

辺要素を用いた 3 次元非線形静磁場解析†

金 山 寛*・池 口 修 一*
松 木 直 美*・遠 藤 研 二**・菊 地 文 雄***

ABSTRACT Since the fifth author has proposed some new mixed formulations for finite element analysis of magnetostatic and electrostatic problems, we have been demonstrating effectiveness of the approach for three-dimensional linear magnetostatic analysis. The magnetic field and the Lagrange multiplier are adopted as the fundamental unknown functions (H-method). The simplest edge (Nedelec) elements of simplex type and conventional piecewise-linear tetrahedral elements are employed for finite element approximations of the magnetic field and the Lagrange multiplier, respectively. In this work, we try to extend the H-method to nonlinear analysis, incorporating with B-H curves. Results of the three-dimensional analysis well agree with those of the axis-symmetric analysis. As a practical example, the stator core end region of 600 MW two pole turbine generator, previously studied as a linear problem, is now solved as a nonlinear problem. Finally, Problem 13 of TEAM Workshop is solved to show the validity of the approach.

1. はじめに

著者らはこれまで磁場 H を未知関数とし、4 面体の最も単純な辺要素 (Nedelec 要素などとも呼ばれている) を用いて 3 次元の線形静磁場計算を行い、この方法の有用性を論じてきた⁸⁾。それらはすべて第 5 著者の労作^{9),10)}をベースにしており、最近までの成果は文献 3) にまとめられている。そこでは静磁場問題を制約条件付きの最適化問題としてとらえ (その結果必然的に Lagrange の未定乗数が表われる)、磁場 H は上述の辺要素を用いて近似し、Lagrange の未定乗数は通常の 4 面体 1 次要素を用いて近似する混合法的定式化とその有限要素法近似を採用することにより、元の連続問題の数理的構造を離散化された近似問題に引きつぐことに成功している。

本稿では本手法を実用上重要な B - H 特性を考慮した非線形解析に拡張することを試みる。軸対称問題について軸対称計算と 3 次元計算を比較した結果^{2),7)},

良好な一致が見られる。さらに、実際の応用例として、先に線形問題として扱った 600 MW 級 2 極タービン発電機の固定子鉄心端部の解析⁸⁾に応用した場合と Testing Electromagnetic Analysis Methods (TEAM) ワークショップ Problem 13^{4),11)}に適用した場合の 2 例について、良好な結果を得た¹⁾ので報告する。連立非線形方程式の解法は主に *Picard* の逐次近似法、連立 1 次方程式の解法は *Hood*⁶⁾ のウェーブフロント法による。用いた計算機は FACOM VP-50E であり、自動ベクトル化を行っている。ここに取りあげた解析例は 3 次元の非線形解析であるため、FACOM VP-50E の CPU を数時間も使う大型計算の典型例にもなっている。

2. 3 次元静磁場の基礎方程式と境界条件並びにその弱形式

次の 3 次元静磁場の境界値問題 $[F0]$ を考える。

$$[F0] \begin{cases} \text{rot } H = J \text{ in } \Omega & (1) \\ \text{div } B = 0 \text{ in } \Omega & (2) \\ B \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma_1 & (3) \\ H \times n = 0 \text{ on } \Gamma_2 & (4) \end{cases}$$

ここに、 H は未知の磁場 (A/m), J は電流密度 (A/m²), $B = B(H, x) = \mu(H, x) H$ は磁束密度 (T=Wb/m²), μ は透磁率 (Wb/(A·m)) を表す 3×3 の行列であり、一般に B - H 特性による非線形性を持つ。成分表示を $H = (H_1, H_2, H_3)$ と書くとき、 $\text{div } H = \partial H_1 / \partial x_1$

Three-dimensional nonlinear magnetostatic analysis using edge elements. By Hiroshi Kanayama, Shuuichi Ikeguchi and Naomi Matsuki (FUJIFACOM Corporation), Kenji Endo (Fuji Electric Co., Ltd.), Fumio Kikuchi (The University of Tokyo).

