《論　文》

論 10-3

新領域積分法に基づくポアソン問題の境界要素法解析[†]

桑原敏彦*・武田　毅*

ABSTRACT The application of the boundary element method for solving boundary value problems with non-homogeneous term such as Poisson's equation leads to an integral equation which contains domain integrals. Although these integrals do not introduce any new unknowns, they affect the efficiency of the method since the additional integration over the whole domain is required. In the analysis of non-linear or time-dependent problems using the boundary element method, the domain integral occupies the major part of the total computing time of the analysis. In this paper a new approach for the domain integrals is presented. The procedures are follows: First of all, the non-homogeneous term is supposed to be interpolated by the boundary values using polynomial expression for the region. The domain integrals are carried out in each triangular cell which is made of the source point and a line segment of the boundary. No subdivision is necessary for the region in this method prior to the calculation. Secondly, an analytical recursive formula is proposed in order to calculate the domain integral for a higher order polynomial interpolation function with high accuracy and at high speed. The efficiency of the formula is finally confirmed for some sample problems whose the exact solutions are known.

1. まえがき

偏微分方程式の数値解法の1つである境界要素法(BEM)の理論と応用に関する研究が近年活発に行われ，特に線形問題の分野では有限要素法（FEM）などの領域型解法を陵駕しつつある[1),2)].

BEMは支配微分方程式を積分方程式に変換した後にFEMと同様の離散化を行い，代数方程式に帰着化する解法と言える．BEMは解析対象領域の境界のみに未知変数を考えれば良く，問題の次元が1次元下るのが最大の特徴である．しかしながら，BEMでは特異性を有する基本解を重み関数とする積分を取扱うため，この積分計算を如何に高速・高精度に実行するかがBEM解析のキーポイントである．ラプラス微分演算子に対する直線要素上の境界積分計算は解析的に実行できて，解法の効率化に有効であることが既に明らかにされている[3),4),5)].

Boundary Element Method for Poisson Problem based on a New Domain Integration Scheme. By *Toshihiko Kuwahara* and *Tsuyoshi Takeda* (Faculty of Engineering, Hokkaido University).

*北海道大学工学部

†1990年8月23日受付，1990年10月18日再受付

ポアソン方程式のように非同次項を有する問題をBEMにより解析する場合，BEMにおいても領域積分項が残り，これを高速・高精度に実行しなければ領域型解法に対する利点が失われる[6)]．また，非線形問題や時間依存問題をBEMにより解析する場合は，領域積分を繰返し実行する必要が生じるため，領域積分計算の高速化が不可欠となる[7)].

非同次項が領域内で一定ならば領域積分は境界積分計算に変換できる[8)]．また非同次項を級数展開して領域積分項を等価な境界積分に変換する手法[9)]もあるが，一般には領域積分のために領域を内部セルに分割した上で数値積分を用いて計算している[10)]．内部セルはFEMで用いられる有限要素と似ているが，セルの節点に未知数を考える必要がない点で境界のみに未知数を配置すればよいというBEMの特徴を失うものではない．しかしながら，領域積分の計算時間と計算精度は解法全体の効率に大きく関わってくる．

本論文では，境界のみを取扱えば良いというBEMの特徴を失うことなく領域積分を効率的に実行するためにソース点セルという概念を導入する[11)]．すなわち，領域内の非同次項の空間分布を境界上の補間点の関数値を用いて高次補間し，領域内を内部セルに分割

することなしに領域積分計算はソース点と稜線により構成される三角形セル上で実行する．

本論文では，この領域積分計算を高速・高精度に実行する解析的な漸化公式を提案している．また，厳密解が与えられる問題に本手法を適用してその妥当性を検証し，かつ数値積分を用いた場合に対する有効性を確認している．

2. ポアソン問題に対する境界要素法の基本式

本論文が対象とする支配方程式はポテンシャル u に関する次式のポアソン方程式である．

$$\nabla^2 u=\phi \quad \text{in} \quad \Omega \tag{1}$$

ここで，右辺の ϕ は既知関数の非同次項である．

BEM は上式をグリーンの定理と随伴微分方程式の基本解 u^* を用いて次式の境界上のソース点 i に関する積分方程式に変換した上で，FEM と同様に離散化して解くのがその基本である．

$$c_i u_i+\int_\Gamma uq^*\,d\Gamma=\int_\Gamma qu^*\,d\Gamma-\int_\Omega \phi u^*\,d\Omega \tag{2}$$

