

《小特集》

動的逆問題への境界要素法の応用

田 中 正 隆*

ABSTRACT This article presents basic ideas to apply the boundary element method to some inverse problems in acoustics and elastodynamics. First, it is shown that noise source identification and the computer simulation of active noise control in ducts can be successfully treated by the boundary element software together with the standard optimization technique. Then, in the elastodynamic inverse problems, numerical experiment is carried out to identify internal defects included in a structural component by using as additional information the displacement responses measured at several points on the outer boundary, whereby the potential usefulness of this computational approach is demonstrated.

1. ま え が き

コンピュータの大型化・高速化ならびに多様化（スーパーコンピュータから EWS・パーソナルコンピュータまで）により，初期値—境界値問題として数理モデル化された種々の問題に対する数値解析ソフトウェアが一段と完備してきた．これらの数値解析ソフトウェアは，初期条件や境界条件および領域形状などを与えて問題の支配微分方程式を数値的に解くという，いわゆる順問題（direct problem）解析用のツールである．この種の順解析ソフトウェアの充実に伴って，これを利用して逆問題（inverse problem）を解決したいという要求が高まり，逆問題のコンピュータ手法に関する研究が多くに関心を集めている^{1)~7)}．実際，大規模知識情報処理技術の発達により，実用的な逆問題解法への期待が大きくなってきているといえる．

一般に逆問題は，原因から結果を推定するという類のすべての問題を含むわけであり，理工学分野ばかりでなく他のあらゆる分野にわたり横断的に存在するきわめて重要な問題である．しかしながら，工学上の用語では，「逆問題とは，ある系からの出力をもとにこの系への入力あるいは系そのものの欠落情報を同定する問題である」と定義できよう．この定義によれば，工学的な設計は逆問題そのものであって，与えられた仕様を満足する最適形状を決定するという最適設計は逆問題の典型例である．

一方，観測可能な部分で得られた限られた数の測定値を補助情報として用い，観測不可能な部分の形状や特性を推定するという逆問題を解決しなければならないことが，理工学の分野ではしばしば生じる．非破壊検査などはこの種の逆問題の典型例であり，これに順解析のコンピュータソフトウェアを利用する試みが注目されている^{1)~7)}．このアプローチでは，まず欠落している情報を仮定して順解析を行ない，得られた結果と与えられた補助情報との残差 2 乗和を考え，これを最適問題の標準的なアルゴリズムを適用して最小化することにより欠落情報を同定する手法が一般に採用される³⁾．

本稿では，上述の逆問題へのアプローチの例として，境界要素法による順解析ソフトウェアを利用する音響逆問題および動弾性逆問題解析手法について述べ，著者の研究グループで得られた最新の研究成果を紹介する．

2. 音響逆問題

騒音や振動の低減は工学上きわめて重要な課題であり，騒音制御や音源探査などの音響逆問題に関する研究が大きな関心を集めている．音場の実験解析では，従来は音圧の測定値を用いることが多かったが，最近では生活雑音中でも比較的容易に正確な値が得られるうえ，音場の可視化にも適用しやすい音響インテンシティ（acoustic intensity）を用いることが多くなってきている⁸⁾⁹⁾．ここでは，音場内のいくつかの点で計測した音響インテンシティを補助情報として用いる音響逆問題への境界要素法の応用について述べる．

Application of Boundary Element Method to Dynamic Inverse Problems. By Masataka Tanaka (Dept. of Mech. Systems Eng., Faculty of Engineering, Shinshu University).

*信州大学工学部生産システム工学科

2.1 複素音響インテンシティ

音場内部の任意の点 x における i 方向の複素音響インテンシティ I は、その点での音圧と粒子速度の積として次式で与えられる⁸⁾⁹⁾。

$$I(x) = \overline{P(x, t)} V_i(x, t) \quad (1)$$

ただし、 $P(x, t)$ は音圧、 $V_i(x, t)$ は i 方向の粒子速度、上付バー (bar) は時間平均を示す。いま、任意の点 x における音圧が、時間に関する次の調和関数で表わされるものと仮定する。

$$P(x, t) = p(x) \exp(j\omega t) \quad (2)$$

ただし、 ω は角周波数、 $j = \sqrt{-1}$ である。このとき、式(1)の時間平均をとれば、複素音響インテンシティは次式で与えられることがわかる。

$$I(x) = \frac{1}{2} p(x) \bar{v}_i(x) = I_i(x) + jQ_i(x) \quad (3)$$

ただし、上付バーは共役複素数を表す。式(3)において、実数部 $I_i(x)$ が従来の音響インテンシティ (active intensity) を、 $Q_i(x)$ が複素音響インテンシティの虚数部 (reactive intensity) を表す。

