．これを変形して，ΔV_N に関する式を導くことができる．

4.　解析結果及び検討

4.1　定常特性

順方向及び逆方向電圧印加時の，時間微分の項のない場合，すなわち定常状態の V，p 及び n の分布を

注5) 拡散電位：熱平衡状態で半導体の pn 両域間に存在する電位差，半導体と電極との接触電位と相殺され外部には現れない

注6) 電位障壁：接合部に内部電位の急峻な格差が存在するため，キャリアはそれを越えて移動することを妨げられる

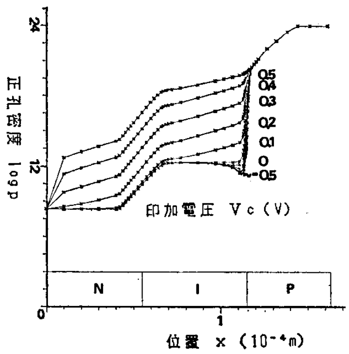

図 5　正孔密度分布（p の単位は m^{-3}）

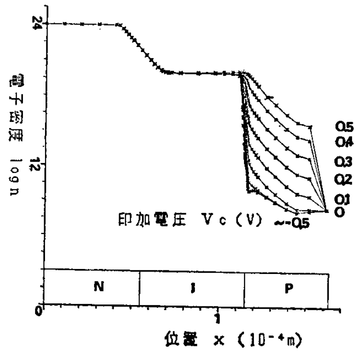

図 6　電子密度分布（n の単位は m^{-3}）

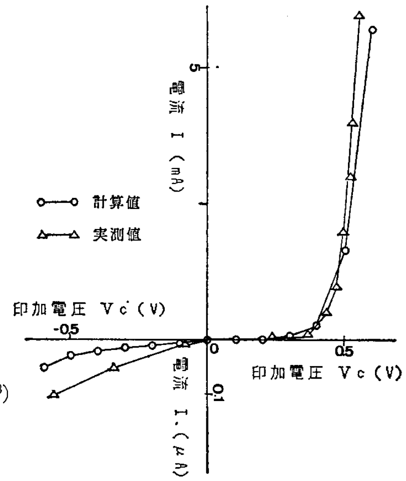

図 7　電圧対電流静特性

それぞれ，図 4，図 5 及び図 6 に示す．計算は，熱平衡状態から始めて，順方向あるいは逆方向に，0.1 V ずつ，順次 V_c を増して行った．図 4 の V の分布を見ると，接合部の電位障壁注6) が，印加電圧が負の場合には広がり，印加電圧が正の場合には狭くなる様子がわかる．図 5 の p の分布及び図 6 の n の分布を見ると，印加電圧が正に増加するにしたがい，少数キャリアすなわち N 領域の p 及び P 領域の n が増加していることがわかる．一方，図 7 の電圧対電流の静特性は，縦軸は正と負で桁が異なるので，明らかに合理的な整流性を示しており，実際の素子の測定結果とも，よく一致した．

4.2　過渡特性

次に，順方向電圧印加時の，過渡状態の V，p 及び n の分布の時間的推移を，それぞれ，図 8，図 9 及び図 10 に示す．印加電圧波形としては，図 11 のようなものを考え，(40) 及び (41) 式を用いて，時間とともに電圧も増加させ計算を行なった．図 8 に示すように，接合部の電位障壁は時間とともに狭まり，これと同時に，図 9 及び図 10 に見られるように，少数キャリアが注入によって時間とともに増えていることがわかる．また，アノードにおける内部電位及び電流密度は，図12のような応答を示した．正孔及び電子の寿命を十分短く 0.1 μs としていること，接合部は容量性であると考えられることなどから，妥当な過渡応答の結果と思われる．

5.　差分法との比較

5.1　差分式の比較

まず，時間微分項のない定常状態について，(23)，(35) 及び (39) 式の連立方程式の，i 番目の項を抜き出し，差分法の場合の同様の方程式と比較してみる．有限要素法の場合，各方程式は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&-1/h_{i-1}V_{i-1}+(1/h_{i-1}+1/h_i)V_i-1/h_{i+1}V_{i+1}\\
&\underline{-q/\varepsilon h_{i-1}/6(p_{i-1}-n_{i-1}+N_{di-1})}\\
&\underline{-q/\varepsilon(h_{i-1}+h_i)/3(p_i-n_i+N_{di})}\\
&\underline{-q/\varepsilon h_i/6(p_{i+1}-n_{i+1}+N_{di+1})}=0 \qquad (52)
\end{aligned}
$$

