

乗算合同数列の多次元格子構造と数値積分について†

平 川 保 博*

ABSTRACT This paper discusses a method for numerical evaluation of multiple integrals. The idea is to use the set of all lattice points which are generated with the consecutive elements of multiplicative congruential sequences having maximum period length. For some prime modulo p such as $p \equiv 10^s$ ($s=3, \dots, 8$), the sequences are tested and multipliers in the generation procedure are selected, using the spectral test. The effectiveness of the method is demonstrated by the numerical integration of hyperspheres. The practical implementation of the numerical integration method is the same as Monte Carlo Integration, except that the sample points are not random. Therefore, the method described in the present paper is simple to apply and gives good results.

1. はじめに

確率現象を伴う複雑なシステムの特性を解析する問題の多くは多重積分の問題として定式化され、しばしば、数値計算技法が解析に利用される。コンピュータの高速化・大容量化に伴ない、数値計算技法の有用性はますます高まっている¹²⁾。

多変数関数の数値積分において、変数の数が比較的小さいときには、通常、積分領域を正方格子に分割して、各格子点における関数値を評価する計算方法が採られる。変数の数が多いときには、積分領域内の点をランダムに選択し、この選択された点で関数値を評価する、いわゆる、モンテカルロ積分が有効であるといわれている^{2), 4)}。さらには、被積分関数の性質に依存して多次元格子点の選択方法を工夫すれば、より高い数値積分の計算精度を得る可能性が指摘されている^{5), 7), 10), 11)}。

Borosh と Niederreiter [9], 1983] は 2 次元配置における一様分布からのカイ離度を評価尺度とする乗算合同法の乗数の選択を試みている。

モンテカルロ積分では積分領域でランダムな点を選択するために疑似乱数が利用される。良く利用される疑似乱数列の生成法の 1 つに線形合同法がある。線形合同法によって生成される数列の n 項対の全体は n 次

元空間において、Masaglia [1], 1968] が疑似乱数の性質を損なうと指摘した結晶構造を持つことが知られている。そこで、一般には、長い周期を持つ数列の部分列が疑似乱数列として使用される⁸⁾。

素数 p のガロア体 $GF(p)$ 上の t 次の原始規約多項式によって t 次の線形合同式の係数を定めると、その線形合同式により生成される数列はその t 項対の全体が原点を除く $p-1$ 個の点を網羅する最長周期列となることが知られている。著者 [14], 1990] は、この最長周期列の生成する n 次元格子点を用いた n 変数関数の数値積分において、使用する格子点の数と積分精度との関係を解析し、部分格子点よりも全格子点を使用した場合に平均的な意味で積分精度を向上させることを明らかにした。

本研究では、最長周期を持つ線形合同式の中でも、特に、1 次の線形合同式を使用する乗算合同法を対象に、多次元空間での格子点の一樣性を考慮した乗数の選択方法が提案される。そこでは、乗算合同数列の多次元構造がスペクトル・テストを利用して調査され、 n 次元空間の $n-1$ 個の隣接格子点が互いに等距離を持つ配置が一樣性の基準として採用される。そして、素数 $p \equiv 10^s$ ($s=3, \dots, 8$) を法とする乗算合同法の乗数が選択される。さらに、選択された乗数による乗算合同数列の生成する多次元格子点の全数を使用する多変数関数の数値積分法が超球の体積計算および待ち行列システムの過渡状態の解析に適用された場合の効果が示される。

Lattice Structure of Multiplicative Congruential Sequences and Numerical Integration. By Yasuhiro Hirakawa (Faculty of Science and technology, Science University of Tokyo).

*東京理科大学工学部

†1991年1月22日受付, 1991年12月24日再受付

2. 乗算合同法の乗数の選択

2.1 数列の多次元格子構造とスペクトル・テスト

法 p を素数, そして乗数 λ を $\text{mod } p$ における原始根とする乗算合同法

$$u_j = \lambda \cdot u_{j-1} \text{ mod } p \quad (1)$$

の生成する乗算合同数列 $\{u_j\}$ は最長周期 $\tau = p-1$ をもつ. この数列 $\{u_j\}$ は変数変換

$$x_j = (u_j - 0.5) / \tau, j=1, \dots, \tau \quad (2)$$

により, 区間 $(0, 1)$ の数列 $\{x_j\}$ に基準化される.

