

## PTC サーミスタの熱解析

南 里 孝 行\*・片 島 鋭 二\*\*・白 石 啓 二\*\*

**ABSTRACT** A thermistor with a positive temperature coefficient of resistance which is called a PTC thermistor is a temperature sensitive resistor. It has been used as a thermally sensitive switch, an element of temperature control circuit and a thermal compensation element of electronic circuit.

In this paper, authors make a PTC thermistor of rectangular solid as an experiment and measure the thermal properties and the coefficient of heat transfer on the surface. They give a finite element method of thermal analysis on the PTC thermistor.

They ascertain that the method enables the temperature-rise characteristics and steady-state temperature distribution of the PTC thermistor to be calculated with a high degree of accuracy according to the measurements made for it.

### 1. ま え が き

PTC サーミスタは、抵抗の正の温度係数 (Positive Temperature Coefficient) を有するサーミスタをいい、主成分はチタン酸バリウムである。PTC サーミスタは、通电するとジュール熱により温度上昇し、ある温度条件に達すると、温度上昇とともに指数関数的に抵抗が増大する。この性質を利用して、PTC サーミスタは、自動熱スイッチや温度制御あるいは電子回路の温度補償用などとして幅広く用いられてきている。

PTC サーミスタに関し各部温度上昇特性、総発生熱流 (供給電圧の2乗をこの総発生熱流で割れば PTC サーミスタの実効抵抗が得られる) が計算し得る熱解析法が与えられれば、PTC サーミスタの物理特性の改善のための指針を得たり、実験回数削減などにより用途に応じこれを効率的に開発する上で極めて有用である。

従来、PTC サーミスタに関し各部温度上昇特性、総発生熱流を計算した研究例は皆無である。

PTC サーミスタの温度上昇特性解析において、こ

の熱物性値(すなわち熱伝導率、体積比熱、導電率値)と外表面における熱伝達率値が与えられる必要があるが、これらは実際に測定することにより求め、温度の関数となる。

本文では、熱計算法として有限要素法を用い、計算手順を要約すれば以下のようになる。

解析領域を1次四面体要素を用いて要素分割し、時間空間間隔を $\Delta t$ として時間間隔 $\Delta t$ 毎に温度分布を求める。

任意時刻における温度分布の計算において、まず各要素の発生熱流密度を求める必要がある。これは、PTC サーミスタ供給電圧から得られる電位を電極に与え、各要素の $\Delta t$ 前の時刻の4節点温度の平均値により各要素における導電率を計算し(各要素内で導電率を一定とする)、文献1)の計算法を用いて求める。次いで、各要素における熱伝導率、体積比熱を導電率と同様にして求め、上記発生熱流密度を用いて温度分布を計算する。

本文では、縦1 cm、横2 cm、厚さ0.3 cmの直方体状の PTC サーミスタ (これを矩形 PTC サーミスタという) を試作し、矩形 PTC サーミスタの熱解析法について論じる。

この熱解析法の有効性を評価するため、矩形 PTC サーミスタに直流電圧60 V を印加して加熱実験を行ない、電圧印加後の外表面各部温度上昇及び定常温度分布を熱電対により測定する。また、矩形 PTC サーミスタの熱物性値、熱伝達率値を測定して、各測定データから最小2乗近似法によりそれらの近似温度関数

Thermal Analysis on Thermistor with Positive Temperature Coefficient of Resistance. By Takayuki Nanri (Faculty of Engineering, Nagoya Institute of Technology), Eiji Katashima and Keiji Shiraishi (Matsushita Electronic Components Co., Ltd.).

\*名古屋工業大学工学部

\*\*松下電子部品㈱

†1990年5月28日受付, 1990年7月20日再受付

を求める。

矩形 PTC サーミスタの導電率は、常用温度範囲において指数関数的に大きく変化する。そのため、四面体要素において、わずかな温度誤差が生じて、要素における導電率値がそれにより変化し、その変化が内部発生熱流密度に影響を及ぼし、温度分布計算に大きな影響をあたえる。従って、直方体解析領域を適当な四面体要素数に分割したとき（四面体要素は全て同形で同じ大きさとする）、分割の仕方により各部温度上昇計算結果は異なり、領域の四面体要素分割状況が、領域の中心における節点を対称点として点対称になるように分割したときに、良好な各部温度上昇計算結果が得られることが知られた。

上記のように解析領域を簡単に要素分割できるようにするため、8個の基本直方体要素（これを6個の同一形状で同じ大きさの四面体要素に分割する）からなる“点対称基本分割要素”を提案し、これにより解析領域を要素分割する。

本計算法による数値解の精度は、四面体要素及び時間空間刻み  $\Delta t$  の大きさに依存するので、精度よい数値解を得るための四面体要素及び時間空間刻み  $\Delta t$  の大きさの程度について論じている（なお本文では四面体要素そのものの大きさでなく、間接的に領域の基本直方体要素分割数の大きさに関し論じている）。

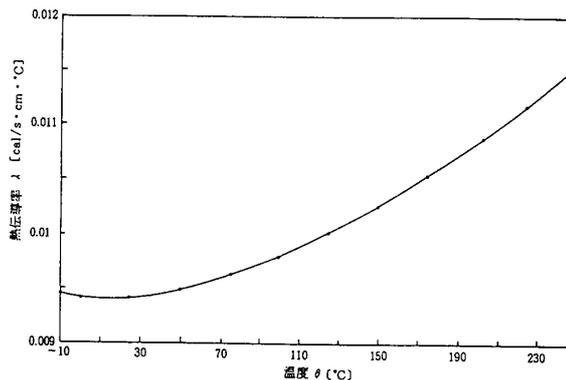
また、矩形 PTC サーミスタに関する計算結果と実験結果とを比較検討し、本計算法の有効性を検証している。