媒質が微小振幅で定常振動しているものと仮定すれば、音場内部では Euler の式が成立する。式(2)をこの Euler の式に代入することにより、点 x での i 方向の粒子速度は p を媒質の密度とすると次式で表わされる。

$$V_i(x, t) = \frac{j}{\omega \rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \exp(j\omega t) \quad (4)$$

したがって、式(1)～(4)を用いれば、複素音響インテンシティは次式で与えられることになる。

$$I(x) = \frac{1}{2} p(x) \frac{-j}{\omega \rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (5)$$

音響インテンシティの数値計算では、式(4)の音圧勾配 ($\partial p / \partial x_i$) は差分近似により求められることが多い。このため、この方法によれば差分間隔の大きさが数値計算の精度に大きく影響する。この難点を克服するために、ここでは積分方程式を直接微分することにより式(5)の音圧勾配を求める方法¹⁰⁾を採用している。

2.2 音響順問題の境界要素法解析

音場内部の媒質が微小振幅で定常振動しているものと仮定しているので、音場内部の支配方程式は Helmholtz 方程式となる。これに対する境界積分方程式は、周知のように次式で与えられる¹¹⁾。

$$c(y)p(y) + \int_S q^*(x, y)p(x) dS(x)$$

$$= -j\omega \rho \int_S p^*(x, y)v(x) dS(x) \quad (6)$$

ただし、係数 c は境界の形状により決まる係数であり、 $v(y')$ は、式(2)と同じ時間依存性を仮定した粒子速度である。また、 $p^*(y, y')$ および $q^*(y, y')$ は Helmholtz 方程式の基本解である。

音場内部の点 x での音圧は、境界上の音圧および粒子速度を計算したのち、次式より求めることができる。

$$p(y) = - \int_S q^*(x, y)p(x) dS(x) - j\omega \rho \int_S p^*(x, y)v(x) dS(x) \quad (7)$$

ここでは式(5)の音圧勾配を、音場内部の音圧に対する積分方程式(7)を直接微分することにより次式から導く。

$$p_{,i}(y) = - \int_S q_{,i}^*(x, y)p(x) dS(x) - j\omega \rho \int_S p_{,i}^*(x, y)v(x) dS(x) \quad (8)$$

ただし、 $p_{,i}^*(x, y)$ と $q_{,i}^*(x, y)$ は、それぞれ、基本解を点 y において i 方向の座標に関して微分したものである。

式(4)と式(8)より、音場内部の点 y での i 方向の粒子速度は次式で表わされる。

$$v_i(y) = - \frac{j}{\omega \rho} \int_S q_{,i}^*(x, y)p(x) dS(x) + \int_S p_{,i}^*(x, y)v(x) dS(x) \quad (9)$$

境界積分方程式(6)および音場内部の点に対する音圧と粒子速度に関する積分方程式(7)と(9)をそれぞれ境界要素法で離散化し、マトリックス表示すれば次式が得られる。

$$[H]\{p\}_r = [G]\{v\}_r \quad (10)$$

$$p_a = -[A]\{p\}_r + [B]\{v\}_r \quad (11)$$

$$v_{ia} = -[C_i]\{p\}_r + [D_i]\{v\}_r \quad (12)$$

ただし、添字 Γ と Ω はそれぞれ境界上及び領域内部の値であることを示し、係数マトリックスの添字 i は、音場内部の i 方向の粒子速度に関するマトリックスであることを示す。

音場内部の任意の点での i 方向の複素音響インテンシティは、式(11)と(12)で境界上の諸量と関係づけられる音圧値と粒子速度値を用いて、次式で計算できる。

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \bar{v}_{in} \quad (13)$$

2.3 最適化手法を用いた振動状態の同定

音場内部のいくつかの点で複素音響インテンシティの測定値が補助情報として与えられるものとして、これを基本データとする。振動状態を同定するという音響逆問題では、まず振動状態を仮定して境界要素法順解析から得られる複素音響インテンシティと基本データとの残差平方和を目的関数として、最適化手法により振動状態を表わす最適パラメータを求めればよい。ここでは、この問題を制約条件のない非線形最適化問題として取り扱い、最適化手法としては、共役勾配法⁽¹²⁾⁽¹³⁾を用いる。この最適化問題の目的関数 W は次式のように定義できる。

$$W = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \{ (I_{ni} - I_{0ni})^2 + (Q_{ni} - Q_{0ni})^2 \} \quad (14)$$