さらに, この数列 $\{x_j\}$ の n 項対

$$x_j = (x_j, \dots, x_{j+n-1}), j=1, \dots, \tau \quad (3)$$

により, n 次元空間 $(0, 1)^n$ 内の τ 個の点列 $\{x_j\}$ が生成される. この τ 個の n 次元点の全体 $\{x_j\}$ は平行な $n-1$ 次元の超平面の族で被覆され, 格子点と呼ばれている⁶⁾.

図1は法 $p=1009$, そして乗数 $\lambda=11$ の乗算合同法により生成された数列の2項対の配置を示したものである.

最長周期をもつ法 p の乗算合同式(1)のすべての乗数は任意の1つの乗数 λ を用いて次式の関係から容易に求められる³⁾.

$$a = \lambda^k \text{ mod } p, \text{gcd}(\tau, k) = 1, k < \tau. \quad (4)$$

法 p に対する最長周期列を与える乗数の数と1つの乗数 λ を表1に示す¹⁴⁾. 乗数 $\lambda^k \text{ mod } p$ に対し, 乗数 $\lambda^{p-k} \text{ mod } p$ は逆順序の数列を生成し, この2つの乗数は同じ多次元の配置を構成する.

多次元数値積分の計算精度には多次元に配置される点列の一樣性が大きな影響を与えと考えられ, 一樣性を調べる各種の方法が知られている^{6), 13), 15)}.

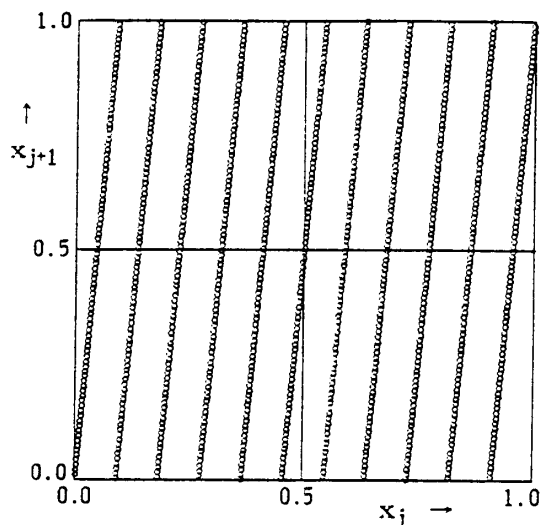


図1 乗算合同数列 ($p=1009, \lambda=11$) の2次元構造

表1 最長周期列を与える乗数の1つと乗数の数

法 p	乗数 λ	乗数の数
1009	11	288
10007	5	5002
100003	2	28560
1000003	2	333332
10000019	6	4218984
100000007	5	49897680

乗算合同数列の n 項対が生成するすべての n 次元格子点を覆う平行な $n-1$ 次元超平面の族の中で, 隣接する超平面間の最大距離 d_n (以後, スペクトル距離と呼ぶ) を評価する方法としてスペクトル・テストがある⁶⁾.

Marsaglia¹⁾はこの平行な超平面の最小数を評価尺度として使用しているが, Kunuth⁶⁾が指摘しているように, この数は座標軸に対する超平面の傾きに依存し, 一樣性の適切な尺度とは考えられない. また, Niederreiter⁵⁾は座標軸に平行な長方形内の点の理論数と観測数の“相違”を評価尺度とする方法を提案し, 2次元における示性数と連分数との関係を利用して乗算合同数列の乗数を選択している⁹⁾. しかし, この尺度もまた座標軸の回転により変化し, 回転に不変なスペクトル・テストほど良い一樣性の尺度とは考えられない^{6), 13)}.

本研究では乗算合同法の乗数の選択にスペクトル・テストを利用する. スペクトル距離 d_n は次のようにして求められる.

法 p , 乗数 λ の乗算合同数列が生成する n 次元格子点は, 集合 L

$$L = \{v = Xz \in R^n : z \in Z^n\} \quad (5)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \lambda & \\ \vdots & \\ \lambda^{n-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \cdot I_{n-1} \end{bmatrix}$$

を考えると, $v \in [0, p]^n$ を満たす L の部分集合として定義される. ここに, Z^n は n 次元整数の全体そして I_{n-1} は $n-1$ 次の単位行列を表す.