ただし，q は u の外向き法線微分で定義されフラックスと呼ばれ，同様に q^* は u^* の外向き法線微分を意味する．また，c_i はソース点 i において領域を見る角度を θ_i として2次元の場合次式で表される．

$$c_i=\theta_i/(2\pi) \tag{3}$$

(2)式において，Γ は解析領域 Ω の境界を意味し，境界 Γ を Ne 個の直線要素 Γ に分割した上で境界積分は解析的に計算することができる[3),4),5)]．本論文では，要素形状は直線近似し要素上の u, q を高次多項式近似を行うサブパラメトリック高次要素を用いて解析的に境界積分を処理している[4)]．また，右辺第2項の積分は非同次項 ϕ に関する領域積分であり，この計算を本論文で考察対象としており次章以下で具体的に取り上げている．

3. 領域積分

考察すべき領域積分はポアソン方程式の非同次項を ϕ としてソース点 i に対する次式の積分である．

$$B_i=\int_\Omega \phi u^*\,d\Omega \tag{4}$$

ただし，u^* はラプラス方程式の基本解で2次元の場合，ソース点 i と積分点間の距離を r として次式で表される．

$$u^*=(1/2\pi)\cdot\log(1/r) \tag{5}$$

本論文では，あらかじめ領域を内部セルに分割しないで(4)式の積分を**図1**のように領域をソース点 i と境界を構成する稜線により構成される Nc 個の三角形セルごとに実行する．また，非同次項 ϕ の空間分布を座標に関する n 次完全多項式で近似し，原座標系 (X, Y) のもとで，$m[=(n+1)(n+2)/2]$ 個の境界上のみの補間点における $\phi_k(k=1\sim m)$ により次式で補間する（**図2**）．

$$\phi=[1, X, Y, \cdots, X^pY^q, \cdots X^n, Y^n][\boldsymbol{D}]\cdot[\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m]^T \tag{6}$$

ただし，$[D]$ は補間点の座標で表される次式の係数行

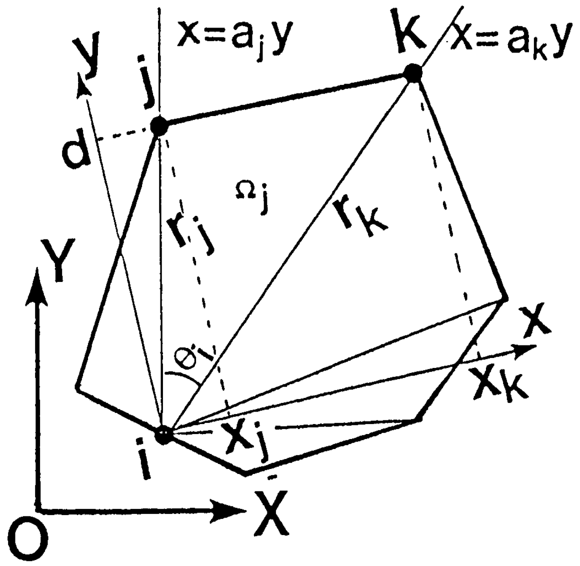


図1 ソース点セル Ωj および局所座標系 [x, y]