## 2. 矩形 PTC サーミスタの熱物性値と熱伝達率

図1～図3に熱伝導率 ( $\lambda$ )、体積比熱 ( $sp$ ) 及び導電率 ( $\sigma$ ) の実測値 (図中・印で示す) と最小2乗近似法によるそれらの近似温度関数 (図中実線で示す) を示している。図4に、図5に示す矩形 PTC サーミスタの外表面各面における平均熱伝達率 ( $h$ ) の実測値 (図注・印) と最小2乗近似法によるそれらの近似温度関数 (図中実線で示す) を示す。なお、各面熱伝達率の測定並びに後述する実験において、矩形 PTC サーミスタは、端子で両端が支えられ、 $z$  軸の負方向と重力の方向が一致するように水平に空气中に浮かぶように配置されている。また、矩形 PTC サーミスタ周囲温度は常に  $20^\circ\text{C}$  一定に維持している。

## 3. 矩形 PTC サーミスタの熱解析法

本章では図5に示す縦1 cm、横2 cm、厚さ0.3 cm

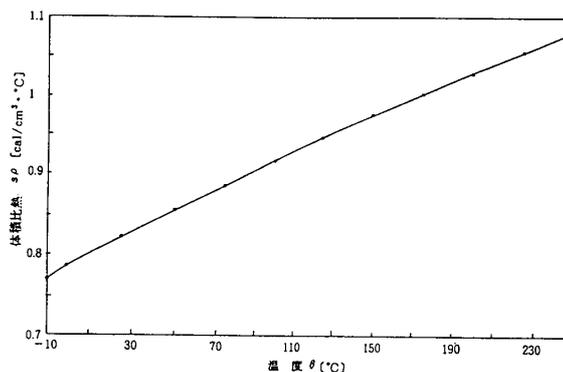


近似多項式の係数

$i$	$a_i$
0	$9.41033 \times 10^{-3}$
1	$-2.06177 \times 10^{-6}$
2	$8.81188 \times 10^{-9}$
3	$-3.97499 \times 10^{-10}$
4	$1.26171 \times 10^{-12}$
5	$-1.61852 \times 10^{-15}$

$$\lambda = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + a_5\theta^5$$

図1 熱伝導率の実測値と近似温度関数



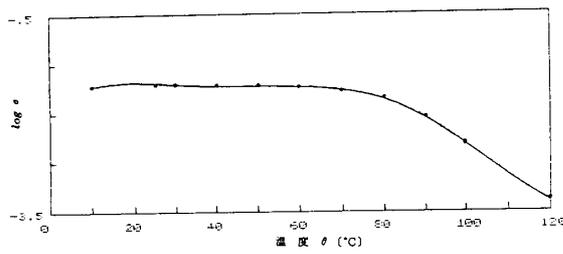
近似多項式の係数

$i$	$a_i$
0	$7.85122 \times 10^{-1}$
1	$1.54939 \times 10^{-3}$
2	$-3.89729 \times 10^{-6}$
3	$2.40577 \times 10^{-9}$
4	$-9.18933 \times 10^{-11}$
5	$1.38173 \times 10^{-13}$

$$sp = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + a_5\theta^5$$

図2 体積比熱の実測値と近似温度関数

の矩形 PTC サーミスタの有限要素法による熱解析法について論じる。ここで PTC サーミスタの初期温度は  $20^\circ\text{C}$ 、周囲温度は  $20^\circ\text{C}$  一定とする（実験においても同様）。図中、端子の接続されている矩形 PTC サーミスタ右側面及び左側面に銀電極が融着されており、これらを正負の電極とし、端子間に直流電圧 60 V を供給する。xyz 直角座標原点 0 は図のように矩形 PTC サーミスタ下面の角部にとる。また、以下の解析において、薄く融着された銀電極及びそれに接続さ



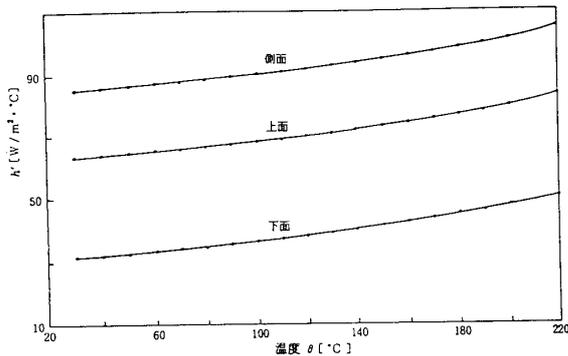
近似多項式の係数

$i$	$a_i$
0	-1.98649
1	$6.64106 \times 10^{-2}$
2	$-3.26833 \times 10^{-3}$
3	$6.85296 \times 10^{-5}$
4	$-6.34812 \times 10^{-7}$
5	$2.04834 \times 10^{-9}$

$$\log \sigma = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + a_5\theta^5 = K$$