集合 L のすべての要素を覆う平行な $n-1$ 次元超平面の族の1つはこの超平面に垂直で適当な大きさの非零 n 次元ベクトル r を用いて

$$\{x \in R^n : x' r = m\}, m \in Z^1$$

と定義でき, 隣接超平面間の距離は

$$1/\|r\|$$

である.

この n 次元ベクトル r は次の条件①, ②を満たす:

- ① 任意の整数値 $m \in \mathbb{Z}^1$ に対し, $v'r = m$ を満たすベクトル $v \in L$ が存在する. 且つ
- ② 任意のベクトル $v \in L$ に対し, $v'r$ は整数値を取る.

条件②より, ベクトル r は $z'X'r \in \mathbb{Z}^1$ を満たし, r のすべての要素は p^{-1} の整数倍である. 逆に $X'r = y$, $y \in \mathbb{Z}^n$ が成り立てば条件②を満たす.

いま, $\|X'r\|^2$ を条件

$$X'r = y, y \in \mathbb{Z}^n, y \neq 0$$

の下で最小にするベクトル r を r^* と表せば $z'X'r^* = 1$ を満たす $z \in \mathbb{Z}^n$ が存在し, r^* は条件①を満たす. 従って, 超平面間の距離の最大値 d_n は

$$d_n = \frac{1}{\min_{\substack{y \in \mathbb{Z}^n \\ y \neq 0}} \|(X')^{-1}y\|} \quad (6)$$

$$(X')^{-1} = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} p & -\lambda & \cdots & -\lambda^{n-1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

で定義される.

(6) 式の計算は次式を最小にする非零・整数ベクトル $(y_1, y_2, \dots, y_n)'$ を求める問題に帰着する.

$$\|(X')^{-1}y\|^2 = (py_1 - a_2y_2 - \cdots - a_ny_n)^2 + \sum_{j=2}^n y_j^2 \quad (7)$$

ここに, $a_j = \lambda^{j-1} \bmod p$ である.

$n=2$ の場合, (7) 式は

$$\|(X')^{-1}y\|^2 = (py_1 - a_2y_2)^2 + y_2^2$$

と表され, 分数 λ/p に対する分数 y_1/y_2 の近似精度が向上すれば上式の右辺の第 1 項の値は減少する. p/λ の連分数展開を利用すれば, この近似精度が向上する順番に分数 y_1/y_2 が求められる. 従って, $n=2$ での (6) 式の計算は迅速, 且つ容易である. $n \geq 3$ では整数値ベクトル $(\pm y_2, \dots, \pm y_{n-1}, y_n)$ において (7) 式の値を評価する必要がある. 但し, 整数値ベクトルの各要素の値の上限が d_{n-1} によって制限される.

2.2 等距離格子構造とスペクトル距離

スペクトル距離 d_n は次元 n に依存してその値が大きく異なり, そのまま乗算合同数列の選択基準とするには不都合である. スペクトル距離 d_n に対しては理論的下限 d_n^* が知られており⁶⁾, この下限をスペクトル距離で割って次元間の差異を調整する評価基準が提案されている^{13), 15)}. しかし, この評価基準は次元 n が大きくなるにつれて減少する傾向をもち次元間の基

準化としては適切でない. これに対し, 以下に示す等距離格子構造がスペクトル距離を次元間で調整する比較的良い基準となることが経験的に明らかにされる.

n 次元空間 R^n で隣接する $n+1$ 個の点が互いに等距離 h_1 をもつ多次元格子点を考える. この格子点は次式で定義できる.

$$\{Hy \in R^n : y \in \mathbb{Z}^n\} \quad (8)$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_1/2 & \cdots & h_1/2 \\ 0 & h_2 & \cdots & h_2/3 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & h_{n-1}/(n-1) \\ 0 & \cdots & 0 & h_n \end{bmatrix}$$

ここに

$$h_i = \prod_{j=2}^i (j^2 - 1)^{1/2} / j.$$

この格子点で n 次元空間 $(0, P)^n$ に τ 個が配置されるように h_1 の値を定めると, τ 個の点を覆う平行な隣接超平面間の距離は

$$h_n = \frac{\tau \prod_{j=2}^n (j^2 - 1)^{1/2} / j}{\left\{ \tau \prod_{j=2}^n \prod_{i=2}^j (i^2 - 1)^{1/2} / i \right\}^{1/n}} \quad (9)$$

と表される.