*富士ファコム制御㈱

**富士電機㈱

***東京大学

†1992年4月30日受付 1992年6月30日再受付

$+\partial H_2/\partial x_2+\partial H_3/\partial x_3$, $\text{rot } H=(\partial H_3/\partial x_2-\partial H_2/\partial x_3, \partial H_1/\partial x_3-\partial H_3/\partial x_1, \partial H_2/\partial x_1-\partial H_1/\partial x_2)$ であり, $x=(x_1, x_2, x_3)$ は位置ベクトルを表す. 考える領域 Ω は多面体領域とし, Ω の境界 Γ は Γ_1 と Γ_2 で構成され ($\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$), それぞれ (3), (4) の境界条件が課せられる. n は領域 Ω の境界 Γ における外向き単位法線ベクトルを表し, $\cdot$ は通常のベクトル内積 ($\times$ はベクトル外積) を表す.

Lagrange の未定乗数 p を導入して, [F0] の弱形式を書く.

$$[F1] \begin{cases} (\text{rot } H, \text{rot } H^*) + \left(\text{grad } p, \frac{\partial B}{\partial H} H^* \right) \\ = (J, \text{rot } H^*) & (5) \\ (B, \text{grad } p^*) = 0 & (6) \end{cases}$$

ここに, $(\cdot, \cdot)$ は Ω 上の実 2 乗可積分空間 $L^2(\Omega)^3$ の内積を表し, $\text{grad } p$ は p の勾配ベクトルを表す.

$\partial B/\partial H$ は $\partial B_i/\partial H_j$ の H における値を ij 成分とする 3×3 の行列を表す. H は境界条件 (3), (4) を満たし, H^* は H に対する任意の試験関数であり境界条件 (4) を満たす (Γ_2 上で $H^* \times n = 0$ を満たすことを以後このように言うことにする). Lagrange 乗数 p は境界 Γ_2 上で 0 とし, p^* は p に対する同じクラスに属する任意の試験関数である. 弱形式 [F1] において, (4) 式は本質的な境界条件であり, (2) 式は制約条件として自然境界条件 (3) 式とともに考慮され, $1/2(\text{rot } H - J, \text{rot } H - J) + (\text{grad } p, B)$ を停留化させていることを注意しておく. また $\partial B/\partial H$ が正定値対称行列であれば, (5) 式において $H^* = \text{grad } p$ と置くことにより, p が恒等的に 0 であることがわかる.

3. Nedgelec の 4 面体 1 次要素^{12),13)}

最も単純な辺要素である Nedgelec の 4 面体 1 次要素では, 要素内で H の有限要素法近似 H_h の各成分は以下のように書ける^{3),10)}.

$$\begin{cases} H_{1h} = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 & (7) \\ H_{2h} = \alpha_4 - \alpha_2 x_1 + \alpha_5 x_3 & (8) \\ H_{3h} = \alpha_6 - \alpha_3 x_1 - \alpha_5 x_2 & (9) \end{cases}$$

ここに $\alpha_1 \sim \alpha_6$ は要素内の自由度 (係数) を表す. 要素上で $\text{div } H_h = 0$, $\text{rot } H_h = (-2\alpha_5, 2\alpha_3, -2\alpha_2)$ が成立することはすぐわかる. さらに H_h の接平面成分が要素間では連続で, 各辺上では辺方向成分が定数になっている. そのことを見るためには以下の要素内の基底関数表現が有用である³⁾. 図 1 の 4 面体要素 $p_i p_j p_k p_l$ の一辺 $p_i p_j$ に着目する. 頂点 p_i に関する重心座標を $\lambda_i(x)$ と書くと, Nedgelec 要素の辺 $p_i p_j$ に関する要素