$$\sigma = 10^K \text{ [1/}\Omega \cdot \text{cm]}$$

図3 導電率の実測値と近似温度関数



近似多項式の係数

$i$	上面 $a_i$	側面 $a_i$	下面 $a_i$
0	$5.94991 \times 10^{-1}$	$8.18551 \times 10^{-1}$	$3.01287 \times 10^{-1}$
1	$1.79483 \times 10^{-2}$	$1.42859 \times 10^{-2}$	$3.40067 \times 10^{-2}$
2	$-2.87993 \times 10^{-3}$	$-1.99836 \times 10^{-3}$	$4.25464 \times 10^{-3}$
3	$3.14696 \times 10^{-5}$	$2.19343 \times 10^{-5}$	$-2.41729 \times 10^{-5}$
4	$-1.48007 \times 10^{-7}$	$-1.00249 \times 10^{-7}$	$1.23698 \times 10^{-7}$
5	$2.63087 \times 10^{-10}$	$1.72887 \times 10^{-10}$	$-2.19461 \times 10^{-10}$

$$h' = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + a_5\theta^5$$

$$\text{熱伝達率 } h = \frac{1}{4.186} \times 10^{-4} \times h' \text{ [cal/s}\cdot\text{cm}^2 \cdot \text{°C}]}$$

図4 熱伝達率の実測値と近似温度関数

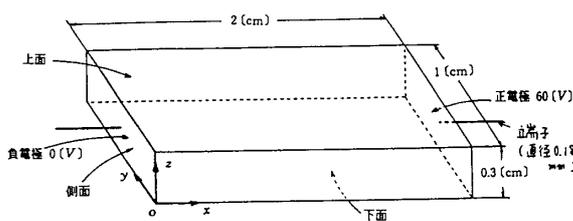


図5 矩形 PTC サーミスタ

れた端子による矩形 PTC サーミスタ熱系への影響は小さく無視する。

図5の矩形 PTC サーミスタの解析領域を1次四面体要素をもちいて要素分割するため、まず一般的に縦、横及び厚さ方向にそれぞれ  $M, L, N$  等分割し、解析領域を  $M \times L \times N$  個の直方体に分割する(ここで、 $M, L, N$ は偶数とし、この直方体を基本直方体要素という)。  $M \times L \times N$  個の基本直方体要素の頂点を四面体要素の節点にとり、図6のように節点番号付けする。ここで、矩形 PTC サーミスタは  $z$  方向に  $N$  等分割されており、この下面から数えて  $K$  番目の断面  $z = 0.3 \times (K-1)/N$  平面における各節点の番号付けが示されている。なお  $K$  は  $1 \sim N+1$  の整数値をとり、その平面は、 $K=1(z=0)$  のとき矩形 PTC サーミスタ下面、 $K=N+1(z=0.3)$  のときその上面となる。また、節点  $(M+1) \times (K-1) + 1$  の  $(x, y, z)$  座標は  $(0, 0, 0.3 \times (K-1)/N)$  である。

解析領域の四面体要素分割においては、この領域の四面体要素分割状態が領域の中心節点を対称点として点対称になるように  $M \times L \times N$  個の基本直方体要素を各々6個の四面体要素に分割し、全領域を  $M \times L \times N \times 6$  個の1次四面体要素に分割する(解析領域の1次四面体要素分割の詳細は付録1参照)。ここで、各四面体要素における節点番号差の最大値は  $(M+1) \times (N+1) + M + 2$  となる。

図5の矩形 PTC サーミスタの解析領域における非定常温度分布を与える方程式は

$$sp \frac{\partial \theta}{\partial t} - \text{div}(\lambda \text{ grad } \theta) - H = 0 \quad (1)$$

となる。ここで、 $\theta$ :温度、 $t$ :時間、 $sp$ :体積比熱  $\lambda$ :熱伝導率、 $H$ :単位体積あたりの内部発生熱流である。(1)式の温度の時間微分を

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = 2 \frac{\theta - \bar{\theta}}{\Delta t} - \bar{\theta} \quad (2)$$

のように Crank・Nicolson 差分近似する。ただし、 $\bar{\theta}$ 、 $\bar{\dot{\theta}}$  はそれぞれ  $\theta$ 、 $\dot{\theta}$  の  $\Delta t$  前の時刻における値であり、

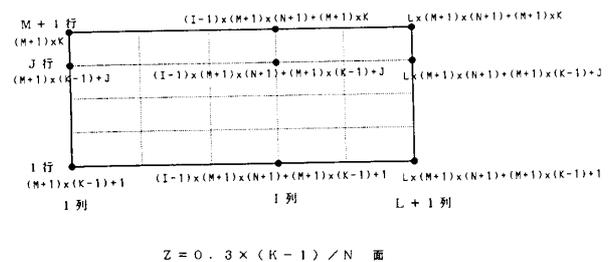


図6 解析領域の節点番号

$\Delta t$  は時間空間刻みである。(2)式を(1)式に代入して、ガラーキン法を適用すれば、

$$\int_{V_i} [N]^T \left[ \widetilde{sp} \left\{ \frac{2}{\Delta t} (\theta - \bar{\theta}) - \bar{\theta} \right\} - \bar{\lambda} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \theta) - \bar{H} \right] dV_i = 0 \quad (3)$$

が得られる。ここで、 $\theta$  は近似解、 $[N]^T$  は  $[N]$  の転置行列である。また

$$\begin{aligned} \theta &= [N] \{ \theta \} \\ [N] &= [N_1, N_2, \dots, N_q], \\ \{ \theta \} &= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix}, [N]^T = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