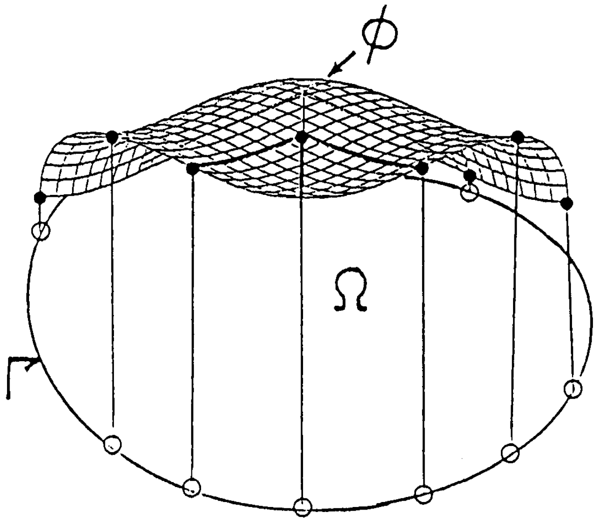


図2 境界値による非同次項の補間

列である．

$$[\boldsymbol{D}]=\begin{bmatrix}1, X_1, Y_1, X_1Y_1, \cdots X_1^pY_1^q\cdots, X_1^n, Y_1^n \\ 1, X_2, Y_2, X_2Y_2, \cdots X_2^pY_2^q\cdots, X_2^n, Y_2^n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 1, X_m, Y_m, X_mY_m, \cdots X_m^pY_m^q\cdots, X_m^n, Y_m^n\end{bmatrix}^{-1} \tag{7}$$

本論文は，以上のように境界値のみを用いて非同次項を補間し領域積分を実行する点で従来の手法とは異なる内容となっている．

したがって，(4)式は次式となり考察する領域積分は一般に(9)式を評価すれば良いことになる．

$$B_i=\sum_{j=1}^{Nc}[I_{0,0}, I_{1,0}, \cdots, I_{p,q}, \cdots, I_{0,n}]\cdot [\boldsymbol{D}]\cdot[\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m]^T \tag{8}$$

ただし，

$$I_{p,q}=\int_{\Omega j} X^pY^qu^*\,d\Omega \tag{9}$$

つぎに，上式の積分を簡単化するために，ソース点を原点としかつ注目する稜線に x 軸が平行となるような局所座標系〔x, y〕(図1) を導入する．これらの座標系は注目する稜線の方向余弦を［l_j, m_j］，ソース点の原座標値を (X_s, Y_s) として，次式で関係づけられている．

$$[X, Y, 1]=\begin{bmatrix}1_j, & -m_j, & X_s \\ m_j, & 1_j, & Y_s \\ 0, & 0, & 1\end{bmatrix}[x, y, 1]^T \tag{10}$$

また，局所座標系のもとでは u^*に含まれるソース点 i と積分点間の距離 r は次式のように簡単化される．

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{11}$$

したがって，(5)式に(11)式を代入した u^*と(10)式で表される X, Yを(9)式に代入し局所座標系のもとで積分を実行すると，積分の上・下限が x に関しては原点を通る直線で表わされ，積分実行後の y に関する積分が格段に簡単化される（図1参照)．

すなわち，(9)式は以下の計算に帰着される．

$$I_{p,q}=\sum_{u=0}^{p+q}\cdot\sum_{v=0}^{p+q-u}\alpha_{u,v}\cdot G_{u,v} \tag{12}$$

$$G_{u,v}\triangleq\frac{-1}{4\pi}\int_0^d\int_{a_jy}^{a_ky}x^u\cdot y^v\log(x^2+y^2)\,dx\,dy \tag{13}$$

ただし，係数 $\alpha_{u,v}$ は(10)式より $X^pY^q=(1_jx-m_jy+X_s)^p\cdot(m_jx+1_jy+Y_s)^q\triangleq\Phi(x, y)$ として次式で表わされる．

$$\alpha_{u,v}=\frac{1}{u!\cdot v!}\frac{\partial^{(u+v)}\Phi(x, y)}{\partial x^{(u)}\partial y^{(v)}} \tag{14}$$

ただし，$\alpha_{0,0}=\Phi(0,0)$．

(13)式の積分を計算するには以下の x および y に関する不定積分が評価できれば良いことになる．

$$e_p(x, y)\triangleq\int x^p\log(x^2+y^2)\,dx \tag{15}$$

$$E_{p,q}(\mathrm{a}, y)\triangleq\int y^q\cdot e_p(ay, y)\,dy \tag{16}$$

(16)式を評価して，一般に $G_{p,q}$ は次式の代入計算により計算される．

$$G_{p,q}=\frac{-1}{4\pi}[\{E_{p,q}(a_k, d)-E_{p,q}(a_k, 0)\} -\{E_{p,q}(a_j, d)-E_{p,q}(a_j, 0)\}] \tag{17}$$

