

空間回路網法による地震応答解析†

永井 哲敏*・柳原 純夫*
竹内 幹雄*・吉田 則信**・深井 一郎**

ABSTRACT Recently, computer simulation of ground vibration has become feasible as the development of high-speed digital computers with large memory capacity. However, the seismic response analysis of large three-dimensional models is still impractical in time domain because very large CPU time and memory usage are required. Spatial Network Method which is originally developed for the analysis of electromagnetic fields, can also be applied to sound field or elastic wave propagation analysis. This method requires less CPU time, as it is suitable for vector processing. The purpose of this paper is to show the applicability of the Spatial Network Method to analyze seismic response problems. With this method, a three-dimensional elastic medium is modeled as an equivalent electrical circuit. The electric current and the voltage of the equivalent circuit are assumed to correspond to the velocity and the stress in the elastic medium. The current and the voltage are expressed in time domain in the same way as *Bergeron's* method, which is essentially valid to the one-dimensional wave propagation analysis in time domain. The analysis of the seismic response of an inhomogeneous ground is presented. The calculated results by the Spatial Network Method are compared with those by the Finite Element Method and also with the data experimentally obtained. Good agreement is obtained with other results, and the validity and effectiveness of Spatial Network Method is proved.

1. ま え が き

近年、都市圏においてウォーターフロント開発、ジオフロント構想などの大型建設プロジェクトが進められている。

構造物が大規模化、複雑化する中で、その設計・解析には良好な精度を保ちつつも広範囲な解析領域が必要とされる。

スーパーコンピュータに代表される計算機の超高速化、大容量化は、これらの設計・解析には不可欠である。

しかし、このような状況下においても有限要素法等で3次元大規模モデルの地震応答解析を時間領域で行う場合、計算容量、計算時間が膨大となり実用的でないことも多い。

空間回路網法は、もともと電磁界の過渡解析^{1)~3)}のために開発された手法であるが、波動解析法としての一般性を持っており、音場解析^{4)~6)}や弾性波動解析^{7),8)}への応用が進められている。

また、計算のアルゴリズムが簡単で繰り返し計算が主体となっているため、スーパーコンピュータの使用により大幅に計算時間が短縮されるという特徴を有している。

すなわち、空間回路網法を地震応答解析に適用することが可能となれば、3次元大規模モデルの解析が短時間で実施できる利点を有することになると考えられる。

本論文は、はじめに空間回路網法による弾性体の時間応答解析への定式化について述べる。次に、空間回路網法と従来の数値解析手法および模型振動実験^{9),10)}との比較をおこない、空間回路網法による地震応答解析への適用性について報告するものである。

2. 空間回路網法

空間回路網法は、時間応答計算が簡便になるという利点を持つ *Bergeron* 法¹¹⁾を利用し、これに弾性体の電氣的等価回路表示¹²⁾を組み合わせた手法である。

Analysis of Seismic Wave Propagation by Spatial Network Method. By Tetsutoshi Nagai, Sumio Yanagihara and Mikio Takeuchi (Okumura Corporation, Engineering & Development), Norinobu Yoshida and Ichiro Fukai (Hokkaido University, faculty of Engineering).

*奥村組技術開発部

**北海道大学工学部

†1991年2月15日受付, 1991年10月24日再受付

Bergeron 法は、本来 Water-Hammer 現象の過渡応答解析のための図式解法であったが、電力系統のサージ解析に用いられ有効性が示されている解法である。波動方程式の d'Alembert の一般解を利用し、時間離散間隔 Δt を空間離散間隔 Δd と波動伝播速度 c に関連づけて時間軸上の安定化をおこなうものである。

弾性体の電氣的等価回路とは、弾性体における応力と変位速度の関係が電気回路における電圧と電流の关系到等しくなるよう 1 次元線路や集中定数素子を組み合わせた回路である。弾性体の変位速度と応力は、回路中の電圧、電流に弾性定数と密度は、回路定数に相当する。

2.1 Bergeron 法

弾性体内を x 方向のみに伝播するせん断波を図 1 に示す。 x 方向の変位を v 、せん断応力を τ とし、密度を ρ 、せん断剛性を G とすると微小部分に関する運動方程式、応力～ひずみ関係式は次式で表される。

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (1)$$

$$\tau = G \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

上式を変位 v の代わりに変位速度 $\dot{v}$ をもとにして書き改め、また、圧縮応力を正とすると次式を得る。

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = -\rho \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (4)$$

これらの式より変位速度 $\dot{v}$ とせん断応力 τ はともに次の波動方程式を満足する。

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \quad (6)$$

これらの波動方程式の解は、d'Alembert の解によ

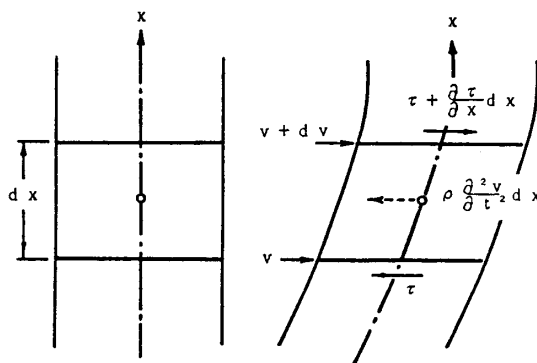


図1 弾性体内を伝播するせん断波

って次のように与えられる。なお、 c は、波動伝播速度で $\sqrt{G/\rho}$ である。

$$\dot{v}(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (7)$$

$$\tau(x, t) = \rho c (f(x - ct) - g(x + ct)) \quad (8)$$

上式で $f(x - ct)$ は進行波、 $g(x + ct)$ は後退波を表し、 ρc は特性インピーダンスである。これらより進行波と後退波を分離すれば次式が得られる。

$$\rho c \dot{v}(x, t) + \tau(x, t) = 2f(x - ct) \quad (9)$$

$$\rho c \dot{v}(x, t) - \tau(x, t) = 2g(x + ct) \quad (10)$$

x を空間軸、 t を時間軸とすれば、式(9)では座標 (x_0, t_0) における応力波 $(\rho c \dot{v}(x_0, t_0) + \tau(x_0, t_0))$ は、 $\Delta d/c$ なる時間が経過すると $+\Delta d$ だけ隔てた場所に再現されることを意味している。

同様に、式(10)では座標 (x_0, t_0) における応力波 $(\rho c \dot{v}(x_0, t_0) - \tau(x_0, t_0))$ は、 $\Delta d/c$ なる時間が経過すると $-\Delta d$ だけ隔てた場所に再現されることを意味している。

すなわち、現在と Δt だけ進んだ時刻における変位速度と応力の関係は次式によって与えられる。ただし、 Δt は $\Delta d/c$ でなければならない。

$$\begin{aligned} \rho c \dot{v}(x + \Delta d, t + \Delta t) + \tau(x + \Delta d, t + \Delta t) \\ = \rho c \dot{v}(x, t) + \tau(x, t) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \rho c \dot{v}(x - \Delta d, t + \Delta t) - \tau(x - \Delta d, t + \Delta t) \\ = \rho c \dot{v}(x, t) - \tau(x, t) \end{aligned} \quad (12)$$

以上のように、Bergeron 法は 1 次元波動問題の解法の 1 つであり、時間離散間隔 Δt を離散距離 Δd とその間の波動伝播速度 c に関連づけて解くところに特徴がある。