であり、 $N_i, \theta_i$  : 節点  $i$  ( $i=1 \sim q$ ) に関する形状関数(付録2参照)及び温度、 $V_i$  : 解析領域、 $q$  : 全節点数とする。また、 $\bar{\lambda}, \bar{sp}, \bar{h}, \bar{H}$  は、それぞれ  $\lambda, sp, h, H$  の  $\Delta t$  前の時刻における値であり、温度  $\bar{\theta}$  により計算される。(3)式をガウスの発散定理をもちいて変形すると

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{V_i} [N]^T \left[ \frac{2\widetilde{sp}}{\Delta t} ([N] \{ \theta \} - [N] \{ \bar{\theta} \}) - \widetilde{sp} [N] \{ \bar{\theta} \} \right] dV_i + \int_{V_i} \bar{\lambda} \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) dV_i \{ \theta \} \\ &\quad - \int_S [N]^T \bar{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial n} dS - \int_{V_i} [N]^T \bar{H} dV_i \\ &= \sum_i \int_{V_i} [N]^T \left[ \frac{2\widetilde{sp}_i}{\Delta t} ([N] \{ \theta \} - [N] \{ \bar{\theta} \}) - \widetilde{sp}_i [N] \{ \bar{\theta} \} \right] dV_i + \sum_i \int_{V_i} \bar{\lambda}_i \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) dV_i \{ \theta \} \\ &\quad + \sum_i \int_{S_i} \bar{h}_i [N]^T [N] dS_i \{ \theta \} \\ &\quad - \sum_i \int_{V_i} \bar{h}_i \theta_\infty [N]^T dS_i - \sum_i \int_{V_i} [N]^T \bar{H}_i dV_i \end{aligned} \quad (5)$$

となる。(5)式から次に示すマトリックス方程式

$$[P] \{ \theta \} = \{ B \} \quad (6)$$

を得る。ここで、 $[P]$  はバンド幅  $= (M+1)(N+1) + M+3$  (各四面体要素における節点番号差の最大値  $+1$ ) なる係数バンドマトリックス、 $\{ B \}$  は定数列マトリックスである (なお  $[P], \{ B \}$  の詳細は文献2)参

照)。

また、(5)式において、 $\theta_\infty$  は周囲温度、 $S$  は解析領域の境界面積、 $V_i$  は任意四面体要素の体積、 $S_i$  は任意四面体要素における上記境界面の一部の面積、 $\bar{\lambda}_i, \widetilde{sp}_i$  は任意四面体要素において、 $\Delta t$  前の時刻における4つの節点温度の相加平均温度から求められる要素内平均熱伝導率、体積比熱、 $\bar{h}_i$  は任意四面体要素の境界面  $S_i$  における3つの節点温度の相加平均温度から求められる要素の平均熱伝達率である。また  $\Sigma_i$  は全要素に関する総和を意味し、 $\partial \theta / \partial n$  は解析領域境界面における外向き法線方向の  $\theta$  の微分を示し、この境界面において次式が成立する。

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = \bar{h} (\theta - \theta_\infty) \quad (7)$$

$\bar{H}_i$  は  $\bar{H}$  の任意四面体要素における値であるが、以下にこの計算法を与える。

図5のPTCサーミスタ解析領域における電位分布を与える方程式は

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \phi) = 0 \quad (8)$$

となる。ここで、 $\phi$  : 電位、 $\sigma$  : 導電率である。(8)

式にガラーキン法を適用して、

$$\int_{V_i} \bar{\sigma} [N]^T \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) dV_i = 0 \quad (9)$$

が得られる。ただし、 $\bar{\sigma}$  は温度  $\bar{\theta}$  により計算される導電率、 $\phi$  は近似解で

$$\phi = [N] \{ \phi \}, \{ \phi \} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_q \end{bmatrix} \quad (10)$$

であり、 $\phi_i$  は節点  $i$  ( $i=1 \sim q$ ) における電位である。(9)式に(10)式を代入し、ガウスの発散定理をもちいれれば

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{V_i} \bar{\sigma} \left[ \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \frac{\partial [N]}{\partial z} \right] dV_i \{ \phi \} \\ &= \sum_i \int_{V_i} \bar{\sigma}_i \left[ \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \frac{\partial [N]}{\partial z} \right] dV_i \{ \phi \} \end{aligned} \quad (11)$$

を得る。ここで  $\bar{\sigma}_i$  は  $\bar{\sigma}$  の任意四面体要素における平均値であり、 $\Delta t$  前の時刻における4つの節点温度の相加平均温度をもちいて求められる。(11)式から、電極に関する境界条件 (すなわち、正極及び負極側の節点電位はそれぞれ60 V, 0 V に全て等しい) を考慮し