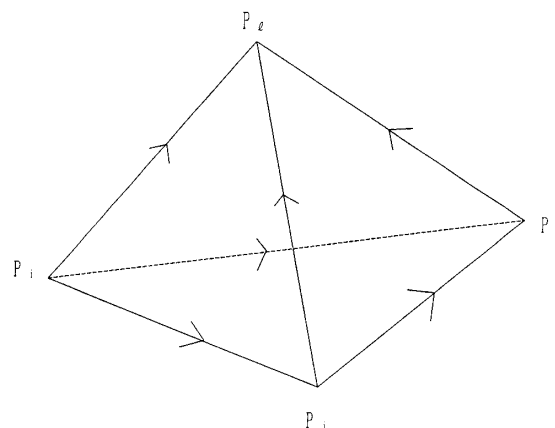


図 1 Nedgelec の 4 面体 1 次要素

内の基底関数 w_{ij} は次式で与えられる.

$$w_{ij} = l_{ij}(\lambda_i \text{grad } \lambda_j - \lambda_j \text{grad } \lambda_i) \quad (10)$$

ここに l_{ij} は辺 $p_i p_j$ の長さを表す. この基底関数を用いれば H_h の要素内の表現として

$$H_h = \sum_{ij} H_{ij} w_{ij} \quad (11)$$

が得られる. ここに H_{ij} は適当に向きをつけられた辺 $p_i p_j$ における H_h の辺方向成分を表し, 総和は要素内の各辺にわたってとられる. 実際, w_{ij} は, 面 $p_j p_l p_k$ 上では, $\lambda_i = 0$ で, $\text{grad } \lambda_i$ は面 $p_j p_l p_k$ に垂直なベクトルであるから, 接平面成分を持たない. 同様に面 $p_i p_k p_l$ 上では, $\lambda_j = 0$ で, $\text{grad } \lambda_j$ は面 $p_i p_k p_l$ に垂直なベクトルであるから, やはり接平面成分を持たない. さらに辺 $p_i p_j$ 上では, $(\lambda_i \text{grad } \lambda_j - \lambda_j \text{grad } \lambda_i) \cdot \vec{p_i p_j} = 1$ が成立する. ここに $\vec{p_i p_j}$ は頂点 p_i から頂点 p_j に向かうベクトルを表す. 上式の導出には $\text{grad } \lambda_j$ の大きさが頂点 p_j から面 $p_i p_k p_l$ に降ろした垂線の長さの逆数になっていることに注意すればよい. 最後に, w_{ij} さらには H_h の成分表示が (7) ~ (9) の形で書けることは比較的容易にわかることを注意しておく.

4. 静磁場問題に対する有限要素法近似

[F1] に対する有限要素法近似 [F1_h] は, H に対しては前章で説明した Nedgelec 要素を用い, p に対しては通常の 4 面体 1 次要素を用いて近似することにより, 以下のように書ける.

$$[F1_h] \begin{cases} (\text{rot } H_h, \text{rot } H_h^*) + \left(\text{grad } p_h, \frac{\partial B_h}{\partial H_h} H_h^* \right) \\ = (J, \text{rot } H_h^*) & (12) \\ (B_h, \text{grad } p_h^*) = 0 & (13) \end{cases}$$

ここに H_h は H に対する有限要素法近似で境界条件 (3), (4) を満たし, H_h^* は H_h に対する任意の試験関数で

境界条件(4)を満たす. また p_h は p に対する有限要素法近似で境界 Γ_2 上で0であり, p_h^* は p_h に対する同じクラスに属する任意の試験関数である. 最後に, $B_h = B(H_h, x) = \mu(H_h, x)H_h$ を注意しておく.

5. 連立非線形方程式の解法

以下では連立非線形方程式 $[F1_h]$ を Picard の逐次近似法 $[F2_h]$ と Newton 法 $[F3_h]$ の2つの解法をベースに解くことを考える.