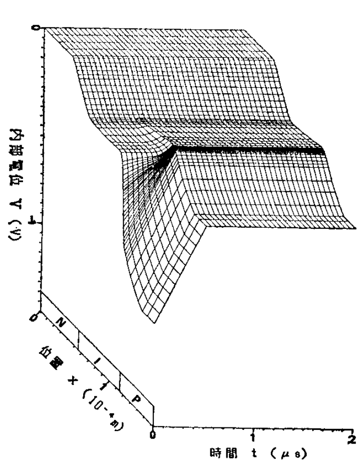

図 8　過渡特性（内部電位）

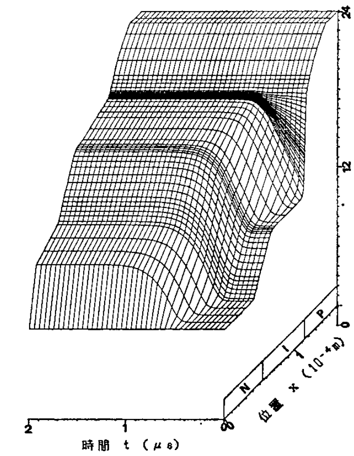

図 9　過渡特性（正孔密度）
（p の単位は m^{-3}）

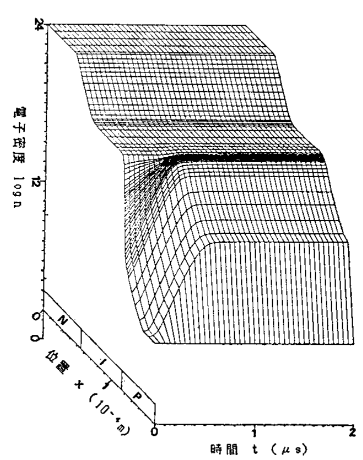

図10　過渡特性（電子密度）
（n の単位は m^{-3}）

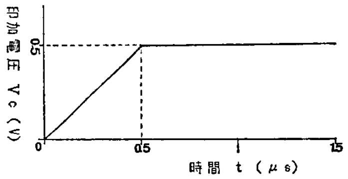

図11　印加電圧波形

$$f_{i-1}p_{i-1}-(g_{i-1}+f_i)p_i+g_ip_{i+1}\underline{-h_{i-1}/6R_{i-1}-(h_{i-1}+h_i)/3R_i-h_i/6R_{i+1}}=0 \tag{53}$$

$$g_{i-1}n_{i-1}-(f_{i-1}+g_i)n_i+f_in_{i+1}\underline{-h_{i-1}/6R_{i-1}-(h_{i-1}+h_i)/3R_i-h_i/6R_{i+1}}=0 \tag{54}$$

一方，通常の差分法を用いて，直接に差分式を求め，次元や符号を揃えると，次のようになる．

$$-1/h_{i-1}V_{i-1}+(1/h_{i-1}+1/h_i)V_i-1/h_{i+1}V_{i+1}\underline{-q/\varepsilon(h_{i-1}+h_i)/2(p_i-n_i+N_{di})}=0 \tag{55}$$

$$f_{i-1}p_{i-1}-(g_{i-1}+f_i)p_i+g_ip_{i+1}\underline{-(h_{i-1}+h_i)/2R_i}=0 \tag{56}$$

$$g_{i-1}n_{i-1}-(f_{i-1}+g_1)n_i+f_in_{i+1}\underline{-(h_{i-1}+h_i)/2R_i}=0 \tag{57}$$

(52)，(53)，(54) 式をそれぞれ (55)，(56)，(57) 式と較べると，下線部が異なり，後半の項の重みづけが違っている．すなわち，有限要素法では変数の $i-1$ 番及び $i+1$ 番の項があるのに対し，差分法にはそれがない．有限要素法ではメッシュ間も形状関数を使って変数を連続的に表現するのに対し，差分法ではメッシュ点でのみ変数を定義するためで，(52)，(53)，(54) 式の $i-1$ 番及び $i+1$ 番の変数を i 番に等しいとすると，両者は一致する．

5.2 計算時間の比較

次に，定常状態に関して，両者の方法につき，入力データ及び収束条件などは同じとし，計算時間や精度の比較を行なった．なお，連立1次方程式の解法としては，LU 分解を行ない，前進代入及び後退代入によって解く，算術サブルーチン LAX を使用した．

メッシュ数を 30，45，60 と変え，計算時間を比較すると，**表 2** のようになる．熱平衡状態から始めて，正あるいは負の方向に，0.1 V ずつ順次電圧を印加していった場合の CPU 時間で比較すると，メッシュ数が多い場合，差分法の方が多くの時間を要している．その理由を調べると，**表 3** に示すように，ニュートン法の修正ループが収束せず振動を繰り返すためで，発散してしまう場合もある．

5.3 計算精度の比較

精度については，一つの試行としてメッシュ数 120 の有限要素法の計算結果を基準に，V の分布について

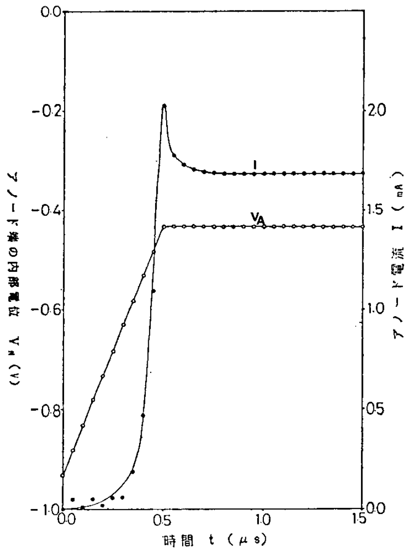

図12　過渡応答

表 2　計算時間の比較

	印加電圧 0.5 V まで			印加電圧 -0.5 V まで		
メッシュ数	60	45	30	60	45	30
有限要素法	184 s	115 s	75 s	196 s	118 s	73 s
差分法	328 s	発散	73 s	361 s	209 s	72 s

