

《学会創立10周年特別寄稿》

数学モデルとシミュレーション†

近 藤 次 郎*

ABSTRACT The present paper reviews the development of the hardware of electronic computers in recent years, and taking aerodynamics as an example, discuss the fundamental equations and relevant aerodynamic phenomenon. Mathematical model can be modified according to the flow to be simulated. Finally the paper will introduce the case of chaos. The simulation of complicated phenomena should be carefully investigated. The problem of climate change is an example.

1. は し が き

近ごろはコンピュータが著しく発達して、わが国でも計算速度の速いコンピュータが次々に開発されている。また、これらのコンピュータに使われる半導体の集積回路の品質や製造量においては、日本は世界の市場の85%を占めている。このように、コンピュータのハードウェアでは世界最高になったが、これを使いこなすプログラム、あるいはソフトウェアに関しては、まだ外国品に劣っていると言われている。コンピュータそれ自身も、近ごろは人工頭脳（AI）などの、いわゆる第5世代、第6世代のコンピュータが開発されつつあるが、計算のアルゴリズムやコンピュータのアーキテクチャだけでなく、これを十分に使いこなすソフトウェアの開発が極めて必要である。しかしながら、コンピュータのソフトウェアは、先ずそのニーズがなければ開発されるものではないので、いろいろな問題を提案することが必要になってくる。そこで、ここでは、その数学モデルについて述べ、コンピュータで実際の現象がどの程度よく再現、すなわち、シミュレーションできるかについて述べてみたい⁴⁾。

近ごろは、数値流体力学（Computer Fluid Dynamics, CFD）という部門さえ現れているほどである。コンピュータによるシミュレーションは、流体力学だけではなく、その他いろいろな応用があるが、ここでは数学との関連の具体的な例として、主として数値流体力学について述べてみよう。

2. 瀬戸内海水理モデル

コンピュータによるシミュレーションを述べる前に、アナログ式のシミュレーションの例を述べてみよう。呉市にある中国工業試験所では、瀬戸内海の水理モデルがある。これは、幅117.5 m、長さ230 mほどの大きさで、深さは実際の1/159で、瀬戸内海の水深に相似になっており、干満に合わせて潮流を再現することができる装置である。このような巨大なシミュレーターでも、実際の瀬戸内海の縮尺の2,000分の1であるが、その潮流による諸現象を再現することが可能である。

鳴門の渦潮なども、小さい渦巻きとなって実際に見ることができる。このモデルは、中国、四国の河川から流入する汚染物質が海域全体に拡大していく模様を具体的に再現することができ、閉鎖性海域の環境対策をたてる上において、極めて有効である。

湾岸戦争でペルシャ湾の一带に2,500万バレルの原油が流出して、その影響、環境汚染が注目されているが、このような閉鎖性の海域における汚染の程度を再現するモデルが必要である。これは、もちろんコンピュータでも流れを再現することができるが、現在のところ、この影響がどの程度継続して、それが何時終了するのかがよくわかっていない。クウェートから流れ出ている原油は、その前にファイラカ、ブービヤンなどの大きな島があって、これによって塞止められている様子であるが、ペルシャ湾の水理モデルについては、どの程度研究が進んでいるかよくわからない。

このほか、航空機の開発などに使われる風洞などはアナログ・シミュレーションの典型的なものである。

Mathematical Modelling and Simulation. By Jiro Kondo

*日本学術会議

†第10回シミュレーション・テクノロジー・コンファレンス
(1991年6月)講演資料の再掲

3. 数学モデルの分類

さて、コンピュータによって現象を再現するためには、少なくとも最初は現象の数値モデルが確立していることが必要である。近ごろは、1.で述べたように、コンピュータの性能が上がっているので、多くの場合に差分法を用いて解くことができる。コンピュータは、アルゴリズムが確立しているプログラムができていれば、繰り返して計算したりする手間は厭わない。その上、数値解はグラフィックによって、あたかも実験したように示すことができる。たとえば、湾内の流れの様子を目に見えるように描くことが可能である。

コンピュータを利用すると、数学の基礎方程式が非線形であったり、特異点があったりして解析的に解が求められない場合でも容易に解くことができる。これらの場合は、解が発散したり、あるいは不安定になったりして、解析的には解けない場合でも、コンピュータで計算すると、不思議なことに解が実際に求まる場合が多い。しかしながら、われわれは、コンピュータでこのようにして得られた解が現象の真実を表わしているのか否かを十分注意して検討する必要がある。すなわち、見掛け上の解であるのか、あるいは、本来不安定な現象の一面面をとらえているのかを見分ける必要がある。つまり、数値計算ができたからといって、それを妄信することは禁物であって、現象の本質を見抜き、数学モデルの数理的特性を十分理解することが必要である^{7),8)}。

