

非線形回路のカオスのシミュレーション

齊藤利通*・森 真作**

ABSTRACT This article is a brief explanation on a computer-assisted simulation for chaos and related phenomena observed from autonomous nonlinear circuits.

1. まえがき

工学の目的は物を作ることであるといわれている。しかしながら、思い通りに物を作ることは大変むずかしい。そして、作った物が当初の予定とは異なった動作をし、それが新しい有効な技術へと発展する場合の多いことは歴史が証明している。また、その“予想外の動作”そのものが極めて興味深い自然現象を反映したもので、その現象の考察が本質的な自然現象の解明へつながる場合のあることも周知の通りである。よく、工学者がこのような事態の中に陥ったときに“それは科学者の仕事だ”という意見を耳にするが、それはあまりに短絡的ではないだろうか。工学者が開発した理論の中には、極度な厳密さには欠けても、非常に便利で使いやすい物が多く、加えてアナログおよびデジタルシミュレーションは強力であり、このような武器をもってすれば、自然現象の本質を解明する上でも、一役買えると思われる。そしてそれが新しい素晴らしい技術へと発展していく可能性のあることはいくらでもない。

このような見地の下で、近年さかんにおこなわれている研究の中に“非線形回路に生じるカオス等の現象の解析”がある。ここでカオスとは、よく知られているように“微分方程式や差分方程式で記述される確定的な系に生じる不規則な現象”の総称であり¹⁾、その厳密な定義は、それ自体が現在の重要な研究テーマである。なお、カオスの研究は広い分野でおこなわれているけれども、かつて京都大学の上田先生が、何の変哲もない鉄共振回路のアナログシミュレーションで発

見されたカオス現象は、現在でも世界中で「ジャパニーズアトラクタ」などと呼ばれ、カオスの研究の有力なパイオニアとして評価されている。

さて、非線形回路に生じるカオス等の現象を調べるためには、一般的に非線形微分方程式をたて、それを解かなくてはならない。そして非線形の方程式は厳密には解けないので、アナログあるいはデジタルシミュレーションが有力な武器となってくる。本稿では特に、自律系回路に生じるカオス等の現象をコンピュータの力を借りてできるだけ厳密にシミュレーションする方法を、最近の筆者の仕事の一部もまじえながら、少し説明しようと思う。

なお、非自律系回路については、前述の上田先生や徳島大学の川上先生らが多くの優れた仕事を発表されているので、文献を参照していただきたい^{2)~7)}。また、自律系回路についても早稲田大学の松本先生等が優れた仕事をされているので、これも是非参照していただきたい^{8)~10)}。

2. 本 論

ここでは、非線形微分方程式の解の性質を調べるための常とう手段となっている写像法と、カオス等の現象の判定に用いられるリアフノフ指数について説明し、それらを実際に計算する方法を、事例をまじえて示すことにする。

(写像法)

自律系回路は一般に次のような方程式で記述される：

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

ただし、 \mathbf{x} は n 次元ベクトルであり、 \mathbf{f} は適当な連続関数で、 $t=0$ で与えられた初期値に対して、正の時間に対する解は一意に定まるものとする。ここで、 n 次元位相空間内に、ある $n-1$ 次元部分空間 S と S の

On a simulation for chaos in nonlinear circuits. By Toshimichi Saito (Sagami Institute of Technology) and Shinsaku Mori (Faculty of Science and Technology, Keio University).

*相模工業大学電気工学科 **慶応義塾大学理工学部電気工学科

中の有界な領域 Σ が存在し、 Σ の上の任意の点 x_0 を出発する式(1)の解は、適当な正の時刻に再び Σ と交差するものと仮定する。この交差した点を x_1 とかくことにすると、 Σ を自分自身に写す写像：

$$F: \Sigma \rightarrow \Sigma, \quad x_0 \mapsto x_1 \quad (2)$$

を定義することができる。この写像を用いると、解のふるまいは点列：

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\} \quad (x_{n+1} = F(x_n)) \quad (3)$$

を調べれば明らかとなる。このように連続系の解のふるまいを離散系(差分方程式 $x_{n+1} = F(x_n)$)に対応づけて調べる方法は写像法、またこの写像は Poincaré Map などと呼ばれている。