差分法や有限要素法の場合、波動方程式または運動方程式を直接、離散化するため時間離散間隔は、発散しないように十分細かくとらなければならない。

しかし Bergeron 法の場合、波動の伝播という物理的な観点から時間離散間隔を決定しており、数値計算上安定である。

同様に、粗密波についても Bergeron 法による定式化が可能であるが、せん断波と粗密波は波動伝播速度が異なり、互いに連成しながら伝播する。また、弾性定数の異なる媒質では、波動伝播速度も異なってくる。

このため、弾性体に Bergeron 法をそのまま適用して、時間軸に関して定式化を行うことは困難と考えられる。

弾性体を伝播するせん断波と粗密波を電気回路を用いて、統一的に表現できることが可無となれば、回路中の電流、電圧応答に対して Bergeron 法が適用でき、

弾性体の時間応答を求めることができる。

2.2 電気回路における基礎方程式

1) 1次元基本線路

1次元基本線路とそのモデル図を図2に示す。線路を伝播する電圧、電流を $V(x, t)$, $I(x, t)$ とし、線路の単位長さあたりのインダクタンス、容量を L_0 , C_0 とすると基礎方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, t) = -L_0 \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, t) = -C_0 \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) \quad (14)$$

このように1次元線路に関する基礎方程式は、弾性体の基礎方程式(3), (4)と同型となることから、1次元線路についても Bergeron 法が成り立つ。

2) 集中定数素子

本手法で用いる電気的等価回路は、節点間を1次元基本線路で結んでいる。ここで、1次元線路は、波動伝播速度の大きい粗密波が伝播するよう回路定数を決定する。

実際の弾性体では、波動伝播速度が異なるせん断波が存在し、また媒質条件すなわち弾性定数や密度によって波動伝播速度が異なる。

この波動伝播様式と速度の違いを表すために節点に集中定数として容量を付加する。また、弾性体の粘性減衰や直応力と直ひずみの関係を表すため、それぞれ、漏れコンダクタンス、等価回路上の概念である相互容量を節点に付加する。

a) 漏れコンダクタンス

抵抗が線路に並列に接続されている回路を図3に示す。この時、漏れコンダクタンスを G_d 、両端の電圧を $V(x, t)$ とすると漏れコンダクタンスに流れる電流 $I_g(x, t)$ は次式で示される。

$$I_g(x, t) = G_d V(x, t) \quad (15)$$

電圧 V は変位速度、漏れコンダクタンス G_d は減衰定数、電流 I_g は減衰力に対応させると、漏れコンダクタンスは、弾性体の粘性減衰を表すこととなる。

b) 容量

線路に容量が接続された回路を図4に示す。この容

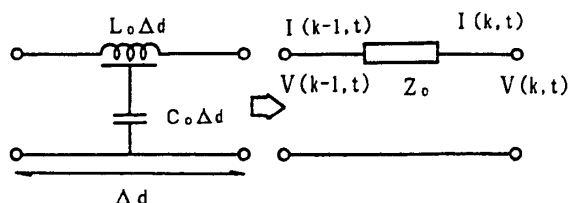


図2 1次元基本等価回路

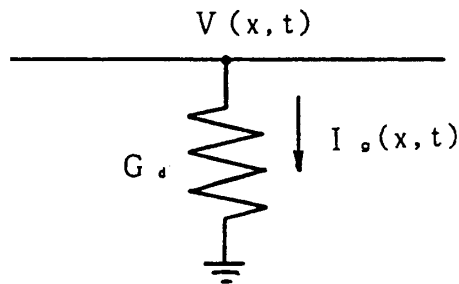


図3 漏れコンダクタンス

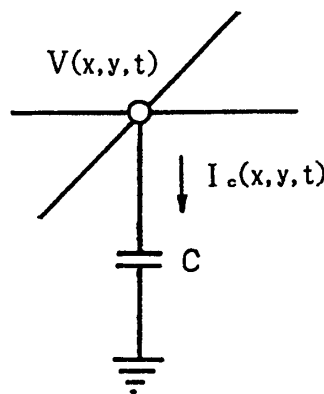


図4 容量

量に加わる電圧を $V(x, y, t)$ とすると、そこを流れる電流 $I_c(x, y, t)$ は、容量 C を用いて次式で表される。

$$I_c(x, y, t) = C \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial t} \quad (16)$$

電圧 V を変位速度に対応させた場合、容量 C は密度に、電流 I_c は慣性力に相当している。

また、電圧 V を応力に対応させた場合、容量 C はせん断剛性の逆数に、電流 I_c はひずみ速度に相当する。

c) 相互容量

弾性体の直応力と直ひずみの関係を表すために図5に示す等価回路上の概念である相互容量を考える。節点は、 x, y, z 方向の線路に対してそれぞれの電圧を持ち、これらを $V_1(x, y, z, t)$, $V_2(x, y, z, t)$, $V_3(x, y, z, t)$ とすると、流れる電流 $I_{d1}(x, y, z, t)$ は次式で表される。

ここで、容量を C 、相互容量を M とする。

$$I_{d1}(x, y, z, t) = C \frac{\partial V_1(x, y, z, t)}{\partial t} + M \left(\frac{\partial V_2(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial V_3(x, y, z, t)}{\partial t} \right) \quad (17)$$

電圧 $V_1 \sim V_3$ は、それぞれ、 x, y, z 方向の直応力に、

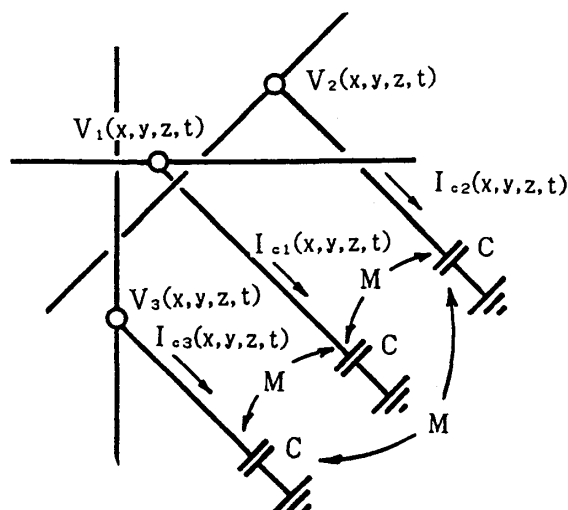


図5 相互容量

回路定数 C, M は弾性定数に、電流 $I_{c1} \sim I_{c3}$ は、それぞれ x, y, z 方向のひずみ速度と対応関係にある。

2.3 弾性体における基礎方程式

x, y, z 方向の変位をそれぞれ u, v, w とし、直応力を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ とし、せん断応力を $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ とする。

弾性体の密度、粘性減衰係数を ρ, c 、ラメの定数を λ, μ とする。

x, y, z 方向に関する運動方程式は、次式で表される。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (18)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (19)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad (20)$$