4. 領域積分漸化公式

(15)，(16)式の積分は主として部分積分のスキームより[12]解析的に積分できて（付録参照)，これを (17) 式に代入して整理すると，$G_{p,q}$ は次式のように，**図3**に示す幾何学的パラメータを用いて漸化的に高次の項が計算できる解析式が得られる．

$$G_{0,q}=\frac{d^{q+1}}{(q+2)}\left\{\frac{(q+3)}{(q+2)}\cdot t^{(1)} +(x_ku_k^*-x_ju_j^*)+d\cdot p_i\right\} \tag{18}$$

$$G_{1,q}=\frac{d^{q+1}}{2(q+3)}\left\{\frac{(q+5)}{2(q+3)}\cdot t^{(2)}+(x_k^2u_k^*-x_j^2u_j^*) +d^2(u_k^*-u_j^*)\right\} \tag{19}$$

$$G_{p,q}=\frac{d^{q+1}}{(p+1)(p+q+2)}\left\{\frac{t^{(p+1)}}{(p+1)}+\frac{t^{(p+1)}+d^2t^{(p-1)}}{(p+q+2)} +(x_k^{p+1}u_k^*-x_j^{p+1}u_j^*)+d^2(x_k^{p-1}u_k^*-x_j^{p-1}u_j^*)\right\} -\frac{(p-1)}{(p+1)}\cdot G_{p-2,q+2}(p\geqq 2) \tag{20}$$