この h_n はスペクトル距離の下限 d_n^* と $n=2$ では一致し, その配置は正三角形を基本として構成される. $n \geq 3$ では $h_n \leq d_n^*$ の関係をもち, その差は次元 n が大きくなるに従い増大する. この h_n を用いて n 次元のスペクトル距離 d_n を

$$s_n = d_n / h_n \quad (10)$$

と基準化する.

図 2 は 10,000 個の乗数に対する基準化されたスペクトル距離の逆数 $1/s_n$, $n=2, \dots, 6$ の度数分布を示したものである. 図 2 より, スペクトル距離が次元間で比較的良好に基準化されていることがわかる.

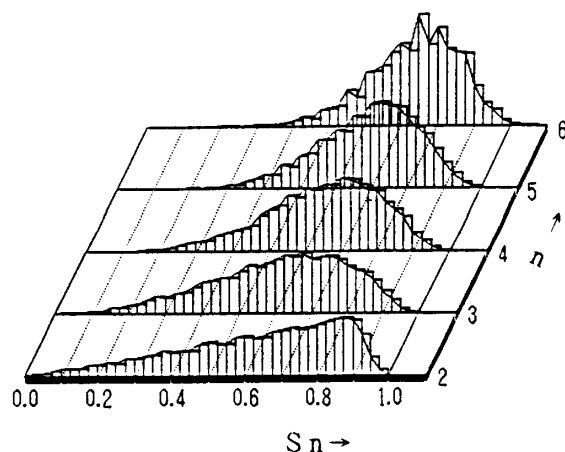
本研究では基準化されたスペクトル距離 s_n , $n=2, \dots, n$ に限界値 c を与えて次式で定義される乗数の選択規則を提案する.

$$s_i < c, (i=2, \dots, n) \quad (11)$$

2.3 スペクトル距離と数値積分精度

乗算合同数列が生成する n 次元格子点のスペクトル距離 d_n と数値積分精度との関係を明らかにするため, ここでは, n 次元超球

$$B = \{x \in R^n : \|x\|^2 \leq 1\} \quad (12)$$

図2 基準化されたスペクトル距離 S_n の度数分布

の体積計算を取り上げる。すなわち、 n 変数関数を

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (13)$$

とし、領域 $(-1, 1)^n$ での数値積分を考える。 n 次元超球 B の体積 V_n は次式で定義される。

$$V_n = \int_{R^n} f(x) dx = \frac{2\pi}{n} V_{n-2} \quad (14)$$

ここに、 $V_1=2$, $V_2=\pi$ である。

超球 B の原点に対する対称性から、ここでは積分領域 $(0, 1)^n$ で得られる積分値を 2^n 倍する計算方法を用いる。

本研究で使用する数値積分法は乗算合同数列の n 項対として生成される n 次元空間 $(0, 1)^n$ の τ 個の全格子点 $\{x_j\}$ で関数値を評価する方法である。

(13) 式の被積分関数の構造から、数値積分は領域 B に属する ($\|x_j\|^2 \leq 1$ を満たす) 格子点の数 m を求めることに簡略化され、 $(m/\tau) \times 2^n$ が超球の体積の計算値となる。この数値積分の計算精度を理論値 V_n からの計算値の標準偏差 (以後積分精度と吸ぶ) で定義する。

図3は法 $p=1000003$ の10000個の乗数について、次元 $n=2, 3, 4$ におけるスペクトル距離と積分精度の関係を示したものである。これより、同じスペクトル距離をもつ格子点でも乗数が異なれば積分精度が大きく変化することがわかる。これは、スペクトル距離が同じでも被積分関数あるいは格子点の配置が異なれば積分精度が異なることを示す。しかしながら、 $n=2$ の場合、スペクトル距離と積分精度の下限との間に直線①の関係が見られる。従って、スペクトル距離が小さい乗数において悪い積分精度が制限される。これに対し、 $n=3, 4$ の場合、このような関係は認められない。