て次に示すマトリックス方程式を得る。

$$[Q]\{\phi\} = \{C\} \quad (12)$$

ここで、 $[Q]$ は前述の $[P]$ と同じバンド幅の係数バンドマトリックス、 $\{C\}$ は定数列マトリックスである(なお、 $[Q]$ 、 $\{C\}$ の詳細は文献2)参照)。 (12)式から、バンドマトリックス法<sup>3)</sup>により電位分布は計算される。従って、任意四面体要素における電位分布の式を $\phi_i$ とすれば、 $\tilde{H}_i$ は

$$\tilde{H}_i = \tilde{\sigma}_i (\text{grad } \phi_i)^2 \quad (13)$$

と得られる。ここで $\tilde{H}_i$ は要素内で一定となる。

以上から、時間間隔 $\Delta t$ 毎に矩形PTCサーミスタ内の温度分布を計算するには、まず(12)式から電位分布を求め、これをもちいて(13)式から各要素内の単位体積あたりの発生熱流を求める。次いで、(6)式から、バンドマトリックス法により温度分布が計算される(ここで、 $t=0$ における $\tilde{\theta}_i$  ( $i=1\sim q$ )は全て0とする)。

#### 4. 計算結果と実験結果

実験において、2章で述べたように矩形PTCサーミスタを配置して、初期温度 $20^\circ\text{C}$ 一定の矩形PTCサーミスタの端子間に直流電圧 $60\text{V}$ を印加後、矩形PTCサーミスタ外表面主要部の温度上昇を直径 $0.1\text{mm}$ のCA熱電対で測定した(測定点は、上面と下面部はそれぞれ中心部を含めて9点、側面部は10点の計28点で、矩形PTCサーミスタの中心部を対称点として点対称に位置する)。なお、測定開始後 $600\text{[s]}$ で矩形PTCサーミスタは定常温度分布に達した。

上記矩形PTCサーミスタ加熱過程を3章に示す熱解析法により計算するが、まず、この解析法において、要素分割の精粗が矩形PTCサーミスタ各部の温度上昇に及ぼす影響を考察するため、時間空間刻み $\Delta t=0.5\text{[s]}$ として、領域の基本直方体要素分割数 $M \times L \times N$ を $2 \times 2 \times 2$ 、 $4 \times 8 \times 2$ 、 $8 \times 16 \times 4$ としてそれぞれ計算した結果、 $M \times L \times N$ が $4 \times 8 \times 2$ と $8 \times 16 \times 4$ の場合は各部温度上昇計算結果はほとんど一致し、 $2 \times 2 \times 2$ の場合は上記2つの計算結果と幾分差違があることが知られた。参考のため、 $M \times L \times N$ が $2 \times 2 \times 2$ 、 $4 \times 8 \times 2$ 、 $8 \times 16 \times 4$ の各場合におけるPTCサーミスタ上面中央部の温度上昇を図7に示す。また、時間空間刻み $\Delta t$ の大小が矩形PTCサーミスタの各部温度上昇に及ぼす影響を検討するため、領域の基本直方体要素分割数 $M \times L \times N=4 \times 8 \times 2$ とし、 $\Delta t$ を $1$ 、 $0.5$ 、 $0.1\text{[s]}$ としてそれぞれ計算した結果、 $\Delta t$ が $0.1$ と $0.5\text{[s]}$ の場合は各部温度上昇計算結果はほ

とんど一致し、 $1\text{[s]}$ の場合は、計算開始後大体 $10\text{[s]}$ ぐらいまでは上記2つの計算結果と幾分差違が見られるが、それ以後はそれらとほとんど一致する。なお、参考のため、 $\Delta t$ が $1$ 、 $0.5$ 、 $0.1\text{[s]}$ の各場合におけるPTCサーミスタ上面中央部の温度上昇を図8に示す。

従って、図5の矩形PTCサーミスタの熱解析を3章の熱解析法によって行なう場合、領域の基本直方体要素分割数 $M \times L \times N$ は $4 \times 8 \times 2$ 、時間空間刻み $\Delta t$ は $0.5\text{[s]}$ とすれば十分であることが知られる。

図9に図5に示す矩形PTCサーミスタの上面中央部における温度上昇の実験値と計算値を示し、図10にこの上面6点における定常温度の実験値と計算値(計算開始後約 $550\text{[s]}$ で定常状態に達した)を示す。図9から上面中央部の温度上昇の計算誤差は $5\%$ 以内におさまっていることが知られている(この精度で実用上十分である)。また、ここでは示さなかったが他の矩形PTCサーミスタ外表面測定部の温度上昇も計算誤差は上記精度内にあった。図10から上面における定常温度の計算誤差は非常に小さいことが分かる。また他の矩形PTCサーミスタ外表面における定常温度測定点においても、計算誤差は同様に非常に小さかつ