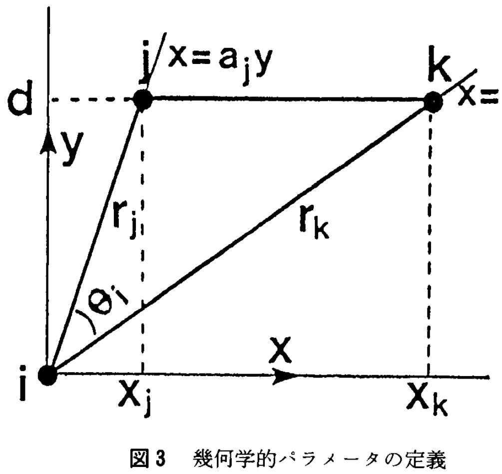


図3 幾何学的パラメータの定義

ただし，p_iはソース点からエッジを見る角度をθi（図3）として次式の関数を意味する．

$$p_i = -\theta_i/(2\pi) \tag{21}$$

また，$t^{(n)}$は次式の関数を意味する．

$$t^{(n)} = (x_k^n - x_j^n)/(2\pi) \tag{22}$$

ただし，x_k, x_jは端点のx座標（図3）を意味する．さらに，u_k*，u_j*は端点j, kにおける基本解u*の値を意味し次式で表される．

$$u_k^* = \frac{-1}{2\pi}\log(r_k), \tag{23}$$

$$u_j^* = \frac{-1}{2\pi}\log(r_j) \tag{24}$$

5. 数値例と検討

ここでの計算は提案する手法の妥当性の検証と数値積分を用いた場合に対する有効性の確認がその目的であるため厳密解の知れる簡単なモデルを対象とする．

図4に示すモデルに対して次の問題を考える．

（問題1）

$$\nabla^2 u = (X-3) + (Y-3)$$

厳密解

$$u = \frac{1}{6}\{(X-3)^3 + (Y-3)^3\}$$

（問題2）

$$\nabla^2 u = (X-3)^2 + (Y-3)^2$$

厳密解

$$u = \frac{1}{12}\{(X-3)^4 + (Y-3)^4\}$$

（問題3）

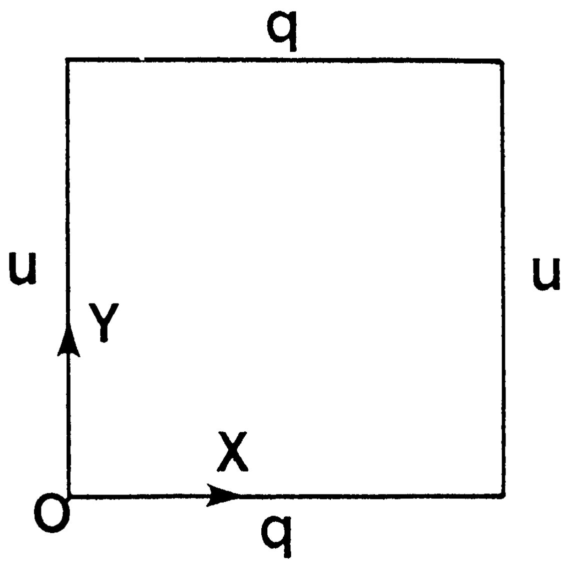
$$\nabla^2 u = (X-3)^3 + (Y-3)^3$$

厳密解

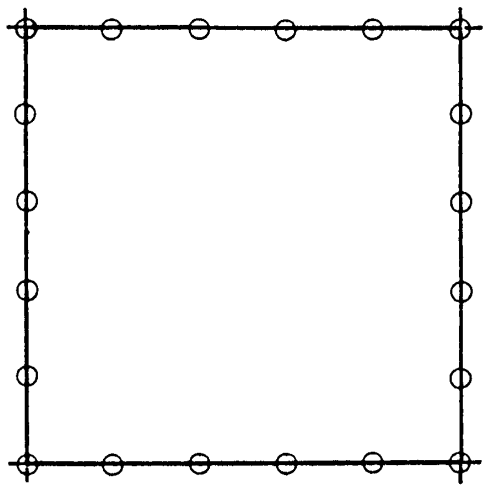
$$u = \frac{1}{20}\{(X-3)^5 + (Y-3)^5\}$$

領域積分計算は本手法の1次～3次ソース点セルと比較のためGauss 10✱10数値積分を用いた．なお，境界積分は全て積分誤差の生じない解析的な公式[4]を用いて，5次要素（要素数：4，節点数：20）により計算した．したがって，以下の計算誤差は本手法で非同次項の次数以上のソース点セルを用いた場合は関数近似誤差も存在しないので，桁落ちなどの数値上の誤差のみが影響しているが，数値積分を用いた場合は数値積分誤差に起因する計算誤差と見なすことができる．

また，使用した計算機はパーソナルコンピュータ



(a) 境界条件



(b) 要素分割（5次要素）4要素，20節点

図4 解析モデル

・FM-11(AD2+）で言語は実数の有効桁数が9桁のBASIC-09を用いた．

表1は境界値のポテンシャル平均誤差$\varepsilon[u]$，フラックス平均誤差$\varepsilon[q]$および計算時間T(sec)を示している．

表の結果より，提案した手法の計算精度と計算時間に関して次のことが言える．

(1) 非同次項の次数以上のソース点セルを用いれば，数値上の桁落ち誤差の影響を除いてほぼ厳密解が得られている．

(2) 領域積分誤差のため10^{-4}オーダの計算誤差をもつGauss 10✱10分点法に比較して約1/3に計算時間が短縮されている．

表 1 ソース点セルの次数に対する境界値の平均誤差 ε および計算時間 T(sec)

問題	手法	提案手法(ソース点セル) 1次	2次	3次	Gauss 10*10
【1】	ε [u]	5.444E-7	5.451E-7	5.230E-7	7.981E-5
	ε [q]	9.855E-7	9.718E-7	1.067E-6	2.061E-4
	T (s)	75	87	112	295
【2】	ε [u]	6.328E+0	3.998E-7	3.087E-7	3.620E-4
	ε [q]	3.911E+0	7.045E-7	6.231E-7	4.318E-4
	T (s)	75	87	112	306
【3】	ε [u]	1.223E+0	6.645E+0	8.847E-7	3.750E-4
	ε [q]	6.234E-1	3.129E+0	1.079E-6	6.174E-4
	T (s)	75	87	112	318

また，非同次項の次数以下のソース点セルを用いた計算誤差（問題2を1次のセルで解析した場合および問題3を1次と2次のセルで解析した場合）は非同次項の近似が不十分であるために領域積分の計算誤差が大きく影響している．これは領域積分の計算精度が解法全体の計算精度に大きく関わっていることの検証でもある．