また、弾性体の応力～ひずみ関係式は次式で表される。

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \quad (21)$$

$$\sigma_y = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \quad (22)$$

$$\sigma_z = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} \quad (23)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (24)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (25)$$

$$\tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad (26)$$

ここで、等価回路を導くため、変位の代わりに変位

速度を変数とし、圧縮応力を正とする。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\rho \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} - c \dot{u} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\rho \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} - c \dot{v} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\rho \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} - c \dot{w} \quad (29)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \quad (30)$$

$$\lambda \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial t} \quad (31)$$

$$\lambda \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \quad (32)$$

$$\mu \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} \quad (34)$$

$$\mu \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} \quad (35)$$

これらの式から変位速度、応力を電流、電圧に対応させて弾性体の電気的等価回路表示をおこなう。

2.4 3次元等方弾性体の等価回路表示

前節で述べた運動方程式、応力～ひずみ関係式を満足するような電気回路(基本等価回路)を図6に示す。

この基本等価回路を解析対象の弾性体に近似するように多数、組み合わせる。図7に節点の配列を表す立方格子網を示す。図中、節点は後述する弾性体の波動方程式の導出のため便宜上添え字を付け、A1点、A2点などのように表すこととする。

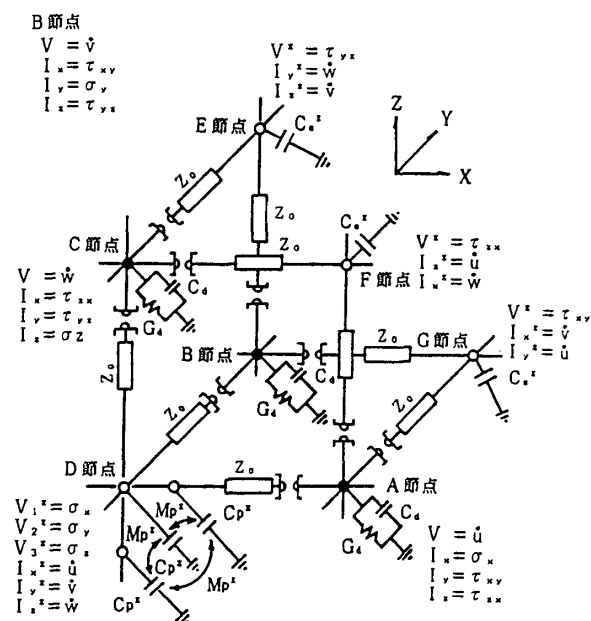


図6 3次元弾性体の基本等価回路

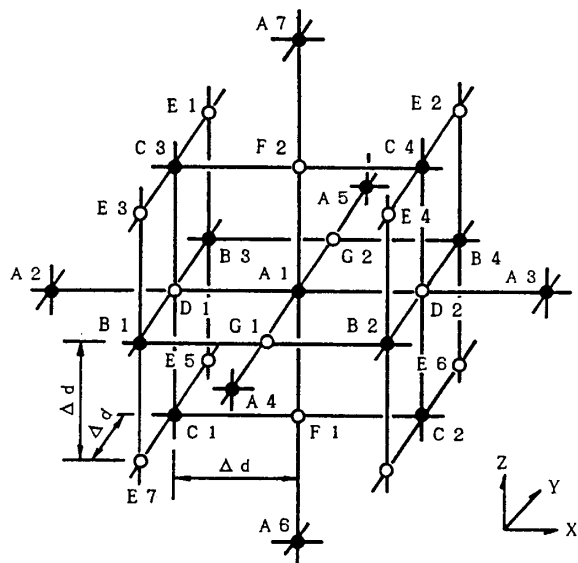


図7 3次元立方格子網

この基本等価回路中の節点は、弾性体の微小六面体のどの節点と対応しても良い。ただしこの時、図6に示すA～G点の位置関係は満足しなければならない。

等価回路と弾性体における変数、および定数の対応を表1に示す。表中の ρ_0, λ_0, μ_0 は、基本一次元線路における密度、ラメの定数である。

電圧と変位速度が対応している節点を変位速度節点、電圧と応力が対応している節点を応力節点と呼

表1 等価回路における変・定数の対応

変数の対応		定数の対応
変位速度節点	A節点 $V = u$ $I_x = \sigma_x$ $I_y = \tau_{xy}$ $I_z = \tau_{xz}$	$C_s = (\frac{\rho_0}{3} - \frac{\rho_0}{3}) 6\Delta d$ $G_s = \frac{\rho_0}{3} 6\Delta d$
	B節点 $V = v$ $I_x = \tau_{xy}$ $I_y = \sigma_y$ $I_z = \tau_{yz}$	
	C節点 $V = w$ $I_x = \tau_{xz}$ $I_y = \tau_{yz}$ $I_z = \sigma_z$	
応力節点	D節点 $V_x' = \sigma_x$ $V_y' = \sigma_y$ $V_z' = \sigma_z$ $I_x' = u$ $I_y' = v$ $I_z' = w$	$Z_0' = \sqrt{(L_0'/C_0')}$ $C_0' = 1/3(\lambda_0 + 2\mu_0)$ $L_0' = \rho_0/3$ $C_s' = (\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3(\lambda_0 + 2\mu_0)}) 4\Delta d$ $C_s' = (\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda_0 + 2\mu_0)} - \frac{1}{3(\lambda_0 + 2\mu_0)}) 2\Delta d$ $M_s' = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda_0 + 2\mu_0)} 2\Delta d$
	E節点 $V_x' = \tau_{xy}$ $I_x' = w$ $I_y' = v$	
	F節点 $V_x' = \tau_{xz}$ $I_x' = u$ $I_y' = w$	
	G節点 $V_x' = \tau_{yz}$ $I_x' = v$ $I_y' = u$	

u, v, w : 変位速度
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: 直応力
 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: せん断応力
 ρ_0, λ_0, μ_0 : 基本一次元線路における密度、ラメの定数
 ρ, λ, μ, c : 密度、ラメの定数、粘性減衰係数

び、図中それぞれ●, ○で示す。変位速度節点と応力節点の間に回路変数の物理的意味の整合、すなわち回路がすべてアドミタンス形（節点方程式）の表現とするため図中 $\square \bigcirc \square$ で表示されるジャイレータを挿入し、電圧を電流に、電流を電圧に変換する。応力節点側の変、定数には*をつけ変位速度節点での値と区別している。せん断応力節点では、せん断剛性を表す容量 C_s^* を付加し、せん断波の伝播を表している。直応力節点では、ヤング率を表す容量 C_p^* および、ポアソン比を表す相互容量 M_p^* を付加している。変位速度節点では密度を表す容量 C_d と粘性減衰を表すコンダクタンス G_d が並列に接続されている。

粗密波とせん断波を統一して取り扱うために、波動伝播速度の速い粗密波を基本として1次元基本線路の特性インピーダンス、波動伝播速度を決定し、せん断波については、節点に集中定数素子を付加し、波動インピーダンスおよび伝播速度を見かけ上、変えることで表している。

変位速度節点A, B, C節点ではそれぞれ $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ に関する運動方程式を満足している。応力節点D点では直応力を、E, F, G節点ではそれぞれ、せん断応力 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ に関する応力～ひずみ関係式を満足している。基本等価回路のA節点からG節点までを考慮することにより弾性体の波動方程式を満足する立方格子網となっている。

この等価回路では通常の電気回路と同じようにキルヒホッフの電流連続条件が成り立つものとする。

入力条件は、電圧・電流源、境界条件は、短絡・開放など電気回路上の概念で取り扱うことができる。媒質条件は、節点に付加した容量の値を変えることによって満足される。

3.3 3次元弾性体の電気的等価回路の導出

本等価回路が弾性体の波動方程式を満足することを明らかにする。

変位速度節点A1における詳細図を図8に示す。

A1点において容量に関する基礎方程式(16)をx方向, y方向, z方向について差分表示すると次式を得る。

ただし、節点間にジャイレータが挿入されているため左辺では、電圧値と電流値の差分になっている。

$$\frac{V_1(D2) - I_{x2}(A1)}{\Delta d} = -\frac{\rho_0}{3} \frac{\partial V(A1)}{\partial t} \quad (36)$$

$$\frac{I_{x1}(A1) - V_1(D1)}{\Delta d} = -\frac{\rho_0}{3} \frac{\partial V(A1)}{\partial t} \quad (37)$$