ただし、 N は基本データの測定点数、 I_{0ni} と Q_{0ni} は基本データである。また、 I_{ni} と Q_{ni} は、それぞれ複素音響インテンシティの実数部と虚数部の i 方向成分の大きさであり、音響インテンシティに対する境界要素法解析より計算できる。

最適化手法において、 k 回目の反復計算によるパラメータ $\{y\}$ の改良値を次式で計算する。

$$\{y\}^{k+1} = \{y\}^k + \alpha^k \{d\}^k \quad (15)$$

ただし、 $\{d\}^k$ は探索方向ベクトル、係数 α^k は探索方向ベクトルの大きさを決定するステップ幅であり、探索方向ベクトル $\{d\}^k$ の方向に沿った 1 次元探索⁽¹³⁾ により決定される。

共役勾配法において、探索方向ベクトルは次式で定義される。

$$\{d\}^k = -\{\nabla W\}^k + \beta^k \{d\}^{k-1} \quad (16)$$

ここで、 $\{\nabla W\}$ および β^k は次式から求められる。

$$\nabla W = 2[J]^T \{w\} \quad (17)$$

$$\beta^k = \frac{|\{\nabla W\}^k|^2}{|\{\nabla W\}^{k-1}|^2} \quad (18)$$

ただし、 $[J]$ は Jacobi 行列、 $\{w\}$ の成分は $w_n = (I_{ni} - I_{0ni})$ である。

以上のことより、共役勾配法では次式を用いて反復計算を行えばよいことになる。

$$\{y\}^{k+1} = \{y\}^k - \alpha^k (\{\nabla W\}^k) - \beta^k \{d\}^{k-1} \quad (19)$$

最適化の収束判定においては、目的関数がある値以下の小さなものとなり、さらに次に示す 2 式のうちのどちらかが満足された時、反復計算が収束したものとする。

$$|W^k - W^{k-1}| < \varepsilon \quad (20)$$

$$\sum_{m=1}^M |y_m^k - y_m^{k-1}| < \eta \quad (21)$$

ただし、 ε および η は収束判定値である。

2.4 振動源同定の数値計算例⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾

解析対象として、半無限平面内に位置する大きさが既知の音源の振動状態の同定を取り上げる。音源の形は正方形と仮定する。以下の 2 つの方法を用いて 2～3 の例題について数値実験を行った。

方法 1：騒音源の振動状態が次式で表わされるものとし、その係数 A_{mn} を未知パラメータとして最適化計算を行う。

$$v(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (-1)^{m+n} A_{mn} \times \cos\left(\frac{(2m-1)x_1}{2a}\pi\right) \cos\left(\frac{(2n-1)x_2}{2a}\pi\right) \quad (22)$$

ただし、 $2a (=1.0 \text{ m})$ は振動板の一边の長さ、 x_1, x_2 は振動板上の直角座標を表わす。

方法 2：振動板を要素分割した節点における節点粒子速度を直接未知パラメータとして最適化計算を行う。

振動板の要素分割は、8 節点アイソパラメトリック境界要素を用いて行う。音響インテンシティの基本データが与えられる測定点は、振動板から $h (=0.25 \text{ m})$ だけ離れた平面上に配置するものとする。具体的な要素分割、および測定点の点数とその配置は計算例と共にのちに示す。なお、材料定数や計算上のパラメータの値は次のように仮定した。

音速： $C_0 = 340 \text{ m/s}$ 周波数： $f = \omega/2\pi = 100 \text{ Hz}$

空気密度： $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ 収束判定値 $= \varepsilon = \eta = 10^{-5}$

なお、以下の例題で示す目的関数の収束結果に関する図の縦軸は、次式で定義される残差 R の値を示す。

$$R = \text{Log}_{10} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \left\{ \left(\frac{I_{ni} - I_{0ni}}{RI_0} \right)^2 + \left(\frac{Q_{ni} - Q_{0ni}}{RQ_0} \right)^2 \right\} \quad (23)$$

$$RI_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (I_{0ni})^2}, \quad RQ_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (Q_{0ni})^2}$$

また、この数値実験では、同定すべき振動状態を与えて境界要素解析を行って得られる測定点での音響インテンシティの値を基本データとして用いる。振動板の振動状態に対して粒子速度の実数部のみを考慮して、以下の例題の解析を行った。すなわち、式(22)において $m=2, n=1$ とおいて得られる図 1 に示す振動状態について解析を行った。この振動状態に対して、振動板の要素分割は、図 2 に示すように 6 要素 29 節点