6. むすび

ポアソン問題を境界要素法で解析する際に，領域内の非同次項を境界上の補間点の関数値を用いて高次補間し，領域積分計算をソース点とエッジにより構成される三角形セル上で解析的に実行する漸化公式を提案した．また，試験用の例題で提案した手法の妥当性と有効性を確認した．

本手法は非線形問題や時間依存問題を境界要素法で解析する際の領域積分計算の効率化に有効であると思われるが，これらの問題への応用は別に報告したいと考えている．

また，本手法は3次元問題にも拡張可能である．

参考文献

1) 境界要素法研究会編：境界要素法の理論と応用，コロナ社 (1986)

2) 境界要素法研究会編：境界要素法の応用，コロナ社 (1987)

3) 武田：境界要素法における二重節点の性質について，電気学会論文誌 A，104–A，291/298 (1984)

4) 桑原，武田：境界要素法における高次要素の境界積分公式と解誤差の検討，電気学会論文誌 A，105A–1，1/8 (1985)

5) J. DECONINCK: Analytic integration involved by two-dimensional boundary element method using straight elements, Engineering Analysis,3-3, 173/176 (1986)

6) 島田，高橋，桑原，武田：境界要素法による三次元ポアソン問題の解析，日本シミュレーション学会第8回電気・電子工学への有限要素法の応用シンポジウム，13, 93/98 (1987)

7) C.A. ブレビア，S. ウォーカー：境界要素法の基礎と応用，149，153，倍風館 (1981)

8) 榎園：境界要素法解析，183，倍風館 (1986)

9) W. Tang and C. A. Brebbia: Critical comparison between two transformation method for taking BEM domain integral to the boundary, Engineering Analysis with Boundary Element, **6**–1, 185/191, (1989)

10) たとえば文献1)，13，および文献7):39など

11) 桑原，武田，宮田：ポアソン問題の境界要素法解析―ソース点セルを用いた高次領域積分による効率化―，日本シミュレーション学会，第9回シミュレーション・テクノロジー・コンファレンス，**4**–1, 79/82 (1990)

12) 森口，宇田川，一松：数学公式I，p. 77，岩波全書，(1956)

付　録

付録1.　x に関する不定積分(15)式の計算

部分積分により，(15)式は次式で表される．

$$e_p(x,y)=\frac{1}{(p+1)}\left\{x^{p+1}\log(x^2+y^2)-2\int x^{p+2}(x^2+y^2)^{-1}dx\right\}$$
$$=\frac{1}{(p+1)}\left\{x^{p+1}\log(x^2+y^2)-2\int x^p dx+2y^2\int x^p(x^2+y^2)^{-1}dx\right\}$$
$$=\frac{1}{(p+1)}\left\{x^{p+1}\log(x^2+y^2)-\frac{2x^{p+1}}{(p+1)}+2y^2\cdot f^{(p)}\right\} \quad \text{(ap.1)}$$

ただし，

$$f^{(p)}\triangleq\int x^p(x^2+y^2)^{-1}dx \quad \text{(ap.2)}$$

ここで，$f^{(p)}$は次式の漸化式があり[12]，$f^{(0)}, f^{(1)}$により漸化的に計算できる．

$$f^{(p)}=\frac{1}{(p-1)}x^{p-1}-y^2\cdot f^{(p-2)} \quad \text{(ap.3)}$$

$$f^{(0)}\triangleq\int(x^2+y^2)^{-1}dx=\frac{1}{y}\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{(ap.4)}$$

$$f^{(1)}\triangleq\int x(x^2+y^2)^{-1}dx=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \quad \text{(ap.5)}$$

ところで，(ap.1)式より次式が成立する．

$$e_{p-2}(x,y)=\frac{1}{(p-1)}\left\{x^{p-1}\log(x^2+y^2)-\frac{2}{(p-1)}x^{p-1}+2y^2\cdot f^{(p-2)}\right\} \quad \text{(ap.6)}$$

したがって，上式と（ap. 3）式を（ap. 1）式に代入して整理すると，次式の $e_p(x, y)$ の p に関する漸化式を得る

$$e_p(x,y)=\frac{1}{(p+1)}\left\{(x^{p+1}+x^{p-1}y^2)\log(x^2+y^2)-\frac{2}{(p+1)}x^{p+1}-(p-1)y^2e_{p-2}(x,y)\right\} \quad \text{(ap.7)}$$