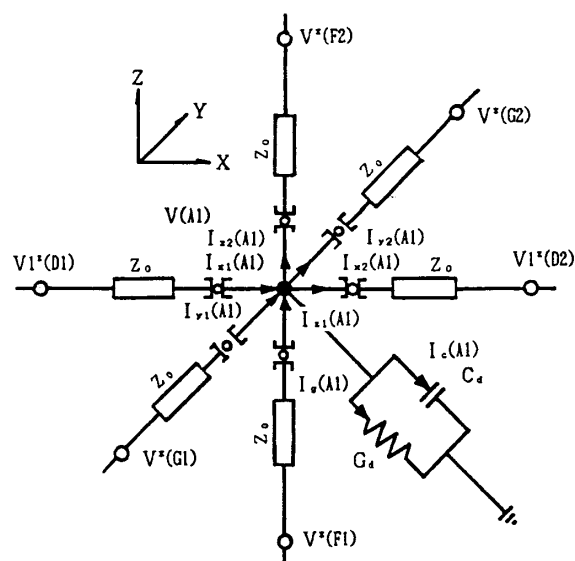


図 8 A点詳細図

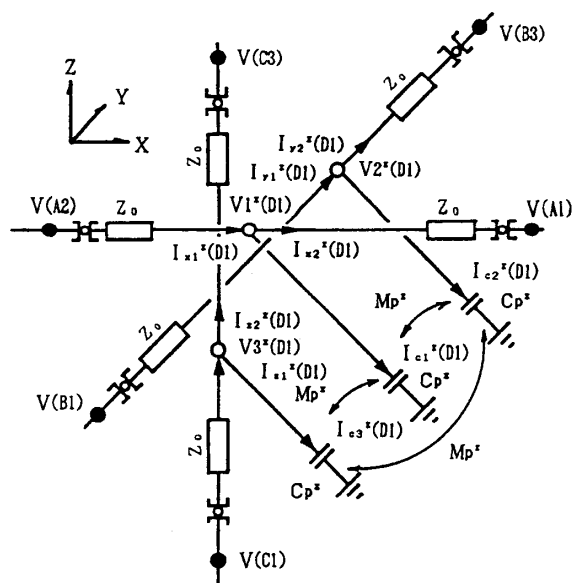


図9 D点詳細図

$$\frac{V(G2) - I_{y2}(A1)}{\Delta d} = -\frac{\rho_0}{3} \frac{\partial V(A1)}{\partial t} \quad (38)$$

$$\frac{I_{y1}(A1) - V(G1)}{Ad} = -\frac{\rho_0}{3} \frac{\partial V(A1)}{\partial t} \quad (39)$$

$$\frac{V(F2) - I_{22}(A1)}{\Delta d} = -\frac{\rho_0}{3} \frac{\partial V(A1)}{\partial t} \quad (40)$$

$$\frac{I_{z1}(A1) - V(F1)}{Ad} = -\frac{\rho_0}{3} \frac{\partial V(A1)}{\partial t} \quad (41)$$

A1 点において、キルヒホッフの電流連続条件およびコンデンサおよび抵抗に流れる電流 I_i , I_g を考慮すると、隣接する節点の間には次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \frac{V_1(D2) - V_1(D1)}{2\Delta d} + \frac{V(G2) - V(G1)}{2\Delta d} \\ & + \frac{V(F2) - V(F1)}{2\Delta d} = -\rho \frac{\partial V(A1)}{\partial t} - cV(A1) \quad (42) \end{aligned}$$

上式は, Δd を十分細かくした時, A1 点における運動方程式(27)を満足している.

また, B 点, C 点では, それぞれ v, w に関する運動方程式 (28), (29) を満足する.

次に直応力節点 $D1$ における詳細図を図 9 に示す.

容量に関して x 方向の差分表示をおこなうと次式を得る.

$$\frac{V(A1) - I_{x2}(D1)}{Ad} = -\frac{1}{3(\lambda_0 + 2\mu_0)} \frac{\partial V_1(D1)}{\partial t} \quad (43)$$

$$\frac{I_{x1}(D1) - V(A2)}{Ad} = -\frac{1}{3(\lambda_0 + 2\mu_0)} \frac{\partial V_1(D1)}{\partial t} \quad (44)$$

また、D1点では、次式で示されるキルヒホッフの電流連続条件が成り立つ。

$$I_{-1}(D1) - I_2(D1) = I_{-1}(D1) \quad (45)$$

相互容量に流れる電流 $I_{c1}(D1)$ については，式(17)を参照して次式で表される。

$$I_{c1}(D1) = C_p^* \frac{\partial V_1(D1)}{\partial t} + M_p^* \left(\frac{\partial V_2(D1)}{\partial t} + \frac{\partial V_3(D1)}{\partial t} \right) \quad (46)$$

ここで、

$$C_p^* = \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda_0 + 2\mu_0)} - \frac{1}{3(\lambda_0 + 2\mu_0)} \right) 2\Delta d$$

$$M_p^* = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda_0 + 2\mu_0)} 2\Delta d$$

上式より，電流成分を消去すると $D1$ 点における x 方向に関して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{V(A1) - V(A2)}{2\Delta d} = & -\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda_0 + 2\mu_0)} \frac{\partial V_1(D1)}{\partial t} \\ & + \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda_0 + 2\mu_0)} \frac{\partial V_2(D1)}{\partial t} \\ & + \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda_0 + 2\mu_0)} \frac{\partial V_3(D1)}{\partial t} \quad (47) \end{aligned}$$

同様にして y 方向, z 方向についても導かれ, V_2 , V_3 を消去すると次式を得る.

$$\frac{(\lambda + 2\mu)(V(A1) - V(A2))}{2\Delta d} + \frac{\lambda(V(B3) - V(B1))}{2\Delta d} + \frac{\lambda(V(C3) - V(C1))}{2\Delta d} = -\frac{\partial V_1(D1)}{\partial t} \quad (48)$$

また, $D2$ 節点では次式となる.

$$\frac{(\lambda+2\mu)(V(A3)-V(A1))}{2\Delta d} + \frac{\lambda(V(B4)-V(B2))}{2\Delta d} + \frac{\lambda(V(C4)-V(C2))}{2\Delta d} = -\frac{\partial V_1(D2)}{\partial t} \quad (49)$$

Δd を十分細かくしたとき上式は表1のように変数を対応させることによりそれぞれD1, D2点における応力～ひずみ関係式(30)を満足している。

同様に、 σ_y, σ_z についても応力～ひずみ関係式(31), (32)を満足する。

次に、せん断応力 τ_y を電圧とするG1点の詳細図を図10に示す。

G1点を中心として各線路方向について、容量に關して差分表示をおこない、キルヒホッフの電流連続条件およびコンデンサを流れる電流 $I_c(G1)$ を考慮すると、G1節点と隣接する節点の間には次式が成り立つ。

$$\frac{V(B2)-V(B1)}{2\Delta d} + \frac{V(A1)-V(A4)}{2\Delta d} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial V(G1)}{\partial t} \quad (50)$$