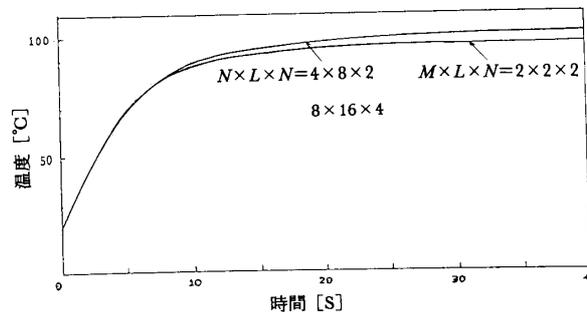


図7 解析領域の基本直方体要素分割数をパラメータにした矩形PTCサーミスタ上面中央部の温度上昇

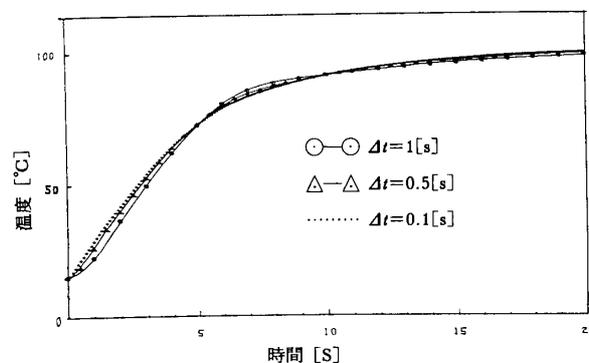


図8 時間空間刻みをパラメータにした矩形PTCサーミスタ上面中央部の温度上昇

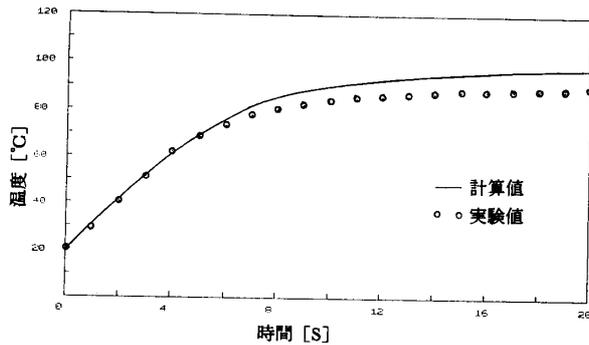


図9 矩形 PTC サーミスタ上面中央部温度上昇の計算値と実験値

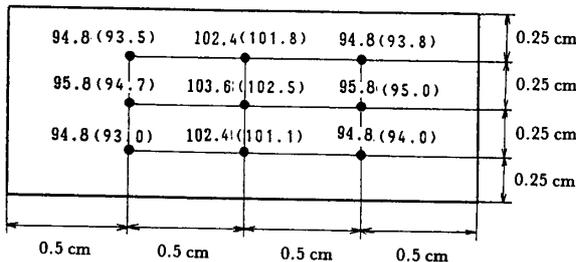


図10 矩形 PTC サーミスタ上面の定常温度分布の計算値と実験値 (括弧内の値) ここで単位は [°C]

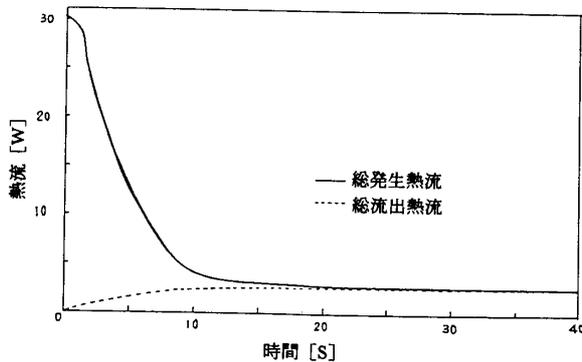


図11 矩形 PTC サーミスタの総発生熱流と総流出熱流

た。

なお参考のため、矩形 PTC サーミスタ内総発生熱流及びこの外表面から放射、対流伝熱により流出する総流出熱流の時間的変化の計算結果を図11に示す。この総発生熱流で矩形 PTC サーミスタ端子間供給電圧の2乗を割れば、このサーミスタの実効抵抗の時間変化が求まる。

## 5. あとがき

本文では、将来我国で量産化され得るものと思われる矩形 PTC サーミスタを試作して、熱物性値、外表

面熱伝達率値を実測し、これらを用いた有限要素法による矩形 PTC サーミスタの計算精度のよい熱解析法を与えた。

前掲図5に示す矩形 PTC サーミスタの実験において、熱伝導領域及び境界条件の対称性から、矩形 PTC サーミスタ端子間に電圧印加後、その内部発生熱流密度分布は  $x=1$  面及び  $y=0.5$  面に関しそれぞれ対称となり、またそれら2面に関し温度分布も対称となる。上記熱解析法によりこの矩形 PTC サーミスタの時々刻々の温度分布変化を計算するとき、各四面体要素内の熱物性値はその4つの節点温度の相加平均を用いるため、上記2つの対称面に関し四面体要素分割状況が対称になるようにしなければならない。さもなければ、対称面に関し互いに対称な位置にある任意の2点の熱物性値が、2つの任意点をそれぞれ含む2つの四面体要素の4節点平均温度が完全に等しくなくなるので、異なり、そのため計算温度分布は時間の経過とともに実際の温度分布と大きく異なってくる(付録3参照)。

従って、前記条件のもとでは矩形 PTC サーミスタ内計算温度分布が2つの対称面に関しそれぞれ対称となり、しかも解析領域を1次四面体要素に容易に分割できるように、8個の基本直方体要素からなる点対称基本分割要素を提案し(付録1参照)、これにより解析領域を分割した。

終わりに、本研究における計算を手伝って下さった名古屋工業大学電気情報工学科卒研生諸君に誠意を表します。

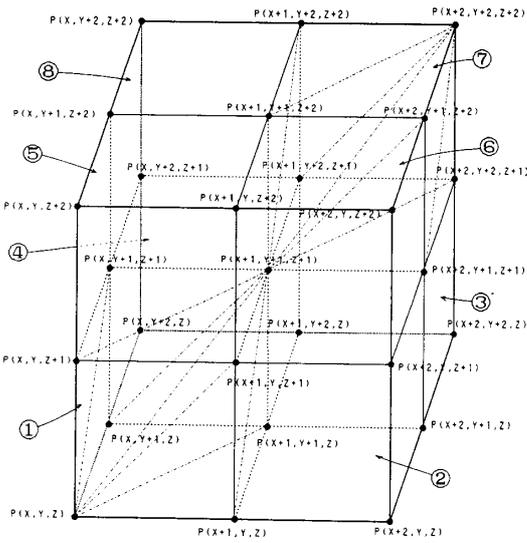
## 参考文献

- 1) 南里：直接式抵抗炉における電極負荷コンダクタンスの算定法，電気学会論文誌，C，110，245 (1990. 4)
- 2) 南里：最新伝熱の各種数値計算法とその応用【応用編】，p. 1，技術情報協会 (1989)
- 3) 中田，他：電気工学の有限要素法，p. 135，森北出版 (1982)