さて、式(2)のような Poincaré Map が定義できれば、 Σ から出発する解はまた必ず Σ を打つたから、明らかに解は相空間内の有限な領域に閉じこめられる。このとき点列(3)は $n \rightarrow \infty$ でさまざまな種類のアトラクタに漸近する。ここでアトラクタとは広義の定常状態に対応するものと考えて良い。最も単純なアトラクタは F の m 周期点 (m は自然数)、すなわち F を m 回旋してはじめて自分自身に帰る点であり、これは元の式(1)の周期解に対応する。また、なめらかなトーラス (F が 2 次元写像の場合は閉曲線) C で、 F によって不変な集合 $C = F(C)$ がアトラクタである場合、これは元の式の準周期解に対応している。さらに非常に複雑な形状をした F によって不変な集合がアトラクタとなる場合があり、これがいわゆるカオス現象に対応する訳であるが、本当にカオスであるかどうかを判定することはなかなか困難である。厳密な判定はカオスの定義すら不明確であるのだから当然不可能である。現在非線形回路の研究者の間でよく用いられている(近似的)判定手段は、次に述べるリアフノフ指数を用いたものである。

(リアフノフ指数)

まず、いくつかの記号を定義する：

$DF(x_0)$; F の x_0 におけるヤコビ行列

$$DF_m(x_0) \equiv [DF(x_{m-1}) \cdot DF(x_{m-2}) \cdot \dots \cdot DF(x_1) \cdot DF(x_0)]$$

$e_j(m)$; $DF_m(x_0)$ の固有値、

ただし、 $j=1, 2, \dots, n-1$

$$|e_1(m)| \geq |e_2(m)| \geq \dots \geq |e_{n-1}(m)| \text{ とする。}$$

そして、

$$\mu_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln |e_j(m)| \quad (4)$$

なる極限を考える。この極限が Σ の中のある部分集合の任意の初期値 x_0 に対して一定の値に収束する場

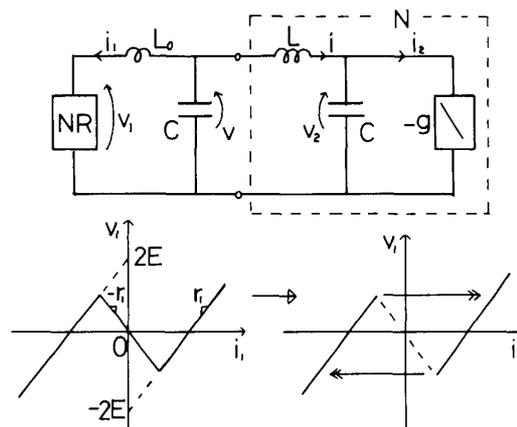


図1 4次元ヒステリシスカオス発生回路

合、その値がリアフノフ指数 ($\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$) である。

例えば対応するアトラクタが漸近安定な周期解である場合、この指数はいわゆる特性指数と同値であり、全てが負の値となる ($\mu_1 < 0$)。また $\mu_1 = 0$ の場合がトーラスの定義に、さらに $\mu_1 > 0$ がカオスの定義にしばしば用いられる。ここでカオスについては、ラフに言えば、「不安定で落ちつくところなく、ある領域内を動きまわる」、ということにでもなると思われる。これらの定義等に関する詳細な説明は文献^{(1)~(3)}に示されている。

ここで、まず問題となるのは、この指数の初期値に対する依存性である。言いかえれば、“いくつかの定常状態があるのか”，ということであるが、一般次元の系に対する一般論は困難を極める。これについてはハードウェア実験を注意深くおこない“現実生じている現象を検証する”という立場をとるのが良いのではないかと思う。

(計算法について)

厳密な意味で Poincaré Map のアトラクタやリアフノフ指数の存在を確認し計算することは現在のところ不可能である。また、それらを数値解析することも、特に4次元以上の系に対しては困難であるといわれている。そこでここでは筆者の考案したそれらが容易に計算できる例題回路を示し、その後で若干の全体的な議論をすることにする。