同様に、G2点では次式を得る。

$$\frac{V(B4)-V(B3)}{2\Delta d} + \frac{V(A5)-V(A1)}{2\Delta d} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial V(G2)}{\partial t} \quad (51)$$

Δd を十分細かくしたとき上式は、表1のように変数を対応させるとそれぞれG1, G2点における弾性体の応力～ひずみ関係式(34)を満足している。

せん断応力 τ_{xz} を電圧とするF1, F2点では次のようになる。

$$\frac{V(A1)-V(A6)}{2\Delta d} + \frac{V(C2)-V(C1)}{2\Delta d} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial V(F1)}{\partial t} \quad (52)$$

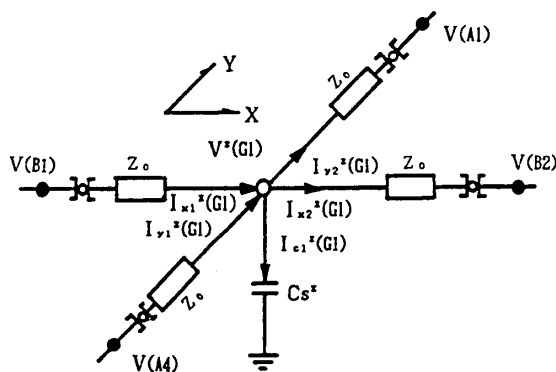


図10 G点詳細図

$$\frac{V(A7)-V(A1)}{2\Delta d} + \frac{V(C4)-V(C3)}{2\Delta d} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial V(F2)}{\partial t} \quad (53)$$

Δd を十分細かくしたとき上式は、表1のように変数を対応させるとそれぞれF1, F2点における弾性体の応力～ひずみ関係式(33)を満足している。

E点では、 τ_{yz} に関する応力～ひずみ関係式(35)を満足する。

従って、A1点に隣接する節点において成り立つ関係式42, 48, 49, 50, 51, 52, 53より、A点以外の成分を消去すると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & (\lambda+2\mu) \frac{V(A2)+V(A3)-2V(A1)}{4\Delta d^2} \\ & + \mu \frac{V(A4)+V(A5)-2V(A1)}{4\Delta d^2} \\ & + \mu \frac{V(A6)+V(A7)-2V(A1)}{4\Delta d^2} \\ & + (\lambda+\mu) \frac{V(B1)+V(B4)-V(B2)-V(B3)}{4\Delta d^2} \\ & + (\lambda+\mu) \frac{V(C1)+V(C4)-V(C2)-V(C3)}{4\Delta d^2} \\ & = \rho \frac{\partial^2 V(A1)}{\partial t^2} + c \frac{\partial V(A1)}{\partial t} \end{aligned} \quad (54)$$

すなわち、上式は Δd を十分細かくし、表1のような変数の対応および図7に示される位置関係を考慮することによって、A1点において $\ddot{u}$ に関する次の波動方程式を満足する。

$$\rho \frac{\partial^2 \ddot{u}}{\partial t^2} + c \frac{\partial \ddot{u}}{\partial t} = (\lambda+\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 \ddot{u} \quad (55)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

同様に、B節点, C節点ではそれぞれ、 $\ddot{v}, \ddot{w}$ に関する波動方程式が導かれる。

以上のようにして、本等価回路は弾性体を伝播する粗密波とせん断波を統一的に取り扱うことができ、Beregeron法による時間軸上の定式化が可能となるものである。

4. Bergeron法による時間軸上での定式化

前章では、弾性体の電氣的等価回路について述べた。この等価回路の節点の電圧および節点へ流入・流

出する電流に対して Bergeron 法を適用し、弾性体の時間応答を求める。

1次元基本線路に Bergeron 法を適用すると次式を得る。

$$V(x, t) + Z_0 I(x, t) = V(x - \Delta d, t - \Delta t) + Z_0 I(x - \Delta d, t - \Delta t) \quad (56)$$

$$V(x, t) - Z_0 I(x, t) = V(x + \Delta d, t - \Delta t) - Z_0 I(x + \Delta d, t - \Delta t) \quad (57)$$

ただし、 Z_0 は特性インピーダンス、 Δt は時間離散間隔、 c は波動伝播速度で次式の関係が成り立つ。

$$Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$$

$$\Delta t = \Delta d/c$$

$$c = 1/\sqrt{L_0 C_0}$$

節点に付加された集中定数素子、容量については台形積分近似を用いて定式化を行う。

容量に流れる電流 I_c は、電圧 V とすると次式で表される。

$$I_c = C \frac{\partial V}{\partial t}$$

時刻 $t - \Delta t$ から t までの積分形で表し、台形近似を適用する。

$$\int_{t-\Delta t}^t \frac{I_c}{C} dt = V_c(t) - V_c(t - \Delta t)$$

$$\frac{\Delta t}{2C} (I_c(t) + I_c(t - \Delta t)) = V_c(t) - V_c(t - \Delta t)$$

すなわち、

$$V_c(t) - R_c I_c(t) = V_c(t - \Delta t) + R_c I_c(t - \Delta t) \quad (58)$$

ただし、 $R_c = \Delta t/2C$

また、相互容量で結合された直応力節点でも同様に台形積分近似を用いる。

コンデンサに流れる電流を I_{c1} とすると、

$$I_{c1} = C \frac{\partial V_1}{\partial t} + M \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_3}{\partial t} \right)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} V_1(t) + R_m(V_2(t) + V_3(t)) - R_c I_{c1}(t) \\ = V_1(t - \Delta t) + R_m(V_2(t - \Delta t) + V_3(t - \Delta t)) \\ + R_c I_{c1}(t - \Delta t) \end{aligned} \quad (59)$$

ただし、 $R_c = \Delta t/2C$, $R_m = M/C$

以上のように、台形積分近似を時刻 $t - \Delta t$ から t までに適用することによって、Bergeron 表示式と一体となった方程式を構成することができる。

D 点を例にとり時間応答解析の定式化を行う。 D 点で変数を図11のようにとり、各線路の両端の電流、電圧に対して Bergeron 法を適用する。

$$V_1^*(j, k, l, t) + Z_0^* I_{x1}^*(j, k, l, t)$$

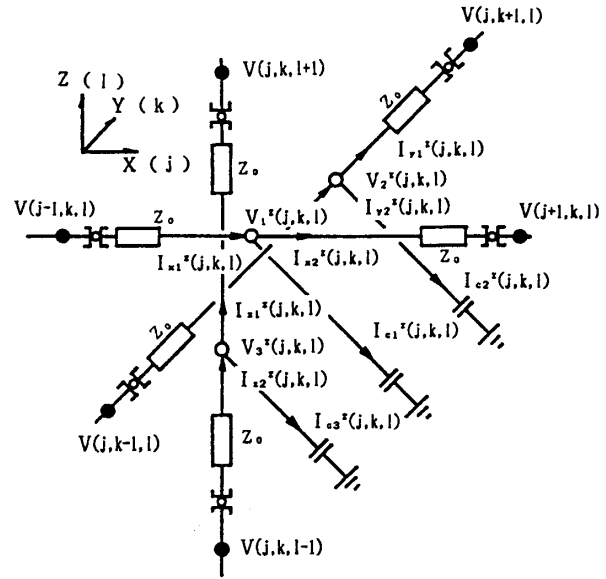


図11 D点における変数

$$= I_{x2}(j-1, k, l, t - \Delta t) + Z_0^* V(j-1, k, l, t - \Delta t) \quad (60)$$