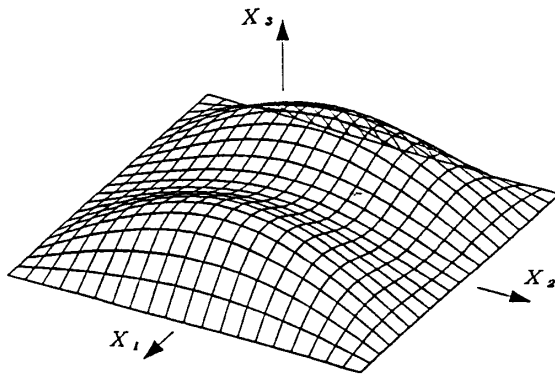


図1 振動源の振動状態

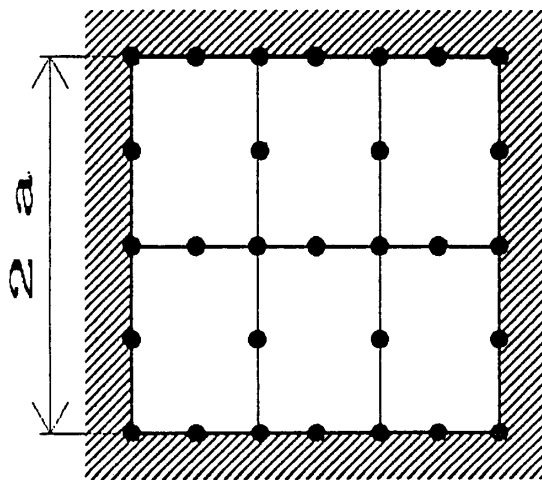


図2 振動源の境界要素分割

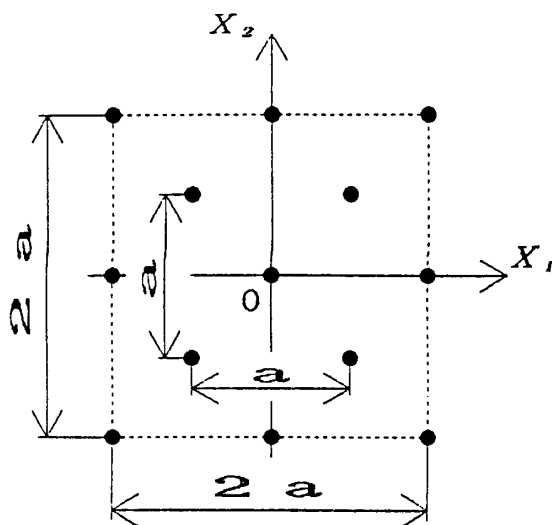


図3 測定点の配置

とした。したがって、未知パラメータ数は、方法1で2個、方法2では9個となる。測定点数は13点とし、その配置を図3に示す。同定された振動状態および目的関数の収束結果をそれぞれ図4と図5に示す。

以上のように、方法1または方法2のどちらを用いても正確な振動状態が求められることがわかる。方法1では、未知パラメータ数が方法2に比べて少ないので一般に計算時間は短い。しかし、振動状態を式(22)で表わすために解析対象の振動板形状が制約されることになる。一方、方法2では未知パラメータ数が多く計算時間は長くなるが、任意形状の騒音源に対する解析が可能である。