しかしながら、線形の問題でも、極めて複雑な場合には、解が求まらない。また、見通しをたてることさえ困難である。しかし、コンピュータによれば問題が解ける場合がある。われわれが難しい問題と言っている場合に、それは数学的に非線形で本質的に難しい場合と、極めて複雑であって、そのために難しい場合とがある。たとえば、「セールスマンの巡回の問題」などというのは、いくつかの都市を最も安い経費で全部回ろうとするものであって、もし、都市の数が N 個あるとすれば、 N 個の順列の問題になるので、 N が100ぐらいになると、その場合の数は天文学的な数字、すなわち、10の200乗程度になってしまう。このような問題はいろいろなケースを考えて、所要時間や所要経費の加算を行い、その結果を比較するだけの単純な算数の問題であるが、場合の数が極めて大きいために解が得られないという特殊な例である。これは毎秒10億回の加算ができるコンピュータでも10年か11年かかる問題である。それでも近似解しか求められない。現

在では、都市の数が3,038個の都市の問題を大型コンピュータを使って計算することが試みられている⁹⁾。この問題は、セールスマン巡回の問題と称して、オペレーションズ・リサーチ、経営科学などでは、従来から知られている問題であるが、コンピュータによって解くことができるようになったものである。

また、連立線形常微分方程式の大型なシステムとして問題が与えられる場合もある。これはシステム・ダイナミックスの場合であって、このときは関連する変数が極めて多いのであるが、それらの時間的な変化を調べてみると、連立差分方程式になる場合である。したがって、その解は解析的に求めることは難しくはないのであるが、未知変数の間の関係が極めて複雑であると同時に、変数の数が極めて多い場合にはシステム・ダイナミックスの手法が用いられる。MITのフォレストーやメドウスなどによって、この手法がコンピュータ向きに開発され、その具体的な応用例としては、たとえば、1972年に発表された『成長の限界』が有名である。

4. 表面波の問題

実際、流れが障害物に当たって、その後に波ができる様子は、たとえば、図のように、レオナルド・ダ・ヴィンチによって描写されているが、最近ではこれを数値的に解くことができるようになった⁴⁾。東京大学の船舶海洋工学科の宮田秀明教授は、このような問題を理想流体の方程式と、表面を表わす条件式とによって表現し、差分法で境界条件に合う解を求めている。そ



図1 レオナルド・ダ・ビンチの渦の描写

の結果は、障害物の後ろにできる波の模様を極めてよく再現していると思われる。この場合には、流体は理想流体と考え、つまり、粘性も圧縮性もない場合とする。しかしながら重力は考慮される。このような流れの問題は、基礎方程式が線形であるので、数値計算の精度が高く、また、容易に精密な計算を行うことができる。しかし、それにしても、障害物の後ろの波の模様を実際の解析的な手法で得ようとする、極めて難しい問題になる。

5. 翼の揚力

2次元の任意の翼形の周りの流れは、基礎方程式が調和関数の速度ポテンシャルとして表現されるので、等角写像を用いることができ、極めて美しい数学理論が展開されている。任意の翼形を与えたときに、その翼の周りの流れを計算し、それによって翼形の空気力学的な特性を計算で求めることは、1930年代に多くの研究者によって行われている^{1)~3)}。

6. ダランベールのパラドックス

理想流体のモデルでは粘性が考慮されていないので、このために、一様な流れの中にある物体の解は流体による抵抗を計算することができない。すなわち、たとえば、2次元の翼の周りの流れの場合に、揚力や圧力分布の計算はできるが、抵抗は計算できない。これをダランベールのパラドックス（逆説）と言う。

7. 3次元翼理論

理想流体の場合でも、3次元の流れの場合には、速度ポテンシャルはあっても、等角写像のような方法を使うことができないために、理論的な計算は2次元の場合に較べてやや難しくなる。しかし、それでも、球の周りの流れや回転体の周りの流れなどは、これを解くことができる。しかし、2次元の場合と比べて、航空学としてはあまり実用性がない。