判定規則(11)の限界値を $c=1.3$ とし、図3の乗数を2次元のスペクトル距離によって選別した結果を図4に示す。また、図5は $c=1.3$ で、 $n=2 \sim 6$ のスペクトル距離によって順番に乗数を選別したものである。このように、下位の次元のスペクトル距離をすべて考慮して乗数を選択することにより、悪い積分精度を与える乗数が除去されていることがわかる。すなわち、低次元のスペクトル距離は高次元の積分精度にも影響を与えている。

2.4 スペクトル距離による乗数の選択

表1に示す法 p の乗算合同法によるすべての最長周期列に対して次元 $n=2 \sim 15$ のスペクトル距離による(11)式の判定規則を適用し、各々、10個の乗数を選択

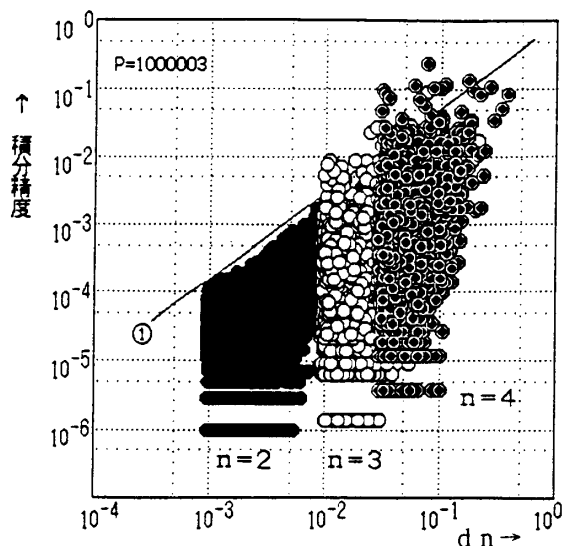
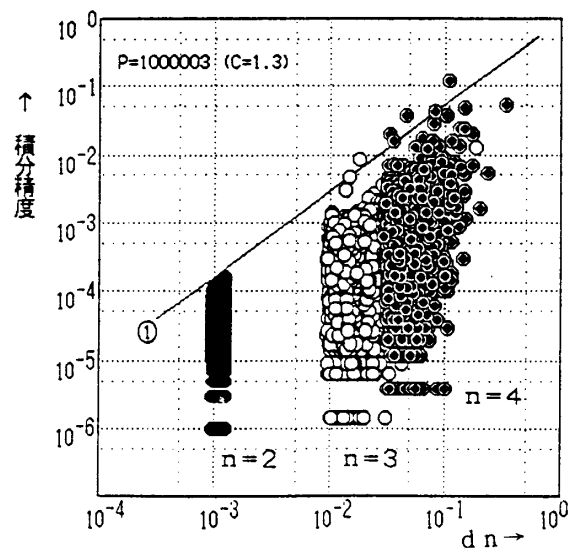


図3 スペクトル距離と積分精度の関係 (選別前)

図4 スペクトル距離と積分精度 (選別 $n=2$)

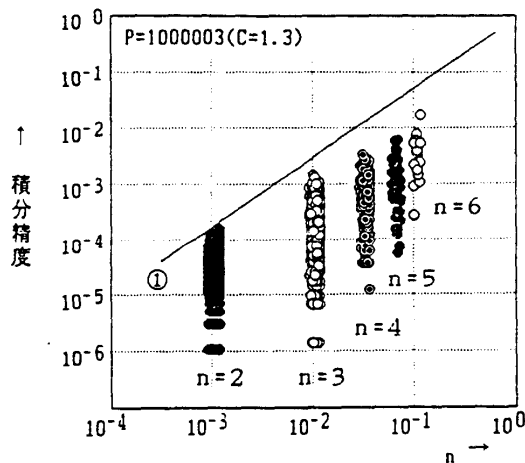


図5 スペクトル距離と積分精度 (選別 n=2~6)

した。

表2は選択に使用した(11)式の限界値 c と次元数 n の範囲に対する選択乗数の数との関係を示したものである。次元 n および法 p の値が小さいほどスペクトル距離による乗数の選別効果は減少している。