$$\begin{aligned} V_1^*(j, k, l, t) - Z_0^* I_{x2}^*(j, k, l, t) \\ = I_{x1}(j+1, k, l, t - \Delta t) - Z_0^* V(j+1, k, l, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} V_2^*(j, k, l, t) + Z_0^* I_{x1}^*(j, k, l, t) \\ = I_{x2}(j, k-1, l, t - \Delta t) + Z_0^* V(j, k-1, l, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} V_2^*(j, k, l, t) - Z_0^* I_{x2}^*(j, k, l, t) \\ = I_{x1}(j, k+1, l, t - \Delta t) - Z_0^* V(j, k+1, l, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} V_3^*(j, k, l, t) + Z_0^* I_{x1}^*(j, k, l, t) \\ = I_{x2}(j, k, l-1, t - \Delta t) + Z_0^* V(j, k, l-1, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} V_3^*(j, k, l, t) - Z_0^* I_{x2}^*(j, k, l, t) \\ = I_{x1}(j, k, l+1, t - \Delta t) - Z_0^* V(j, k, l+1, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (65)$$

ここで、上式の右辺と左辺で電流と電圧の位置が入れ替わっているのは応力節点と変位速度節点間にジャイレーターを挿入して電流は電圧に、電圧は電流に変換しているためである。

相互容量に流れる電流に対しては、式59より次式を得る。

$$\begin{aligned} V_1^*(j, k, l, t) + R_m(V_2^*(j, k, l, t) + V_3^*(j, k, l, t)) \\ - R_c I_{c1}(j, k, l, t) = V_1^*(j, k, l, t - \Delta t) \\ + R_m(V_2^*(j, k, l, t - \Delta t) + V_3^*(j, k, l, t - \Delta t)) \\ + R_c I_{c1}(j, k, l, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (66)$$

$$V_2^*(j, k, l, t) + R_m(V_3^*(j, k, l, t) + V_1^*(j, k, l, t))$$

$$\begin{aligned}
 -R_c I_{c2}(j, k, l, t) &= V_2^*(j, k, l, t - \Delta t) \\
 + R_m (V_3^*(j, k, l, t - \Delta t) + V_1^*(j, k, l, t - \Delta t)) \\
 + R_c I_{c2}(j, k, l, t - \Delta t) & \quad (67)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_3^*(j, k, l, t) + R_m (V_1^*(j, k, l, t) + V_2^*(j, k, l, t)) \\
 - R_c I_{c3}(j, k, l, t) &= V_3^*(j, k, l, t - \Delta t) \\
 + R_m (V_1^*(j, k, l, t - \Delta t) + V_2^*(j, k, l, t - \Delta t)) \\
 + R_c I_{c3}(j, k, l, t - \Delta t) & \quad (68)
 \end{aligned}$$

また、キルヒホッフの電流連続条件は、次式で与えられる。

$$I_{x1}(j, k, l, t) - I_{x2}(j, k, l, t) = I_{c1}(j, k, l, t) \quad (69)$$

$$I_{y1}(j, k, l, t) - I_{y2}(j, k, l, t) = I_{c2}(j, k, l, t) \quad (70)$$

$$I_{z1}(j, k, l, t) - I_{z2}(j, k, l, t) = I_{c3}(j, k, l, t) \quad (71)$$

ここで、未知量はD点における電圧 V_1, V_2, V_3 、流入する電流 I_{x1}, I_{y1}, I_{z1} 、流出する電流 I_{x2}, I_{y2}, I_{z2} 、コンデンサに流れる電流 I_{c1}, I_{c2}, I_{c3} の計12個である。それに対し方程式は、式(60)～式(71)の12式であることから連立させて未知量を求めることができる。

すなわち、電圧値は次式にて与えられる。

$$\begin{aligned}
 V_1(j, k, l, t) &= ((1 + 2R_c/Z_0)\gamma_1 \\
 - R_m(\gamma_2 + \gamma_3))/\delta & \quad (72)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_2(j, k, l, t) &= ((1 + 2R_c/Z_0)\gamma_2 \\
 - R_m(\gamma_3 + \gamma_1))/\delta & \quad (73)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_3(j, k, l, t) &= ((1 + 2R_c/Z_0)\gamma_3 \\
 - R_m(\gamma_1 + \gamma_2))/\delta & \quad (74)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\gamma_1 = \beta_1 + R_c/Z_0(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\gamma_2 = \beta_2 + R_c/Z_0(\alpha_3 + \alpha_4)$$

$$\gamma_3 = \beta_3 + R_c/Z_0(\alpha_5 + \alpha_6)$$

$$\delta = (1 + 2R_c/Z_0)^2 + R_m(1 + 2R_c/Z_0) - 2R_m^2$$

ここで、 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ は、式(60)～式(65)の右辺

$\beta_1 \sim \beta_3$ は、式(66)～式(68)の右辺とする。

電流値については、上式で求めた値を式(60)～式(65)に代入して求めることができる。

同様に、他の節点についても求めることができる。

以上のように、本手法は、ある節点と隣接する節点の関係からなる連立方程式をあらかじめ解いておき、これを全節点、全離散時間で代入操作を繰り返すことによって弾性体の時刻歴応答を求める。

5. 地震応答解析への適用

空間回路網法に基づき東京湾横断道路・浮島取り付け斜路部末端（地盤剛性急変部）を模した地盤を対象として解析をおこない、本手法の妥当性および特徴を明らかにする。また、2次元地震応答解析では有限要素法による解析と、3次元地震応答解析では、模型振動実験との比較をおこなう。

素法による解析と、3次元地震応答解析では、模型振動実験との比較をおこなう。

5.1 2次元地震応答解析

弾性体の面内波動伝播を表す等価回路は、3次元波動の等価回路の直応力節点を含む2次元平面で表される。

解析は図12に示す地盤を対象とし、改良地盤は沖積粘土の約30倍のせん断剛性を有しており、その変化点では地盤の振動性状の違いからひずみが集中すると考えられるモデルである。表2に地盤の物性値を示す。

有限要素法および本手法の解析条件を表3に示す。

本手法の解析モデルは、 Δd を3mとして、鉛直方向に20 Δd 、水平方向に96 Δd として離散化をおこなう。

ここで、 Δd は本手法における空間の離散間隔であり変位速度節点と応力節点の距離である。

また、時間離散間隔 Δt は、Bergeron法を用いているため、空間離散間隔 Δd と波動伝播速度 c の関係から0.000938 secと決定される。

一方、有限要素法は節点間隔を6mの等間隔とし、三角形平面ひずみ要素を用いている。

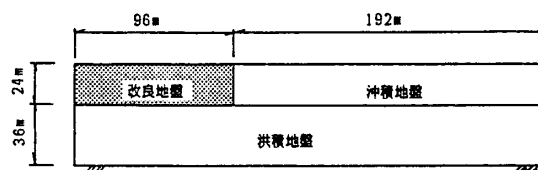


図12 解析地盤

表2 地盤物性値

	せん断剛性(t/m ²)	密度	*7ソソ比	減衰定数(%)
改良地盤	34400.0	0.148	0.45	3.5
沖積地盤	1200.0	0.148	0.45	8.0
洪積地盤	3400.0	0.180	0.45	11.9