図1の回路を考える。同図において $-g$ は線形負性コンダクタであり、その特性は $i_2 = -gv_2$ で与えられる。また、NR は電流制御型非線形抵抗であり、その特性は

$$v_1 = r_1 i_1 + |r_1 i_1 - E| - |r_1 i_1 + E| \quad (5)$$

で与えられる。これらの素子はオペアンプを用いて容易に実現できる。また、 L_0 は微小なコイルである。

適当に無次元化した変数およびパラメータ：

$$\begin{aligned} \tau &\equiv t/(r_1 c), & x &\equiv v_1/E_1, & y &\equiv -(v_1 - r_1 i)/E, \\ z &\equiv ((1-\rho)v_1 + \rho v_2 + r_1 i)/E, & w &\equiv r_1 i_1/E, \\ 2\delta &\equiv r_1/r_2, & \rho &\equiv r_1^2 c/L, & \varepsilon &\equiv L_0/(r_1^2 c) \end{aligned} \quad (6)$$

を用い“ \cdot ”で τ に関する微分を表わすことにすれば、回路のダイナミクスは次式で記述される。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{J}(w - \mathbf{x}), \\ \varepsilon \dot{w} = w - h(w) \end{cases} \quad (7)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\equiv (x, y, z)^T, \\ \mathbf{J} &\equiv (1, 0, 0)^T, \\ h(w) &= w + |w-1| - |w+1|, \\ \mathbf{A} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \rho(2\delta-1) & -2(\rho-\delta) & 2\delta-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{A} がこのような形になるようにしたのは、図1の N がメモリー素子(L or C)を2つ含む線形で、回路全体に L のみのカットセットと C のみのタイセットがなければ、 N がどのような構造であってもこのような形に整理できるからである。この方程式は一つの標準型であり、系統的な議論をするために便利である。

次に、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とした場合を考える。これは回路でいえば L_0 をショートした場合に対応する。実験的事実によれば、NRはこのとき図1に示したようにヒステリシス抵抗となる。これは方程式では次のことに対応する。すなわち、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき相空間内で w は他の変数よりもはるかに速く動き、多様体 $x=h(w)$ の安定な部分

$$S_+ \equiv \{x, w | w \geq 1, x = w - 2\}$$

あるいは

$$S_- \equiv \{x, w | w \leq -1, x = w + 2\} \quad (8)$$

に急速に近づく。つまり、解は、ほぼ S_+ あるいは S_- の上に拘束される訳である。 S_+ および S_- 上のダイナミクスは次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{P}), & \text{for } \mathbf{x} \in S_+, \\ \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{P}), & \text{for } \mathbf{x} \in S_- \end{cases} \quad (9)$$

ただし

$$\mathbf{P} \equiv (2/(2\delta-1), 2, -2)^T,$$

であり、 w を省略した。また、 S_+ (S_-)の上にある解はしきい値 $x=-1$ ($x=1$)に達すると \mathbf{x} を一定に保って $S_-(S_+)$ の上にジャンプする：

$$S_+ \xrightarrow{x=-1} S_-, \quad S_- \xrightarrow{x=1} S_+ \quad (10)$$

結局、微小パラメータ ε を含み拘束を持つような区分的線形方程式(7)は、2つの対称な線形方程式(9)が、ヒステリシスジャンプ(10)で接続される系に簡略化できる。この簡略化の妥当性は、方程式(7)が一般次元の場合に対して厳密に示すことができる¹⁷⁾。

Poincaré Mapについて考える。まず S_+ 内の $x=1$ 平面(これを B_+ とかく)の上にある有限な領域 Σ があって、 Σ 内の任意の点 $(1, Y_0, Z_0)$ を出発する解が、適当な正の時刻 τ_1 に $x=-1$ 平面を打つものと仮定し、打った点を $(-1, Y_1, Z_1)$ とかく。このしきい値平面を打った瞬間に、解は S_- 内の同じ点にジャンプする。ここで注目すべきことは、 S_- 内の $(-1, Y_1, Z_1)$ を出発する解は S_+ 内の $(1, -Y_1, -Z_1)$ を出発する解と全く対称であるということである。この段階で (Y_0, Z_0) を $(-Y_1, -Z_1)$ に写す写像 $T': \Sigma \rightarrow B_+$ を定義することができる。さらに Σ の T' による像が Σ の部分集合とならば、先に述べたようなPoincaré Map,