選択された乗数を表3に示す。

3. 計算回数と数値積分の計算精度

モンテカルロ法の理論では標本点の数(計算回数) N に対し、計算精度(標準偏差)はその平方根に逆比例する。すなわち、 N 個の標本点 $X_1, \dots, X_N$ が互いに独立に $[0, 1]^n$ 上の一様分布に従うと仮定すると、 n 次元超球の体積 V_n の推定量は

表2 限界値 c および次元 n と選択乗数の数

p	c	$n=2 \sim 5$	$2 \sim 7$	$2 \sim 10$	$2 \sim 15$
1009	1.6000	11	10	10	10
10007	1.3500	25	12	11	10
100003	1.2800	63	15	10	10
1000003	1.2405	281	27	12	10
10000019	1.1980	829	53	10	10
100000007	1.1690	3039	106	13	10

表3 スペクトル・テストにより選択された乗数

p	1009	10007	100003	1000003	10000019	100000007
選択乗数	26	575	2723	82797	1571389	11339595
	33	2236	23176	117342	1662686	24090980
	38	3012	24583	238380	3565717	24454641
	76	3052	24911	326555	4217045	31824637
	89	4530	33281	399781	6209246	39992017
λ	195	6025	35154	507530	6596482	40948801
	318	6396	41375	723566	6757603	48853998
	747	7019	54790	742547	7556805	57931609
	751	8111	72362	850228	8647785	79279375
	816	9898	75072	969057	9755665	81024067

$$\bar{V}_n(N) = 2^n \sum_{k=1}^N f(X_k) / N \quad (15)$$

で定義される。この推定量の平均値と分散は次式で与えられる。

$$E[\bar{V}_n(N)] = V_n$$

$$V[\bar{V}_n(N)] = V_n(2^n - V_n) / N. \quad (16)$$

スペクトル・テストは乗算合同数列の擬似乱数としての特性を調べる方法として提唱されたものである。従って、表3の選択乗数は擬似乱数列の生成においても有効であると考えられる。すなわち、部分格子点を使用したモンテカルロ積分ではモンテカルロ法の理論に準ずる結果が期待される。

表3に示した10個の乗数による乗算合同数列の n 項対が生成する n 次元格子点列の部分および全体を使用した場合の積分精度について解析する。但し、部分においては $p=100000007$ の n 次元格子点列を10個毎に選択した部分格子点を使用しており、いわゆる、モンテカルロ積分に相当する。

図6は部分格子点を使用したモンテカルロ積分と全格子点を使用した数値積分における計算回数と積分精度との関係を $n=2, 6, 10$ について両側対数表示で示している。ここに、積分精度は理論値 V_n からの10個の乗数による積分値の標準偏差である。図中の点線は部分格子点、そして実線は全格子点を使用した場合の計算回数と積分精度の関係を対数軸で直線近似したものである。

図6における直線の切片と傾きを表4に示す。

図6あるいは表4より、部分格子点を使用するモンテカルロ積分では積分精度が計算回数 N の平方根の

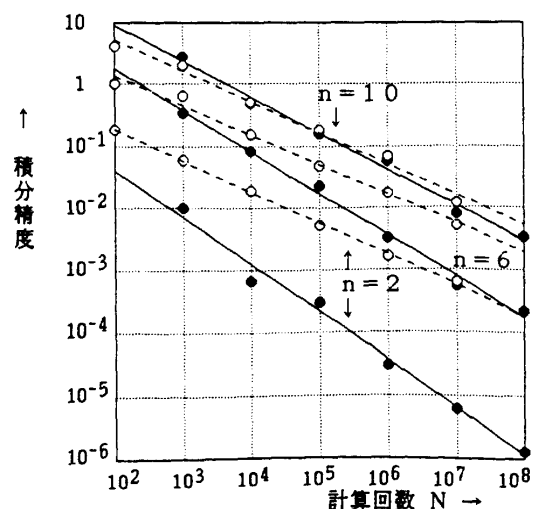


図6 計算回数と数値積分の計算精度 (部分と全体)

表4 計算回数と積分精度の関係(切片と傾き)

使用数列	次元 n	切片	傾き
全	2	0.12	-0.76
	6	1.60	-0.67
体	10	2.12	-0.58
	2	0.28	-0.50
部	6	1.08	-0.48
	10	1.72	-0.50
分			