## 付録

### 付録1

付図1は8個の基本直方体要素からなる基本分割要素を示す。図中 $P(*, *, *)$ は各節点の節点番号を示し、基本分割要素をその中心点である節点 $P(X+1, Y+1, Z+1)$ に関し、四面体要素分割状況が点対称になるように、各基本直方体要素を6個の四面体要素に分割して総数48個の四面体要素に分割する。この基本分割要素を特に点対称基本分割要素という。ここでは、図が煩雑になるので、①、⑦の2つの基本直方体要素の四面体要素分割状況のみを示している。①～⑧の各基本直方体要素にはそれぞれ6個の四面体要素が含まれるが、参考のため各四面体要素に属する節点番号を付表1に与



付図1 点対称基本分割要素

付表1 点対称基本分割要素の各四面体要素に含まれる節点番号

① 基本直方体要素	
要素1	P(X,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z)
要素2	P(X,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y,Z),P(X+1,Y,Z+1)
要素3	P(X,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y,Z+1),P(X+1,Y,Z+1)
要素4	P(X,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z),P(X+1,Y+1,Z)
要素5	P(X,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z),P(X,Y+1,Z+1)
要素6	P(X,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y,Z+1),P(X,Y+1,Z+1)
② 基本直方体要素	
要素1	P(X+2,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z)
要素2	P(X+2,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y,Z),P(X+1,Y,Z+1)
要素3	P(X+2,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y,Z+1),P(X+2,Y,Z+1)
要素4	P(X+2,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+1,Z),P(X+2,Y+1,Z)
要素5	P(X+2,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+2,Y+1,Z),P(X+2,Y+1,Z+1)
要素6	P(X+2,Y,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+2,Y,Z+1),P(X+2,Y+1,Z+1)
③ 基本直方体要素	
要素1	P(X+2,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+1,Z),P(X+2,Y+1,Z)
要素2	P(X+2,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+2,Y+1,Z),P(X+2,Y+1,Z+1)
要素3	P(X+2,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+2,Y+1,Z),P(X+2,Y+2,Z+1)
要素4	P(X+2,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+1,Z),P(X+1,Y+2,Z)
要素5	P(X+2,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+2,Z),P(X+1,Y+2,Z+1)
要素6	P(X+2,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+2,Z),P(X+2,Y+2,Z+1)
④ 基本直方体要素	
要素1	P(X,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+1,Z),P(X+1,Y+2,Z)
要素2	P(X,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+2,Z),P(X+1,Y+2,Z+1)
要素3	P(X,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+2,Z+1),P(X+1,Y+2,Z+1)
要素4	P(X,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z),P(X+1,Y+1,Z)
要素5	P(X,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z),P(X,Y+1,Z+1)
要素6	P(X,Y+2,Z),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z+1),P(X,Y+2,Z+1)
⑤ 基本直方体要素	
要素1	P(X,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y,Z+1),P(X+1,Y,Z+1)
要素2	P(X,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y,Z+1),P(X+1,Y,Z+2)
要素3	P(X,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+2)
要素4	P(X,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z),P(X+1,Y+1,Z)
要素5	P(X,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z),P(X,Y+1,Z+2)
要素6	P(X,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+2)
⑥ 基本直方体要素	
要素1	P(X+2,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y,Z+1),P(X+2,Y,Z+1)
要素2	P(X+2,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y,Z+1),P(X+1,Y,Z+2)
要素3	P(X+2,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+2)
要素4	P(X+2,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+2,Y+1,Z),P(X+2,Y+1,Z+1)
要素5	P(X+2,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+2,Y+1,Z),P(X+2,Y+1,Z+2)
要素6	P(X+2,Y,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+1,Z+2),P(X+2,Y+1,Z+2)
⑦ 基本直方体要素	
要素1	P(X+2,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+2,Y+1,Z+1),P(X+2,Y+2,Z+1)
要素2	P(X+2,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+2,Y+1,Z+1),P(X+2,Y+2,Z+2)
要素3	P(X+2,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+1,Z+2),P(X+1,Y+2,Z+2)
要素4	P(X+2,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z+1),P(X,Y+2,Z+1)
要素5	P(X+2,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z+2)
要素6	P(X+2,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+1,Z+2),P(X+1,Y+2,Z+2)
⑧ 基本直方体要素	
要素1	P(X,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+2,Z+1),P(X+1,Y+2,Z+1)
要素2	P(X,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+2,Z+1),P(X+1,Y+2,Z+2)
要素3	P(X,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X+1,Y+1,Z+2),P(X+1,Y+2,Z+2)
要素4	P(X,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z+1),P(X,Y+2,Z+1)
要素5	P(X,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z+2)
要素6	P(X,Y+2,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+1),P(X,Y+1,Z+2),P(X+1,Y+1,Z+2)