$$T: \Sigma \ni (Y_0, Z_0) \mapsto (Y_1, Z_1) \quad (11)$$

を定義することができる。この T とそのヤコビ行列 DT は厳密解を用いて陰に厳密に記述することができる。そして、切りかわり時間 τ_1 をNewton-Raphson法等を用いて算出することにより T および DT を容易に計算することができる。さらに文献¹¹⁾に示された技術を DT に応用すれば、リアフノフ指数も計算できる。これらの計算は厳密解を用いているので非常に精度が良く、ハード実験によって観察された現象を検証するための強力な武器となる。実際に計算された T のアトラクタとリアフノフ指数の例を図2に示す。これらの現象の変化のメカニズムは複雑であるので、本稿では省略するが、同図(d)の現象は2つのリアフノフ指数が正となるハイパーカオス¹⁴⁾であり、これは4次元以上の系に特有な現象であることを注意する。これらの現象はハード実験との対応がついている。なお、この例題に関連した議論は文献^{16), 17)}に示してある。また文献¹⁵⁾には式(7)の形の方程式が3次元の場合に、かなり強い意味でのカオス発生を完全に厳密証明できる場合のあることが説明してある。

以上示した例については、精度の良い簡単な計算が可能であるが、一般には、計算は大変困難となる。例えば、回路の非線形素子を多項式で近似した場合に、Poincaré Mapやリアフノフ指数を計算するためには、方程式をRunge-Kutta法等を用いて数値積分し、変分方程式を用いてヤコビ行列を計算することが必要となり、精密な計算は困難である。特に解の動き方が大

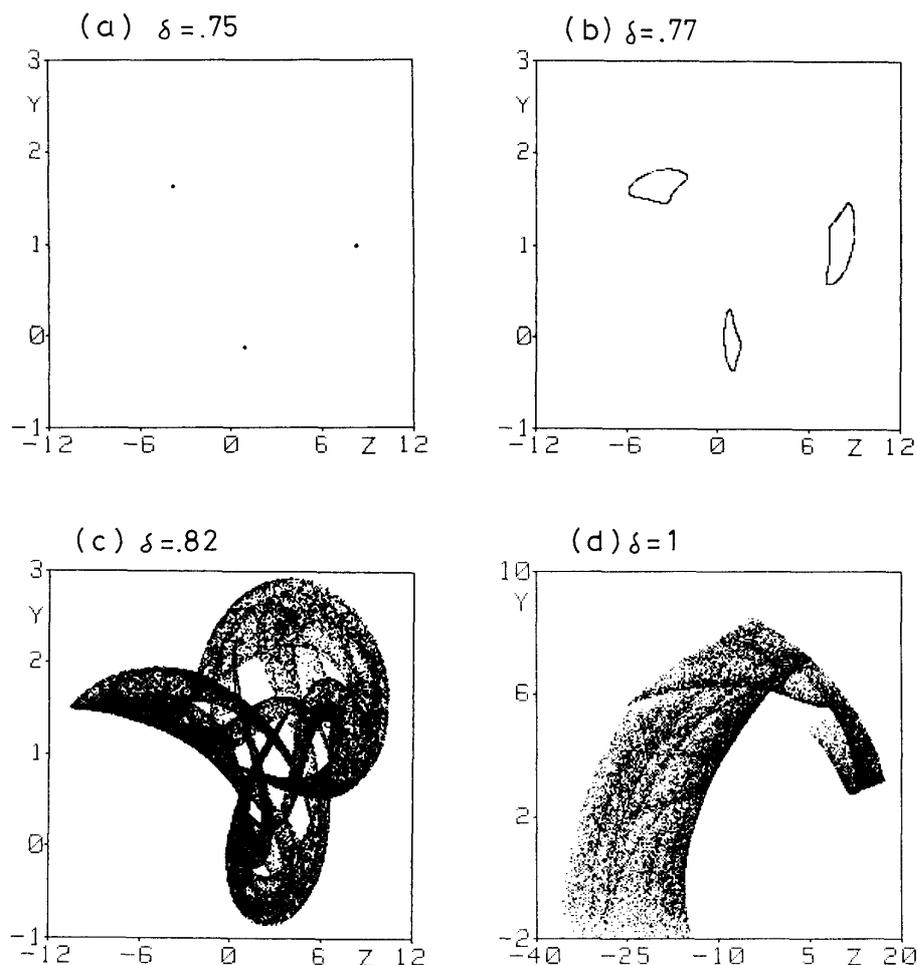


図2 Tのアトラクタの例 ($\rho=14$)

(a) : 3 周期点, $\mu_1 \doteq \mu_2 \doteq .008$ (b) : トーラス, $\mu_1 \doteq 0, \mu_2 \doteq -.013$
 (c) : カオス, $\mu_1 \doteq .163, \mu_2 \doteq -.066$ (d) : ハイパーカオス, $\mu_1 \doteq .321, \mu_2 \doteq .133$.