逆数(対数表示で, -0.5)に近い値を示している。これに対し, 全格子点を使用した整値積分では直線の傾きは -0.5 よりもかなり大きな値を示している。この傾きは次元数 n が増加するにつれて減少するが, わずかの差でも, 計算回数が多くなれば, 部分と全体における積分精度の差は増大する。

以上のことから, 計算回数 N が増加するに従い, 選択乗数を用いて生成される全格子点を使用する数値積分法の有効性が増すことがわかる。

4. 系内待ち時間の過渡分布の解析

$M(\lambda)/M(\mu)/1$ 待ち行列システムにおける系内待ち時間分布の過渡分布の解析に部分格子点を使用するモンテカルロ積分と全格子点を使用する数値積分を適用する。

n 番目の客の系内待ち時間 W_n は W_0 を所与として, $1 \sim n$ 番目の客の到着時間間隔 A_j とサービス時間 S_j ($j=1, \dots, n$) から, 漸化式

$$W_n = \max \{W_{n-1} - A_n, 0\} + S_n \quad (17)$$

で定まる。この n 番目の客の系内待ち時間分布の計算は(17)式の制約条件下での n 個の到着時間間隔分布と n 個のサービス時間分布の畳み込みとして定式化される。

$M/M/1$ 待ち行列システムではこの畳み込み計算を漸化的に実施でき, 比較的容易に数式解が求まる。初期状態を $W_0=0$ とすれば, n 番目の客の系内待ち時間の分布関数 $F_n(w)$ は次式で表される。

$$F_n(w) = 1 - e^{-\mu w} \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu w)^i \cdot (A^i / i!) \sum_{j=1}^{n-i} y_{i,j}(n) C^{j-1} \right], \quad n \geq 2 \quad (18)$$

ここに, $\rho = \lambda / \mu$ で

$$A = \frac{\rho}{1+\rho}, \quad C = \frac{\rho}{(1+\rho)^2}$$

$$y_{i,1}(n) = 1, \quad i=1, \dots, n-1$$

$$y_{1,j}(n) = y_{2,j-1}(n), \quad j=2, \dots, n-1$$

$$y_{i,j}(n) = y_{i-1,j}(n) + y_{i+1,j-1}(n),$$

$$i=2, \dots, n-j;$$

$$j=2, \dots, n-1.$$

確率分布の仮定によってはこのような数式解を得ることは困難であり, 数値計算を利用することになる。

n 番目の客の系内待ち時間分布は $2n$ 個の変数の多重積分により定義される。そこで, 乗算合同数列から生成される τ 個の $2n$ 次元点列 $\{X_k\}$ を考える。 n 次元点 X_k の n 個の要素 $x_k, \dots, x_{k+n-1}$ は次式により, 指数分布に従う到着時間間隔 a とサービス時間 s に変換される。

$$\begin{aligned} a_j &= -\log(x_{k+2j-2})/\lambda, \\ s_j &= -\log(x_{k+2j-1})/\mu, \quad j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (19)$$

τ 個の $2n$ 次元点 $\{X_k\}$ の各々に対し, n 番目の客の系内待ち時間 $\{w_n^{(k)}\}$ を計算し, この度数分布を n 番目の客の系内待ち時間分布の計算値とする。

系内待ち時間分布の計算精度を(18)式の分布関数 F_n と相対累積度数 G_n との差異

$$d_n = \text{Max} |F_n - G_n| \quad (20)$$

によって評価する。

図7は表3の10個の乗数に対する計算精度の最大値(最も悪い値) Δn と客の到着順位 n との関係を $\rho=0.2, 0.8$ について示す。ここに, 実線は全格子点 $N=p-1$ 個 ($p \doteq 10^7$), 点線は部分格子点 $N=10^7$ 個 ($p \doteq 10^8$) を使用した場合を表す。

$\rho=0.2$ の場合, n の値によらず全格子点を使用したときに計算精度が高い。これは ρ の値が小さいとき, 少ない n の値で待ち時間分布が定常分布に収束するからである。 $\rho=0.8$ の場合, 小さな n の値 ($n < 10$) では全格子点, 大きな n の値では部分格子点が高い計