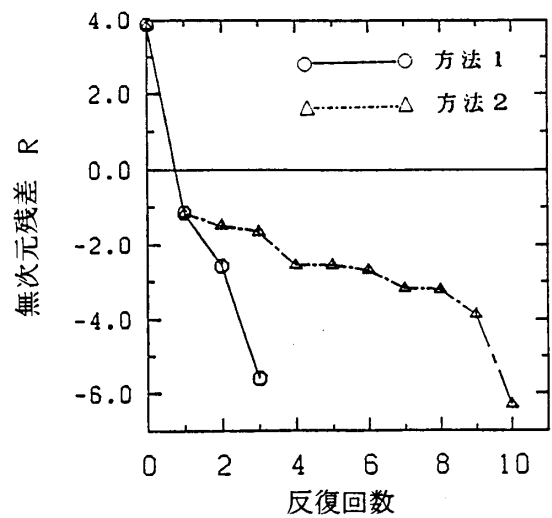


図4 残差の収束状況

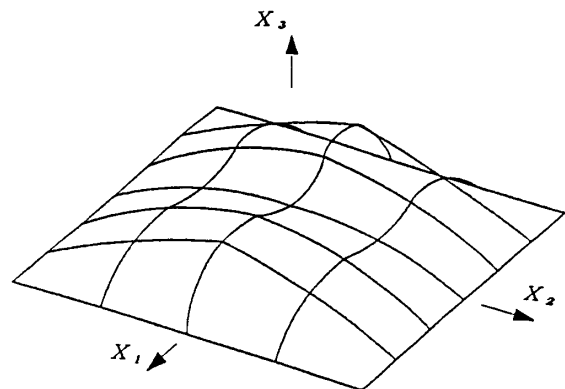


図5 振動源の振動状態の同定結果

2.5 騒音の能動制御のシミュレーション

騒音のアクティブコントロール（能動制御）が最近特に関心を集めている¹⁶⁾。ここで開発した音響逆問題の境界要素法解析手法を用いれば、騒音の能動制御のシミュレーションが可能である。本節では、ダクト騒音の能動制御のシミュレーション結果¹⁷⁾を紹介しておく。

図6には、ダクト騒音の能動制御の概念図を示す。1次音源が既知であるとして、2次音源を付加してここでの振動状態を適切に調節することにより、指定部分での音の放射を最小にしようというものである。ダクト断面は正方形であるとし、半無限の3次元音場への出口の音圧測定点での音圧の2乗和を最小にするという最適化問題として定式化する。2次音源の位置を与え、2次音源の最適振動状態を求める。この結果求められるダクト中心断面上での音圧レベルの等高線図を図7～図9に示す。図7と図8の例では、ダクト出

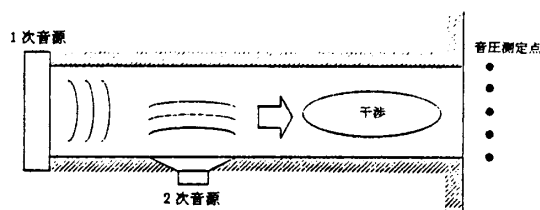


図6 ダクト騒音の能動制御（概念図）

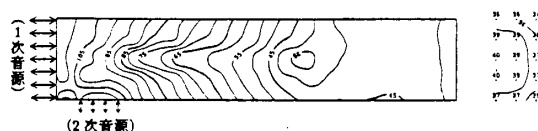


図7 ダクト中心断面上の音圧レベル図（モデル1）

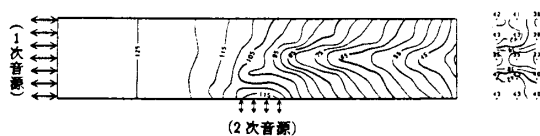


図8 ダクト中心断面上の音圧レベル図（モデル2）

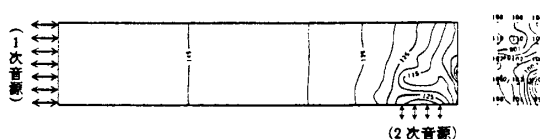


図9 ダクト中心断面上の音圧レベル図（モデル3）

口で音圧レベルは1次音源の約1/3になっており、放射音はほとんど無視できる状態にまで減じている。しかし、図9のようにダクト出口近傍に2次音源を付加しても騒音低減の効果はほとんどないことがわかる。

3. 動弾性逆問題

機械や構造物に内在する欠陥を検知し、管理することは安全性を評価するうえで極めて重要である。未知の欠陥またはき裂を非破壊的に推定するための検査法として種々の方法が開発され、いくつかは既実用化されている¹⁸⁾。しかし、構造順問題に対する数値解析ソフトウェアを利用して、未知欠陥またはき裂などに関する欠陥情報を同定する試みはまだ始まったばかりである。わずかに、電気ポテンシャル法がき裂の同定に適用され^{19)～22)}、その有用性が認識されつつある現状である。

ここでは、未知の内部欠陥（空洞と仮定する）を持つ構造要素が調和加振力を受けるときに得られる変位応答を補助情報として用い、境界要素法解析ソフトウェアに基づく逆問題解析法により未知欠陥同定を試みた結果²³⁾²⁴⁾について紹介する。境界面上のいくつかの点でひずみ応答が補助情報として与えられる場合についての考察も既に行なわれている²⁵⁾。

3.1 定常動弾性問題の境界要素法解析

内部に空洞の欠陥を有する均質で等方性の線形弾性材料から成る構造要素について考え、ひずみは微小であると仮定する。考える物体の占める領域を Ω とし、その境界を Γ とする。また、直角座標系 $O-x_1x_2x_3$ を用いる。