表3 解析条件

	有限要素法	空間回路網法
節点数	539節点	変位速度節点 490節点 U, W 539節点 応力節点 528節点 $\tau_{xz}, \sigma_x, \sigma_y$ 480節点
要素数	960要素	
時刻歴解析	Newmark β 法 ($\beta = 1/6$)	Bergeron法
時間刻み	0.0017 (sec)	0.000938 (sec)
入力振動数	0.56 Hz	(1.78 sec)
解析波数	10波	
計算ステップ	10000	18983

時刻歴解析は Newmark β 法 ($\beta=1/6$) により直接積分をおこない、時間離散間隔 Δt は固有周期の 0.1% に相当する 0.0017 sec としている。

両手法とも減衰は質量比例型の粘性減衰を用い、側方は、地盤剛性急変部から十分な距離をとり、自由境界としている。底面は固定境界とし、地盤の 1 次固有振動数 0.56 Hz、波長 240 m、単位速度の正弦波 10 波を与えている。節点数は、両手法とも波長に対して 40 分割するように細かくとっており、有限要素法では 539 節点、空間回路網法も同じく変位速度節点 w を 539 節点とすることで解析条件を合わせている。また、空間回路網法では変位速度、応力を算出するため有限要素法でも要素内応力を算出することとする。

空間回路網法および有限要素法による速度応答倍率のコンター図をそれぞれ図 13、14 に示す。両手法とも剛な地盤では応答が抑えられ、軟弱な地盤では剛な地盤から離れるにつれて応答倍率が大きくなるという傾向を示している。

次に底面に対する地表面、層境界面の速度応答倍率の分布をそれぞれ図 15、16 に示す。有限要素法では、ほぼ直線的に増加しているのに対して空間回路網法では側方に近づくにつれて増加が大きくなっている。

底面に対する改良部断面、未改良部断面における速度応答倍率の分布を図 17、18 に示す。改良部断面では両手法は一致している。未改良部断面では、下部の洪

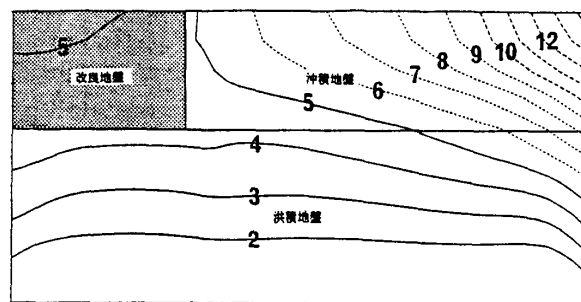


図13 速度応答倍率コンター図 (空間回路網法)

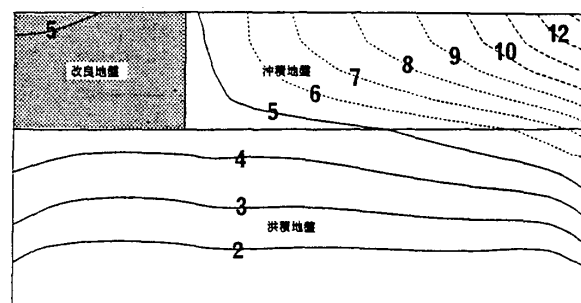


図14 速度応答倍率コンター図 (有限要素法)

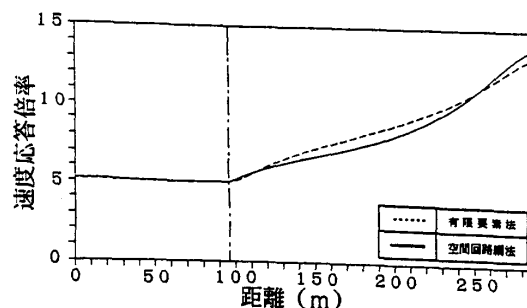


図15 速度応答倍率分布 (地表面)

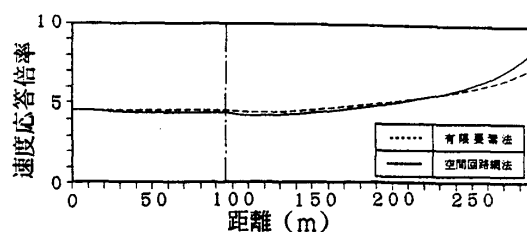


図16 速度応答倍率分布 (層境界面)

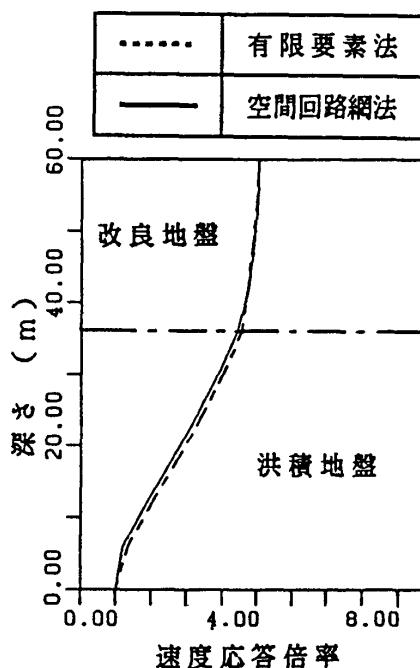


図17 速度応答倍率分布 (改良部断面)

積地盤ではほぼ一致しているが、上部の沖積地盤では地表面に近づくにつれて空間回路網法より有限要素法の方が上回る値となっている。

解析結果については若干の差異が見られるものの両手法とも良く一致しており、本手法は、有限要素法と同等の解析結果が得られることが明らかになった。

計算時間については、スーパーコンピュータ S-

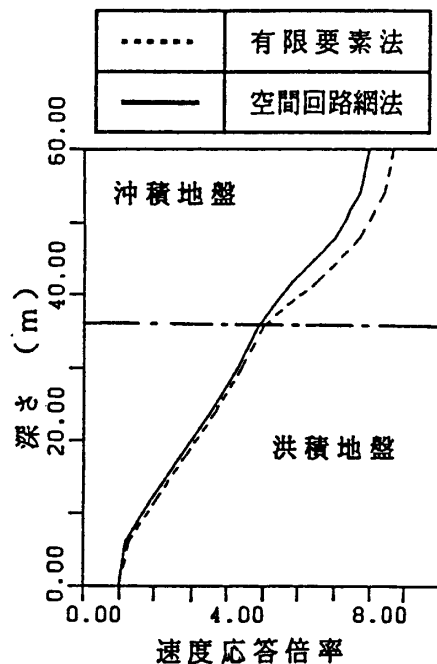


図18 速度応答倍率分布 (未改良部断面)

820/80を用いた結果、有限要素法の80秒に対して本手法は20秒であった。

これは、有限要素法が多次元連立方程式を一度に解くのにに対し、本手法はある節点と隣接節点の関係から求まる連立方程式をあらかじめ解き、全節点について代入を繰り返すことで時刻歴応答を求めることができるためである。3次元や大規模モデルになるにつれて両者の計算時間の差は大きくなると考えられる。

本手法は差分法と比べると数値計算上安定であり、弾性体を電気的等価回路で表現しているため境界条件も電気回路上の概念で取り扱うことができ複雑なモデ

ルでも比較的容易に対応できると考えられる。

5.2 3次元地震応答解析

解析は、東京湾横断道路・浮島取り付け斜路部末端を模した1/50の実験模型を対象とした。

実験は、図19に示す模型地盤を振動台で加振し、地盤剛性急変部の地震時挙動を把握するものである。

地盤の物性値を表4に示す。これらは、別途おこなったせん断波速度測定試験、単位体積重量試験から求めたものである。減衰定数、ポアソン比については、それぞれ2.5%、0.45を仮定している。