プラントルは、3次元の翼の場合に、翼端から出る渦によって、流れの場の中に主流に直角な方向の誘導抵抗ができることを示した。これは、流れに対して垂直な方向にできる揚力が、実際の飛行方向に対しては直角でなくなるために生ずる抵抗である。しかし、このような誘導抵抗を計算するには、翼から出る渦の場が影響するので流れの揚全体を考慮することが必要である。そこでいろいろな平面形の違った翼の誘導抵抗を計算するには、流れを局所的に表わすのではなく、揚全体として表現することが当然必要になる。このよ

うにして、微分方程式ではなく、積分方程式を解くことが要求される。これがプラントルの3次元翼理論と言われるものであって、飛行機の設計には非常に大きく役立った。

このほか、2次元の場合でも、ジェット・フラップといって翼端から出るジェット気流の影響などを調べる必要がある場合には、再び流れの場全体を考慮することが必要になり、積分方程式の形で表現される。このような場合はそう多くなくて、通常の場合には、流体力学の問題は偏微分方程式の解となる。これは、近ごろは、分布定数系の問題と呼ばれていることが多い。そして、微分方程式のコンピュータなどによる数値解法は、この分布定数系、すなわち、偏微分方程式で表わされているものを分割座標の交差点における数値に集中させて、連立方程式を導いて解くものであるから、いわば、分布定数系を集中定数系に直して計算することにほかならない。

8. 粘性流体

理想気体の仮定を除いて、粘性を考慮した流れの方程式をつくると、いわゆる、ナビエ・ストークスの式になる。この場合、流体の粘性は速度勾配に比例するものとして計算するものであるから、連続体の弾性力学では、線形理論になるべきところであるが、速度勾配に比例する力とするので、速度については非線形の表現になる。そして、流体力学の問題は、流れの場の中における空間的な速度の分布を求めることに帰するので、ナビエ・ストークスの方程式は、速度分布に関してはこのような理由で非線形になってしまうのである。この場合に、解析的な解を求めることは、はなはだ困難であって、粘性が極めて大きい、すなわち、レイノルズ数が極めて小さい場合に、近似解が見つかる程度である。円柱や球のような単純な物体の場合でも、その周りの粘性流れの解を求めることは、はなはだ難しいが、プラントルはレイノルズ数の大きい場合に、粘性の作用の及ぶ範囲が翼の周りの極めて限定された範囲、すなわち、境界層にのみ働くという近似を使って、いわゆる、境界層の方程式を導いた。このようにすると、粘性の方程式がやや簡単になるので、その解を求めることができる。しかしながら、最終的には、解析的に解けるというのではなくて、数値的に解かなければならない。しかし、このようにすると、一様な流れの中にある物体の抵抗を計算することができる。すなわちダランベールの逆説は解消する。

最近では、コンピュータによってナビエ・ストーク

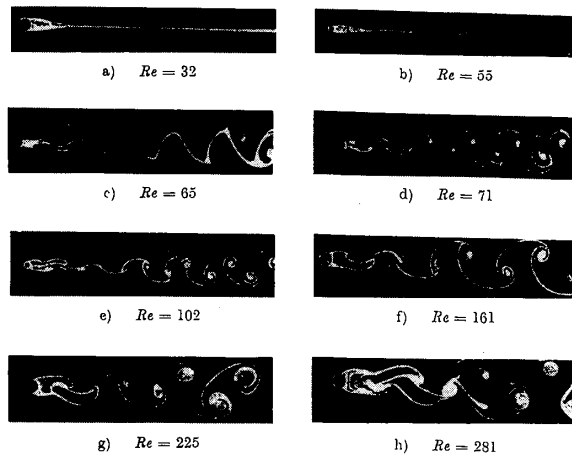


図2 円柱のまわりの粘性流[2]

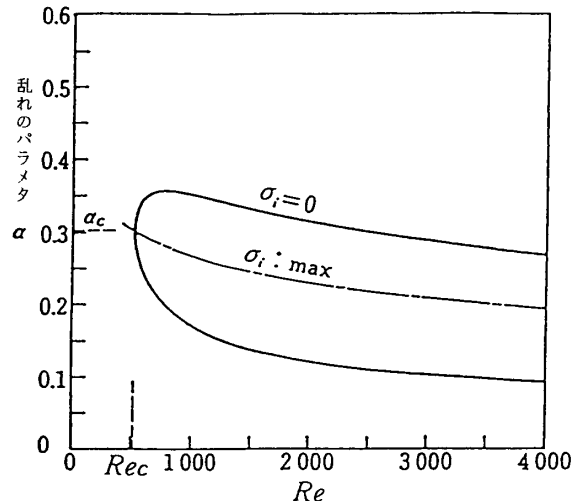
スの方程式を完全に数値的に解くことができるようになり、その結果、物体の後方にできるカルマン渦列などを計算することができるようになった。しかし、これは高速の計算機でないと、計算時間が多くなるために実行が難しい。