表 3　反復回数の比較

		有限要素法			差分法		
	メッシュ数	60	45	30	60	45	30
	0.5V	5	5	5	5	-	5
	0.4V	5	5	5	5	-	5
印	0.3V	4	4	4	5	-	4
	0.2V	4	4	4	4	発散	4
加	0.1V	4	4	4	27	5	4
	0 V	6	7	6	13	7	6
電	-0.1V	5	5	5	17	11	5
	-0.2V	5	5	5	6	5	5
圧	-0.3V	5	4	5	5	6	4
	-0.4V	4	4	4	21	17	4
	-0.5V	5	4	4	4	4	4

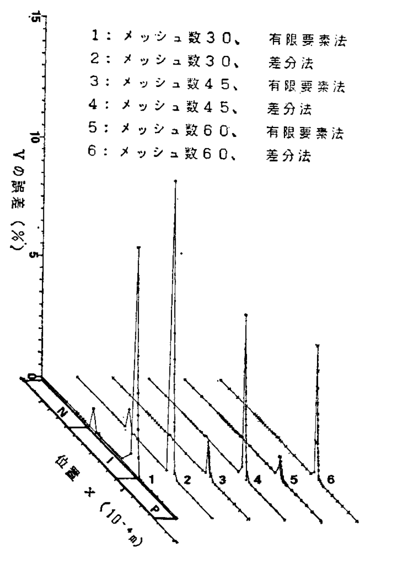

図13
計算精度の比較

比較を行なった．図13に，印加電圧 −0.1 V の場合の両者の誤差を示すが，誤差は基準の V に対するパーセントで表示してある．誤差は主に，pn 接合の付近で見られるが，いづれのメッシュ数でも，差分法の方が大きな誤差を生じていることがわかる．すなわち，有限要素法の方が，より収束性に優れ，計算時間も短かく，より精度のよい滑らかな分布を得ることができた．その理由としては，最初に比較したように，有限要素法の差分式の方が近似が良いためと思われる．

6. 結論

1次元モデルにより，半導体素子の不純物密度分布が与えられたときの，内部電位，正孔密度及び電子密度の分布を，有限要素法を用いて数値解析する方法を検討した．これを用いた PIN ダイオードの定常状態及び過渡状態に対する解析結果は，合理的な半導体の特性を示し，この手法の妥当性が確かめられた．

また，差分法との計算上の違いを明らかにし，本問題においては，精度と計算時間の点では差分法より優れていることが明らかとなった．

現在，2次元モデルへの拡張と GTO 等の電力用半導体の解析を検討中である．なお，計算には，愛媛大学情報処理センター FACOM M-180 II-AD を使用したことを付記する．

おわりに，本研究に関し，多大のご協力を下さった，渡辺和久（日立製作所），泉岡生晃（NTT），栢野雅行（三菱自動車），森山耕司（マツダ），小西博之（松下電産），吉田佳樹（リコー），瀬良田卓嗣（愛媛大学）の諸氏に対し，謝意を表する次第である．

参考文献

1) 例えば，M. Kurata：Numerical Analysis for Semiconductor Devices, Lexington Books (1982)
o) 例えば，J. J. Barnes, R. J. Lomax：Finite-Element Methods in Semicouductor Devices Simulation, I. E. E. E. Trans. E. D., 24-8, 1082/1089 (1977)
3) A. Nakagawa, C. H. Navon：A Time-& Temperature-Dependent 2D Simulation of the GTO Thyristor Turn-Off Process, I. E. E. E. Trans. E. D., 31-9, 1556/1563 (1984)
4) 柳沼，福井：GTOターンオフ特性の2次元数値解析，電気学会半導体電力変換研究会資料，SPC-83-27, 11/20 (1983)
5) 酒井，島田，加藤：電力用半導体素子構造解析プログラムの収束性改良に関する一手法，電子通信学会論文誌，J68 C-6, 433/439 (1985)
6) 上田，難波，坂本，三好，牛尾：2次元半導体デバイスシミュレータの開発と応用，電子通信学会論文誌，J67C-11, 825/832 (1984)
7) D. L. Scharfetter, H. K. Gummel：Large-Signal Analysis of a Sillicon Read Diode Oscilator, I. E. E. E. Trans. E. D., 16-1, 64/77 (1969)
8) 坂田，磯村，正田：有限要素法による電力用半導体の1次元数値解析，シミュレーション学会有限要素法の応用シンポジウム，6-4, 29/34 (1985)
9) 坂田，瀬良田，磯村，正田：有限要素法による電力用半導体の1次元数値解析—差分法との比較及び過渡特性—シミュレーション学会有限要素法の応用シンポジウム，7-24, 157/160 (1986)
10) 坂田，磯村，正田：有限要素法による電力用半導体の数値解析，電気学会半導体電力変換研究会資料，SPC-85-1, 1/10 (1985)