構造要素が角振動数 ω の調和加振力を受け、十分に長い時間を経過して定常振動しているものと仮定する。このとき物体力が作用しないとすれば、境界上の任意点 y における変位 u_i および表面力 p_i について、次の境界積分方程式が成立する²⁶⁾。

$$\begin{aligned} c_{kl}u_k(y, \omega) + \int_{\Gamma} p_l^*(x, y, \omega)u_l(x, \omega) d\Gamma(x) \\ = \int_{\Gamma} u_k^*(x, y, \omega)p_l(x, \omega) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (24)$$

係数 $u_k^*(x, y, \omega)$ と $p_l^*(x, y, \omega)$ は動弾性問題に対する基本解である。係数 c_{kl} は、なめらかな境界に対しては $c_{kl} = \delta_{kl}/2$ となる。

順問題解析においては、境界要素法により式(24)を離散化して境界上の節点量に関する連立代数方程式を導き、与えられた境界条件を考慮して解くことにより、未知節点量を求めることができる。

3.2 最適化手法の適用

構造要素の内部に存在する空洞欠陥の位置と大きさが未知であると仮定し、境界上で与えられる補助情報を用いてこれを同定することを考える。ここでは、この逆問題を構造要素に調和加振力を加えたときの境界上のいくつかの点で測定した変位応答と、境界要素順解析により計算した対応する変位との残差平方和を最小にする最適化問題に帰着させて解析する。

最適化における目的関数 W は、境界上で測定された変位 u_{0i} (基本データ) と、境界要素順解析により求められる対応する変位 u_i との残差平方和とする。すなわち、

$$W = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 (u_i^n - u_{0i}^n)^2 \quad (25)$$

ここで、 N は境界上の測定点の数である。最適化手法としては、さきに述べた音響逆問題の場合と同様に共役勾配法⁽¹²⁾⁽¹³⁾を用いる。

3.3 2次元問題についての数値実験⁽²⁴⁾

複数の欠陥を1個の等価な欠陥として同定しようとする場合を検討するために、2次元問題(平面応力)について数値実験を行なう。数値実験では、正方形板の内部に大きさの等しい円形の空洞欠陥が2個存在し、それぞれの空洞表面では表面力が作用しないものと仮定する。また、平面応力状態を仮定し、正方形板の材料定数及び調和加振力の角周波数を次のように与える。

縦弾性係数: $E = 210 \text{ GPa}$

Poisson 比: $\nu = 0.3$

物体の密度: $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

角周波数: $\omega = 1.5 \times 10^4 \text{ rad/sec}$

正方形板の寸法は1辺の長さを10 cm とする。

以上の条件のもとでいくつかの例題に対して数値実験を行い結果を得た。ここでは一例として、図10に示すように2個の大きさの等しい円形の欠陥が、座標原点 O に関して対称に位置している場合を考え、2個の円形欠陥から離れた位置に初期の欠陥を仮定して計算を実行した場合について示す。2個の円形欠陥と仮定した欠陥の中心位置と大きさは、図10に示すように設定する。

正方形板の1辺 CD を固定し、それ以外の3辺 AB , BC , DA は表面力が0という境界条件を仮定する。一定要素を用いて外側境界を40個に、空洞表面をそれぞれ16個に分割する。一方、仮定した欠陥に対しては一定要素により外側境界を40個に、空洞表面を24個に分割する。

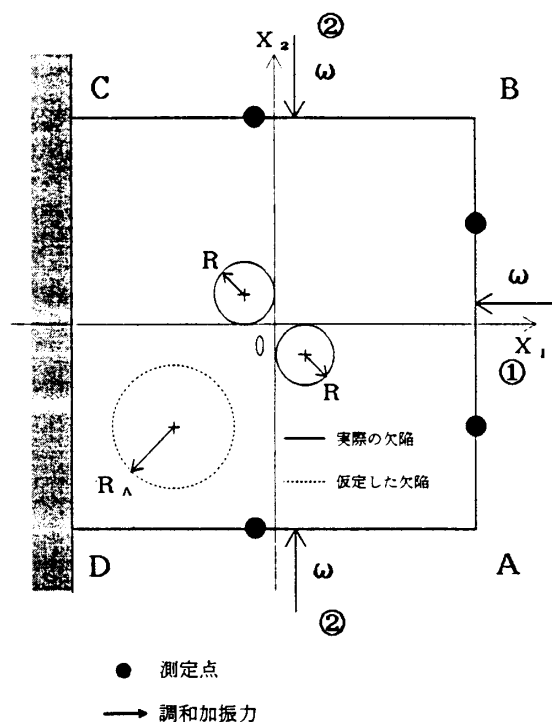


図10 2個の空洞欠陥を正方形板の例

マルチ加振法により解析するために、図10に黒丸で示す4個の測定点を考え、目的関数を次のように評価する。すなわち、①で示す調和加振力のもとでの目的関数のほかに、②で示す調和加振力のもとでの目的関数も考慮し、この2つの目的関数の代数和をこの問題の目的関数として用いる。