付録2.　y に関する不定積分(16)式の計算

(ap. 7)式を(16)式に代入すると次式が得られる．

$$E_{p,q}(a,y)=\frac{1}{(p+1)}\left\{2(a^{p+1}+a^{p-1})\int y^{p+q+1}\log(\sqrt{a^2+1}y)\,dy-\frac{2a^{p+1}}{(p+1)(p+q+2)}y^{p+q+2}-(p-1)\cdot E_{p-2,q+2}(a,y)\right\} \quad \text{(ap.8)}$$

第1項の積分は，部分積分より次式で表される．

$$I\triangleq\int y^{p+q+1}\log(\sqrt{a^2+1}y)\,dy$$
$$=\frac{1}{(p+q+2)}\left\{y^{p+q+2}\log(\sqrt{a^2+1}y)-\frac{y^{p+q+2}}{(p+q+2)}\right\}$$

したがって，上式を（ap. 8)式に代入して次式のように $E_{p,q}(a, y)$ の p に関する漸化式が得られる．

$$E_{p,q}(a,y)=\frac{1}{(p+1)(p+q+2)}\times\left\{2(a^{p+1}+a^{p-1})\cdot y^{p+q+2}\cdot\log(\sqrt{a^2+1}y)-\frac{2(a^{p+1}+a^{p-1})}{(p+q+2)}y^{p+q+2}-\frac{2a^{p+1}}{(p+1)}y^{p+q+2}\right\}-\frac{(p-1)}{(p+1)}E_{p-2,q+2}(a,y) \quad \text{(ap.9)}$$

つぎに，(ap. 1)式より(ap. 4)および(ap. 5)式を用いて，$e_0(x, y)$, $e_1(x, y)$ は次式で表される．

$$e_0(x,y)=x\cdot\log(x^2+y^2)-2x+2y\cdot\tan^{-1}(x/y) \quad \text{(ap.10)}$$

$$e_1(x,y)=\frac{1}{2}\{(x^2+y^2)\cdot\log(x^2+y^2)-x^2\} \quad \text{(ap.11)}$$

したがって，(ap. 10)式より，$E_{0,q}(a, y)$ は次式で表される．

$$E_{0,q}(a,y)\triangleq\int y^q e_0(ay,y)\,dy$$
$$=2a\int y^{q+1}\log(\sqrt{a^2+1}y)\,dy-2a\int y^{q+1}dy+2\tan^{-1}(a)\int y^{q+1}dy \quad \text{(ap.12)}$$

(ap. 12) 右辺第1項の積分は部分積分より次式で表される．

$$I\triangleq\int y^{q+1}\log(\sqrt{a^2+1}y)\,dy$$
$$=\frac{1}{(q+2)}\left\{\log(\sqrt{a^2+1}y)-\frac{1}{(q+2)}\right\}\cdot y^{q+2} \quad \text{(ap.13)}$$

したがって，

$$E_{0,q}(a,y)=\frac{1}{(q+2)}\left\{2a\cdot\log(\sqrt{a^2+1}y)-2a\frac{(q+3)}{(q+2)}+2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}\cdot y^{q+2} \quad \text{(ap.14)}$$

同様に，(ap. 11)式より，$E_{1,q}$(a, y) は次式で表される．

$$E_{1,q}(a,y)\triangleq\int y^q e_1(ay,y)\,dy$$
$$=\frac{1}{2}\left\{2(a^2+1)\int y^{q+2}\log(\sqrt{a^2+1}y)\,dy-a^2\int y^{q+2}dy\right\}$$
$$=\frac{1}{2(q+3)}\left\{2(a^2+1)\cdot\log(\sqrt{a^2+1}y)-\frac{2(a^2+1)}{(q+3)}-a^2\right\}\cdot y^{q+3} \quad \text{(ap.15)}$$

(ap. 14)，(ap. 15)および(ap. 9)式より任意次数の $E_{p,q}$ が漸化的に計算できることになる．