える。

解析領域の四面体要素分割は、上記基本分割要素をもちいて行なうが、これをもちいて解析領域を要素分割すれば、常に解析領域の中心節点に関し、分割状態が点対称になる。な

お、基本分割要素1個が解析領域の四面体要素分割最小単位であり、一般的にはこれが複数個必要である。

付録2

付図2に任意1次四面体要素を示す。ここで、この要素に含まれる節点番号を簡単に1,2,3,4とし、それらの座標を $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$ ,  $(x_4, y_4, z_4)$ としている。この要素における形状関数は

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (付1)$$

であり

$$N_i = \frac{1}{6\Delta_i} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad (i=1 \sim 4) \quad (付2)$$

である。ただし

$$a_i = \{x_j(y_k z_l - y_l z_k) + x_k(y_l z_j - y_j z_l) + x_l(y_j z_k - y_k z_j)\} \cdot \epsilon_i$$

$$b_i = \{y_j(z_l - z_k) + y_k(z_j - z_l) + y_l(z_k - z_j)\} \cdot \epsilon_i$$

$$c_i = \{z_j(x_l - x_k) + z_k(x_j - x_l) + z_l(x_k - x_j)\} \cdot \epsilon_i$$

$$d_i = \{x_j(y_l - y_k) + x_k(y_j - y_l) + x_l(y_k - y_j)\} \cdot \epsilon_i$$

$$i=1 \text{ ならば } j, k, l \rightarrow 2, 3, 4$$

$$i=2 \text{ ならば } j, k, l \rightarrow 3, 4, 1$$

$$i=3 \text{ ならば } j, k, l \rightarrow 4, 1, 2$$

$$i=4 \text{ ならば } j, k, l \rightarrow 1, 2, 3$$

$$\epsilon_i = \begin{cases} +1 & (i=1, 3) \\ -1 & (i=2, 4) \end{cases} \quad (付3)$$

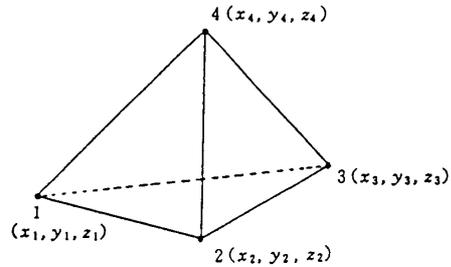
であり

$$\Delta_i = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (付4)$$

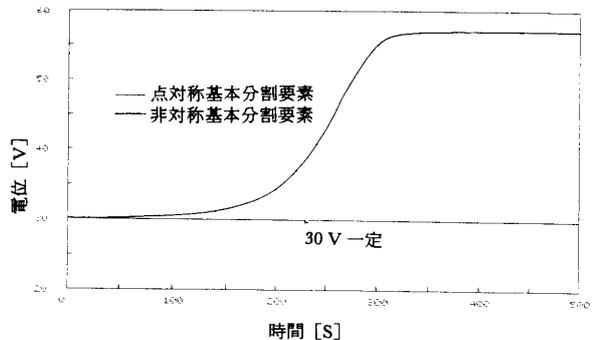
である。 $|\Delta_i| (=V_i)$ は四面体の体積となる。

付録3

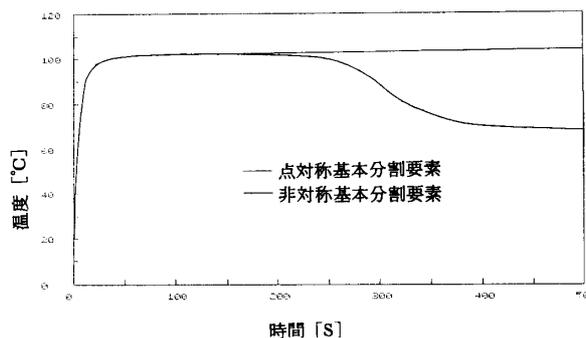
本文図5における矩形PTCサーミスタの熱解析において、点対称基本分割要素をもちいた場合と $x=1$ 及び $y=0.5$ の各



付図2 1次四面体要素



付図3 点対称及び非対称基本分割要素による矩形PTCサーミスタ上面中央部の電位の計算値



付図4 点対称及び非対称基本分割要素による矩形 PTC サーマスタ上面中央部の温度上昇計算値

面に関して四面体要素分割状況が適当に非対称になるように分割した場合（ここで、基本分割要素をその中心点に関し四面体要素分割状況が非対称となる“非対称基本分割要素”をもちいている）の両計算結果を比較するため、2つの場合の上面中央部における電位の時間変化及び温度上昇を付図3、付図4にそれぞれ示す。なお、これらの図において、もし実験結果を図示すれば、実験結果は点対称基本分割要素をもちいて計算した結果とほとんど一致する。また、上記計算において、 $\Delta t=0.5$  [s],  $M \times L \times N=4 \times 8 \times 2$ とした。

付図3、付図4に示す非対称基本分割要素による上面中央部の電位の時間変化及び温度上昇の計算値は、領域の非対称四面体要素分割による計算の一例ではあるが、いずれも時間の経過とともに点対称基本分割要素による計算値との差が大きくなるのが分かる。この差の最も大きな要因としては、温度依存性熱物性値のうち導電率値が温度変化により指数関数的に大きく変化することがあげられる。