この時の残差の収束状況を図11に示す。12回の修正により残差が最小となり、その後は、計算を繰り返してもこれ以上目的関数を小さくするパラメータを見いだすことはできなかった。したがって、このときのパラメータの値を最適解とした。仮定した欠陥の修正過程を図12に示す。この図から、最終的には2個の円形

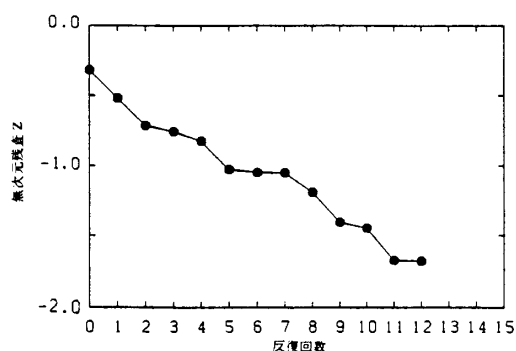


図11 残差の収束状況

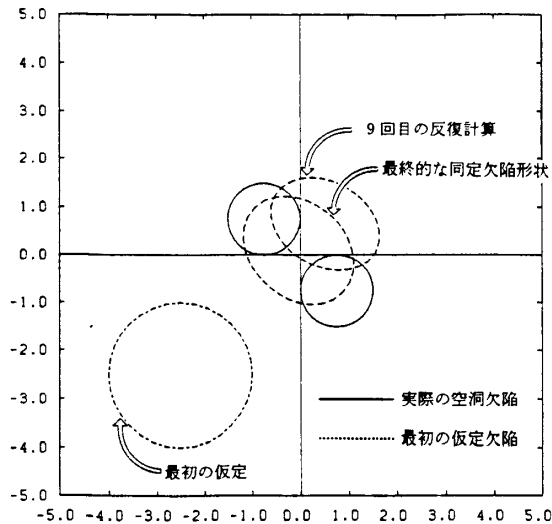


図12 欠陥の同定過程

欠陥に等価な1個の楕円形欠陥が同定されていることがわかる。

4. あとがき

X線や超音波などを用いたCT (=computed tomography) は非破壊検査において大きな成功を収めつつある。これらは既知の入射波の散乱場を計測し、これをコンピュータにより高速信号処理するものであって、これには計算力学の解析手法は用いられていない。本稿で取り上げた逆問題解析手法は、計算力学の分野で開発済みのコンピュータソフトウェアを逆解析の中心に据えたものであって、非破壊検査の分野ではこの種のアプローチはまだ始まったばかりである。電気ポテンシャル法によるき裂の同定で試みられ、その有用性が認識されたとはいえ、今後のさらなる発展が望まれているところである。実際、計算力学的手法による非破壊検査法では、数少い計測データを有効利用して欠陥情報をより正確に同定できる可能性が秘められているが、現状では計算時間がかかりすぎるといった問題点も指適しておきたい。

逆問題は一般に、解の唯一性が保証されないうえ、補助情報に含まれる誤差に同定結果が大きく影響されるという不適切 (ill-posed) で困難な問題である。このため、不適切性の除去のための有用な数学的理論の確立と、大規模知識情報処理技術などを援用した効率的な逆問題解析手法の開発が今後に残された重要課題である。幸にして、コンピュータ科学はハードウェアおよびソフトウェア両面から日進月歩の勢で発展を続

けており、本稿で述べた計算力学的手法はこの状況が変化せぬ限り、近未来において非破壊検査の分野でも実用化されるものと期待されている。

なお、本稿で示した研究は、音響逆問題に関しては一部サウンド技術振興財団の資金援助を受けて行なったものである。また動弾性逆問題に関しては、文部省科学研究費補助金一般研究 (C) (代表田中正隆) の援助を受けて行なった。関係各位に厚くお礼申し上げる。さらに、有益な討論とご支援をいただいている日本機械学会調査研究分科会「逆問題の計算力学的手法とその応用」(主査 田中正隆、幹事 久保司郎) の委員各位に感謝する。