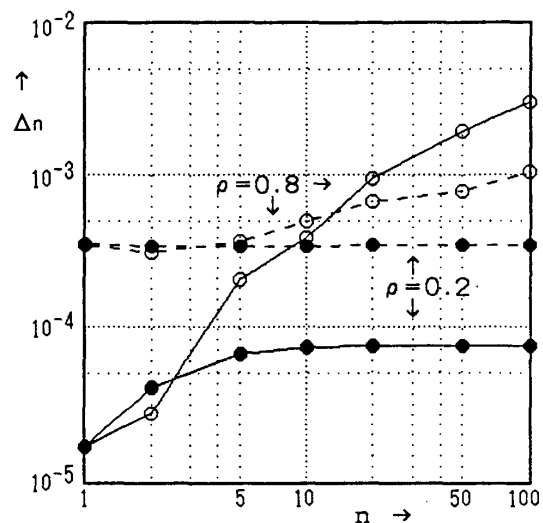


図7 客の到着順位と系内待ち時間の過渡分布の計算精度(部分と全体)

算精度を持つ。

5. おわりに

本研究では擬似乱数の生成法の1つである乗算合同法により生成される数列のもつ多次元の格子構造に着目し、隣接格子点が互いに等距離を持つ配置を基準とした乗数の選択方法を提案し、以下に示す成果が得られた。

- (1) 法 $p=1009, 10007, 100003, 1000003, 10000019, 100000007$ において最長周期 $p-1$ をもつ乗算合同数列に対し、 $n=2\sim 15$ 次元のスペクトル距離を調査し、提案する選択方法を用いて、各々、10個の乗数が選択された。
- (2) 選択乗数を用いて生成される $p-1$ 個の n 次元格子点のすべてにおいて関数値を評価する多重数値積分法は超球積分および待ち行列システムの過渡解析においてモンテカルロ積分法よりも高い計算精度を得る場合が明らかにされた。
- (3) 積分精度の確認は複数の乗数による積分計算の反復を行なうことによって可能である。

選択乗数による乗算合同数列の n 項対として生成される n 次元格子点をすべて使用する数値積分法は、確率現象に伴ない次元数が確定しないシステム解析の問題にも適用可能であると考えられる。しかし、その適用範囲あるいは適用方法は今後の課題である。

参考文献

- 1) G. Marsaglia: Random numbers fall mainly in the planes,

- Proc. N. A. S., 61, 25/28 (1968)
- 2) 竹内 啓: モンテカルロシミュレーションの統計的方法, 経営科学, 17, 75/87 (1973)
- 3) 高橋磐郎: 組合せ理論とその応用, 岩波書店 (1976)
- 4) 津田孝夫: モンテカルロ法とシミュレーション, 培風館 (1977)
- 5) H. Niederreiter: Quasi-Monte Carlo methods and pseudo-random numvers, Bull. Amer. Math. Soc. 84, 957/1041 (1978)
- 6) D. E. Knuth: The Art of Computer Programming 2, 2nd ed., Addison-Wesley (1981)
- 7) L. K. Hua and Y. Wang: Application of Number Theory to Numerical Analysis, Springer-Beijing (1981)
- 8) 伏見正則, 手塚 集: 多次元分布が一様な擬似乱数列の生成法, 応用統計学会, 10-3, 151/163 (1982)
- 9) I. Borosh and H. Niederreiter: Optimal multipliers for pseudo-random number generation by the linear congruential method, BIT, 23, 65/74 (1983)
- 10) 杉原正顕: 数論的数値積分法, 数理科学, 21-4, 31/37 (1983)
- 11) H. Niederreiter: Quasi-Monte Carlo Methods for Multi-dimensional Numerical Integration, in Numerical Integration III (Brass, H. and Hammerlin, G., ed.), Birkhäuser Verlag, 157/171 (1988)
- 12) 村田, 小国, 三好, 小柳: 工学における数値シミュレーション, 丸善 (1988)
- 13) P. L'Ecuyer: Efficient and Portable Combined Random Number Generator, Comm. ACM, 31, 742/749, 774 (1988)
- 14) 平川保博: 線形合同擬似乱数列とモンテカルロ積分, シミュレーション, 9-2, 50/54, (1990)
- 15) P. L'Ecuyer: Random Numbers for Simulation, Comm. ACM, 33, 86/97 (1990)