大きく変化するような場合にそれは顕著となる。この場合は、ハード実験との対応づけを十分注意深くおこなうべきであろう。

一方、非線形素子の特性を区分線形関数で近似できる場合には、方程式は各領域で厳密に解けるので、かなり正確な計算が可能となる。しかしながら先の例題もあったように、break pointでの解の接続のために非線形方程式を解く必要が生じるので、このような場合を対象とした高速かつ高精度の解法アルゴリズムの開発が重要な課題であると思われる。なお、式(1)が3次元区分線形の場合については、カオスに関するかなり厳密な議論が可能である⁹⁾。

また、区分線形近似は多項式近似よりも相当粗いものであるから、この場合もハード実験との比較が重要であろう。しかし、“粗く近似して高精度で簡単な計

算をする”というアイディアはなかなか有効なものであると思われ、この考えをさらに進めたものの一つが先の例題回路であるといえることができるかもしれない。

3. むすび

非線形回路に生じるカオス等の現象を計算する、という問題について、区分線形化法を用いて自律系回路を解析する場合的を絞って概説した。区分線形特性で表現可能な素子はオペアンプやダイオードを用いれば構成しやすいし、方程式は各領域で厳密に解けるので、この方法は有効なものと思われる。現在、4次元以上の自律系回路に生じるカオス等の問題はほとんど未解決であり、そのような回路には必ず極めて興味深い現象が発生するはずである。本稿で示した手法が

それを解明するための役に立つことを期待している。
また、そのためにまずやるべきことは、高速かつ高精度の非線形方程式の解法アルゴリズムの開発であると思われる。

参 考 文 献

- 1) E. Lorenz: Deterministic non-periodic flows, *J. Atmos. Sci.*, 20, 130/141 (1963)
- 2) 上田院亮: 非線形性に基づく確率統計現象, *電学論*, 98-A, 3, 167/178 (1978)
- 3) Y. Ueda and N. Akamatsu: Chaotically transitional phenomena in the forced negative resistance oscillator, *IEEE Trans.*, CAS-31, 217/224 (1981)
- 4) 川上博: コンピュータでみる回路のカオス, *月刊フィジクス*, 7-1, 51/55 (1986)
- 5) H. Kawakami: Bifurcation of periodic response in forced nonlinear circuits—, *IEEE Trans.*, CAS-31, 248/260 (1984)
- 6) T. Endo and L. O. Chua: Chaos from phase-locked loops, *IEEE Trans.*, CAS-35, (in press)
- 7) F. M. A. Salam and S. S. Sastry: Dynamics of the forced Josephson junction circuits, *IEEE Trans.*, CAS-32, 8, 784/796 (1985)
- 8) T. Matsumoto, M. Komuro and L. O. Chua: The double scroll, *IEEE Trans.*, CAS-32, 8, 797/818 (1985)
- 9) L. O. Chua, M. Komuro and T. Matsumoto: The double scroll family, *IEEE Trans.*, CAS-33, 11, 1073/1118 (1986)
- 10) T. Matsumoto, L. O. Chua and K. Kobayashi: Hyperchaos. Laboratory experiment and numerical confirmation, *IEEE Trans.*, CAS-33, 11, 1143/1146 (1986)
- 11) I. Shimada and T. Nagashima: A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamic systems, *Prog. Theor. Phys.*, 61, 1605/1616 (1979)
- 12) C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke: The dimension of chaotic attractor *Physica* 7D, 181/200 (1983)
- 13) J. Guckenheimer and P. Holmes: *Nonlinear oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, New York, Springer (1983)
- 14) O. E. Rössler: Continuous chaos, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 31, 376/392 (1979)
- 15) 齊藤利通: 区分線形拘束方程式で記述されるカオス発生回路について, *信学論 (A)*, J71-A, 4, 965/972 (1988)
- 16) T. Saito: The hysteresis chaos generator family, *IEEE ISCAS Procs.*, 15/18 (1988)
- 17) T. Saito: An approach toward higher dimensional hysteresis chaos generators, *IEEE Trans. CAS.* (submitted)