参 考 文 献

- 1) 数理科学, 逆問題特集, No. 274, (1986).
- 2) 久保: 機械工学における逆問題の取扱い, 機械の研究, 39-10, 1071/1077 (1987).
- 3) M. Tanaka: Some Recent Advances in Boundary Element Research for Inverse Problems, Boundary Elements X, 1, ed. by C. A. Brebbia, Springer-Verlag, 567/582 (1988).
- 4) 日本機械学会シンポジウム, 逆問題のコンピュータ手法とその応用論文集, No. 890-34, (1989).
- 5) システム最適化に関するシンポジウム講演論文集, 土木学会, (1989).
- 6) H. D. Bui: On Some Inverse Problems for Determining Volumic Defects by Electric Current Using Boundary Integral Equation Approaches-An Overview, 境界要素法論文集, JASCOME, 6, 179/197 (1989).
- 7) 田中: 心電図逆問題の方法論, 医用電子と生体工学, 23-6, 147/158 (1985).
- 8) 橘, 矢野: 音響インテンシティ測定法の原理と応用, 騒音制御, 8-4, 4/9 (1984).
- 9) 日高, 安久, 橘: 複素音響インテンシティによる音場解析, 日本音響学会誌, 43-12, 994/1000 (1987).
- 10) 田中, 矢崎: 境界要素法による音響インテンシティ解析システムとその応用, 日本機械学会論文集 (C編), 55-513, 1187/1192 (1989).
- 11) 田中正隆, 田中道彦: 境界要素解析の基礎, 161/168, 培風館 (1984).
- 12) R. L. Fox: Optimization Methods for Engineering Design, 38, Addison-Wesley (1971).
- 13) P. Papalambros, D. J. Wilde: Principles of Optimal Design, 113, Cambridge Univ. Press (1988).
- 14) 田中, 矢崎, 山田: 境界要素法を用いた最適化手法による騒音源の同定, 日本機械学会論文集 (A編), 55-518, 2073/2079 (1989).
- 15) 田中, 山田: 音響逆問題の環境要素解析 (音響インテンシティを補助情報とする振動減の同定), 文献 (5), 99/104 (1989).
- 16) 日経メカニカル, 騒音低減技術, No. 265, 40/60 (1988).
- 17) 田中, 山田, 白鳥: ダクト騒音の能動制御のための境界要素法シミュレータの開発, 境界要素法論文集, JASCOME, 6, 25/30 (1989).
- 18) 国尾武, 中沢一, 林郁彦, 岡村弘之 (編): 破壊力学

- 実験法, 8/30, 朝倉書店 (1984).
- 19) S. Kubo, T. Sakagami, K. Ohji: Electric Potential CT Method Based on BEM Inverse Analyses for Measurement of Three-Dimensional Cracks, *Computational Mechanics '86*, 1, ed. by G. Yagawa and S. N. Atluri, V-339/344, Springer-Verlag (1986).
 - 20) 坂上, 久保, 橋本, 山脇, 大路: マルチ電流負荷方式を用いた電気ポテンシャル CT 法による未知内部き裂の位置および傾斜角の測定, *日本機械学会論文集 (A 編)*, 53-492, 1598/1606 (1987).
 - 21) M. Hayashi, M. Ohtaka, S. Kanno, T. Shimizu: Computer Code for Determination of Surface Crack Configuration in Electrical Potential Drop Measurement System, *Proc. 11th World Congr. on Nondestructive Testing*, 245/249 (1985).
 - 22) 矢川, 福田: 破壊力学における電位差法の適用 (1)~(3), *機械の研究*, 35-11, 1237/1244 (1983); 35-12, 1324/1330 (1983); 36-1, 27/32 (1984).
 - 23) 田中, 中村, 山際, 中山: 境界要素法による動弾性逆問題の解析, *日本機械学会論文集 (A 編)*, 55-514, 1445/1452 (1989).
 - 24) 田中, 中村, 中野: 欠陥同定問題へのマルチ加振法の適用 (複数の欠陥が存在する場合), *日本機械学会材料力学講演会講演概要集*, No. 890-59, 76/77 (1989).
 - 25) 田中, 中村, 中野: 境界要素法による構造要素の欠陥同定 (動的ひずみ応答を補助情報とする場合), *境界要素法論文集, JASCOME*, 6, 287/292 (1989).
 - 26) 田中正隆 (訳): 境界要素解析—理論と応用, 366/382, 丸善 (1984).