解析モデルは、 Δd を5cmとし水平方向に $70\Delta d \times 70\Delta d$ 、鉛直方向に $24\Delta d$ で離散化し、側方境界は、自由境界としている。これは、実験模型の側方に地盤に比べて極端に剛性の小さいウレタンを設置したため、自由境界に近い状態と考えられるからである。

入力地震波は1次共振動数17.9 Hz、波長4.64 mの正弦波である。

加速度振幅30 galの正弦波でY方向に加振した時の底面に対する表地面の速度応答倍率の分布を実験結果とあわせて図20、21に示す。

解析、実験ともに剛な改良地盤では応答が抑えら

表4 地盤性値

	せん断剛性(t/m ²)	密度
改良地盤	2900.0	0.150
沖積地盤	200.0	0.143
洪積地盤	2240.0	0.146

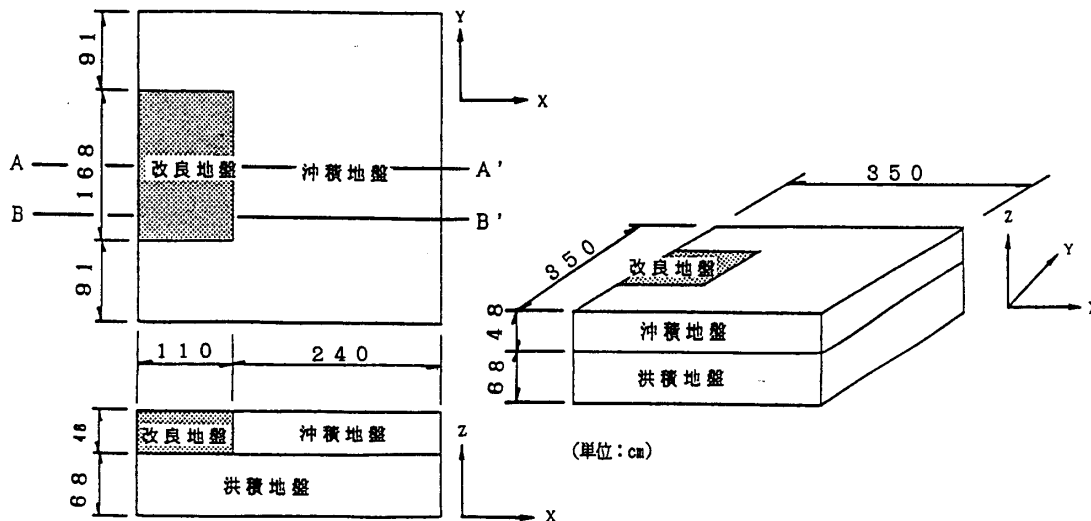


図19 実験模型

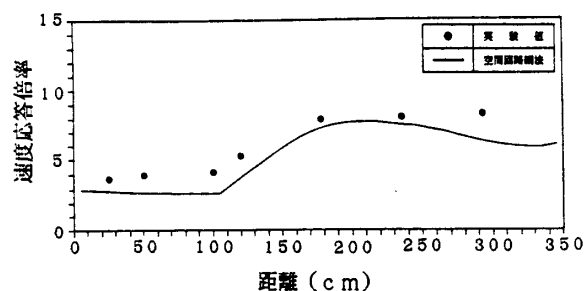


図20 速度応答倍率分布 (A-A'断面)

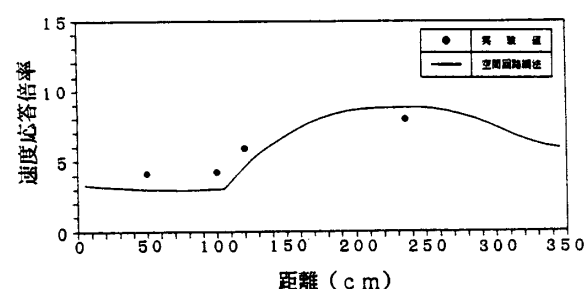


図21 速度応答倍率分布 (B-B'断面)

れ、軟弱な沖積地盤では地盤剛性急変部から離れるにつれて応答が大きくなることがわかる。定量的には解析と実験では若干の差があるものの、地盤剛性急変部における応答倍率の勾配、すなわち地盤のひずみは、ほぼ一致している。

地盤の剛性の不均一に起因して生じるひずみを定量的に評価できることが明らかになった。

約12万節点、離散時間7000という3次元大規模モデルにもかかわらず、スーパーコンピュータを用いた結果、計算時間は約5分という短時間であった。

6. む す び

本論文は、空間回路網法の地震応答解析への適用性について検討をおこなったものである。

まず、始めに Bergeron 法の概要、弾性体の電氣的等価回路表示、Bergeron 法による時間軸上での定式化について述べた。

次に、地盤剛性急変部の地盤を対象として本解析手

法により地震応答解析をおこなった。

2次元解析では有限要素法との比較をおこなったところ、解析結果はほぼ一致した。また、計算時間は、有限要素法に比べ大幅に短縮することができた。

3次元解析では、模型振動実験との比較をおこない、実験での地盤の剛性の不均一さに基づくひずみの集中を良く表現している。

これらのことから空間回路網法による地震応答解析の妥当性および、3次元大規模モデルの解析が容易に実施できることが確認できた。

謝 辞

本研究を行うに際し、ご教示いただいた秋田工業高等専門学校 佐藤雅弘先生、北海道大学工学部 柏達也先生に心から感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 吉田, 深井, 福岡: Bergeron 法による2次元マクスウェル方程式の過渡解析, 電子情報通信学会論文誌 (B), J-62B, 6, 511/518
- 2) 吉田, 深井, 福岡: 電磁界の節点方程式による過渡解析, 電子情報通信学会論文誌 (B), J-63B, 9, 876/883
- 3) 吉田 他: 電磁波問題の基礎解析法, 第5章, 電子通信学会編 (1987)
- 4) 霜田, 吉田, 深井: Bergeron 法による室内音場解析, 電子情報通信学会論文誌 (B), J-72A, 1, 1/11
- 5) 霜田, 吉田, 深井: Bergeron 法による3次元室内音場の過渡応答解析, 日本音響学会誌, 45-4, 263/293
- 6) 霜田, 藤島, 吉田, 深井: Bergeron 法による音場解析, シミュレーション, 9-2, 55/62
- 7) 佐藤, 吉田, 深井: ベルジェロン法による2次元等方弾性体の時間応答解析, 電子情報通信学会論文誌 (A), J-70A, 11, 1515/1523
- 8) 佐藤, 吉田, 深井: 節点方程式による3次元等方弾性体の時間応答解析, 電子情報通信学会論文誌 (A), J-71A, 3, 580/586
- 9) 元山, 三木, 立石, 竹内: 地盤剛性急変部におけるトンネルの模型振動実験, 第20回地震工学研究会, 876/883
- 10) 竹内, 高橋, 元山, 渡辺: 地盤剛性急変部の線状構造物の地震時応力評価法, 土木学会論文集, 第422号/I-14, 323/332
- 11) 関根泰次: 電力系統過渡解析論, オーム社, 7章
- 12) 今野 正: 機械回路とアナロジー, コロナ社