粘性流体の流れとなると、レイノズル数を次第に大きくしていくと不安定な渦列ができて、実験的にも、いわゆる乱流状態になってしまう。このように、流れが層流、それから乱流に遷移することは、実用上も、また、流体理論上も、極めて興味の深い問題である。この問題は、しかしながら、理論物理学者、たとえばゾンマーフェルトとか、ハイゼンベルグなどによって取り上げられた。それは、オール・ゾンマーフェルトの方程式を導き、それから、遷移レイノズル数を計算することができるようになった²⁾。

9. 圧縮性流体力学（衝撃波を伴う流れ）

極めて高速な空気の流れでは圧縮性が問題になる。すなわち、空気密度が流れの場で一定ではなくて、変化することを考慮しなければならない。この場合に、粘性を無視すると、渦なしの場合に速度ポテンシャルが存在するが、その式は非線形の偏微分方程式になってしまう。このとき、流れの場が音速以上であるときと以下とで、方程式の数学的な性質が異なる。そこで、衝撃波を伴う流れになると、衝撃波の後方では亜音速、前方では超音速であるから、流れの場が楕円形と双曲形の両域を含むことになり、混合形の問題と言われる。

これは取扱いが極めて難しく、統一した解析的な解を求めることはほとんど絶望的である。極めて簡単な

図3 平板境界層の中立（安定）曲線
実線の内部が不安定領域、外部が安定領域

場合には、イタリアのトリコミが解を求めたが、その解は実際の流れの場にはほとんど役に立たない。

さて、衝撃波を伴う流れは、飛行機が高速になると極めて重要な問題になるので、そこで、多くの研究が行われたが、超音速場と亜音速場の2つの流れを衝撃波面で接合する必要がある。しかしながら、どこに衝撃波が出現するか、また、その形がどのようになるかは前もってわからないので、2つの解を接合するといっても、実際上はできない相談である。ところが、この問題がコンピュータの発達によって極めて巧妙に解けることになり、現在では3次元の流れにおける翼の上の衝撃波の問題まで解くことができるようになった^{3),5)}。

10. 地球環境の問題

現在、二酸化炭素が増大して、地球が温暖化することが環境上大きな問題となっている。この場合には、スーパー・コンピュータを用いて圧縮性を考慮したナビエ・ストークスの方程式を数値的に解き、かつ、これと同時にエネルギーが問題になるので、極めて面倒な基礎方程式を解かなければならない。

この場合は、低速であって、衝撃波が現れるなどというような難しい問題はないが、それにしても、正確な解を求めることは、はなはだ難しい問題である。現在、いろいろな解法が試みられているが、結果が一致しないために、不確実性といわれて問題になっている。この種類の問題について、数学モデルをつくるに当たり、現象のうち、未知の部分がはなはだ多いためである。地球はあまりにも大きいので、現在のスーパ

ー・コンピュータの容量, 能力をもってしても, さらにそれを超えるほどである。これは^{5)~7)}, いわゆるカオスという問題が内在していて, そのために解が安定しないという見方もあり, 現在, 多くの研究者がその解決を試みているが, また十分な結果が得られていない。コンピュータが発達しても, 結局, 現象をよく見て正しく数学モデルを設定することが重要である^{8), 10)}。

参 考 文 献

- 1) Lamb, H., Hydrodynamics, Cambridge, (1932)
- 2) Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., Fluid Mechanics, Pergamon, (1959)
- 3) 近藤次郎, 高速空気力学, コロナ社, (1977)
- 4) Taylor, G. I., Interaction between experiment and theory in fluid mechanics, Fluid Dynamics Review 7, 1/16, (1974)
- 5) Kondo, J., Supercomputing, J. Kondo (ed.) Springer, (1991)
- 6) 矢野順一, 地球流体力学, ながれ 9, 205/228
- 7) 近藤次郎, シンポジウム開会にあたって——数値流体力学の話題を中心に, 数学セミナー増刊 5/11, (1990)
- 8) 近藤次郎, 現象と数学モデル, 日本航空宇宙学会 第22期年会講演会 講演集, (1991)
- 9) IHT, The Shortest Route, March 14, (1991)
- 10) Kondo, J., Research and Policy on the Environment in Japan. 1/15. The Global Environment, K. Takeuchi and M. Yoshino (ed.) Springer (1991)