Picard の逐次近似法

$$[F2_h] \begin{cases} (\text{rot } H_h^{n+1}, \text{rot } H_h^*) + \left(\text{grad } p_h^{n+1}, \left(\frac{\partial B_h}{\partial H_h} \right)^n H_h^* \right) = (J, \text{rot } H_h^*) & (14) \\ (\mu(H_h^n, x) H_h^{n+1}, \text{grad } p_h^*) = 0 & (15) \end{cases}$$

ここに H_h^{n+1} , p_h^{n+1} は H_h , p_h に対する第 $(n+1)$ 近似であり, $(\partial B_h / \partial H_h)^n$ は $\partial B_h / \partial H_h$ の H_h^n における値を表す. 連立1次方程式 $[F2_h]$ を解くために, 非対称行列用のソルバー⁶⁾が必要であることを注意しておく.

Newton 法

$$[F3_h] \begin{cases} (\text{rot } (H_h^{n+1} - H_h^n), \text{rot } H_h^*) + \left(\text{grad } (p_h^{n+1} - p_h^n), \left(\frac{\partial B_h}{\partial H_h} \right)^n H_h^* \right) = (J, \text{rot } H_h^*) - (\text{rot } H_h^n, \text{rot } H_h^*) - \left(\text{grad } p_h^n, \left(\frac{\partial B_h}{\partial H_h} \right)^n H_h^* \right) & (16) \\ \left(\left(\frac{\partial B_h}{\partial H_h} \right)^n (H_h^{n+1} - H_h^n), \text{grad } p_h^* \right) = -(B_h^n, \text{grad } p_h^*) & (17) \end{cases}$$

ここに, $B_h^n = B(H_h^n, x) = \mu(H_h^n, x)H_h^n$ である.

6. 数値例

以下の3例において, 透磁率 μ は等しい対角成分をもつ対角行列とする. 空気とコイルの部分での対角成分は $1.257 \times 10^{-6} (\text{Wb}/(\text{A} \cdot \text{m}))$ であり, 磁性体の部分では, 簡単のため $B-H$ 曲線を折れ線として近似する.

(14), (16), (17)式において, $(\partial B_h / \partial H_h)^n$ は要素ごとに評価され, 再び等しい成分を持つ対角行列とする. すなわち, 対角成分は空気とコイルの部分では透磁率そのものの正の値をとり, 磁性体の部分では, 各々の要素の重心における H_h^n の大きさ $|H_h^n|$ に対応する区分的に直線で近似された $B-H$ 曲線の正の傾き (右側微

分)をとることにする. (15)式の $\mu(H_h^n, x)$ の等しい対角成分も同様に評価し, 空気・コイルの部分は透磁率の値, 鉄心の部分は, 上述の折れ線の傾きから定まる直線の方程式より求める. 従って $(\partial B_h / \partial H_h)^n$ と $\mu(H_h^n, x)$ は正定値対角行列になっていることを注意しておく.

6.1 軸対称問題

例題は上下の形状が異なる鉄心が対抗する空げき部を持つ吸引磁石であり, その断面図を図2に示す. 境界条件として, すべての境界面で自然境界条件 $B \cdot n = 0$ を考慮した. また Lagrange 乗数 p は, 不定性を除くため原点のみでゼロとした. 計算対象領域は, 図2の断面を x_3 軸周りに10度回転させた領域である. 4面体要素で細分された3次元の要素分割図 (節点数805, 4面体要素数2026, 磁場 H の総自由度数3633, Lagrange 乗数 p の総自由度数805) を図3に示す. コイルの電流密度は要素ごとに与えられ, 図2の断面に垂直な向きに $3 \times 10^7 (\text{A}/\text{m}^2)$ の大きさである. 鉄心の材質はSS41Pである.

連立非線形方程式の解法は, Picard の逐次近似法 $[F2_h]$ と Newton 法 $[F3_h]$ をベースにした. (14)式の $(\partial B_h / \partial H_h)^n$ を上述の $\mu(H_h^n, x)$ で代用した場合の計算結果 (ケース1) は, 鉄心の部分を折れ線の傾きで代用した場合 (ケース2) とほとんど同じ結果を与えたことも注意しておく. 線形の初期値計算を行う場合の鉄心の透磁率は, $1.321 \times 10^{-3} (\text{Wb}/(\text{A} \cdot \text{m}))$ とし

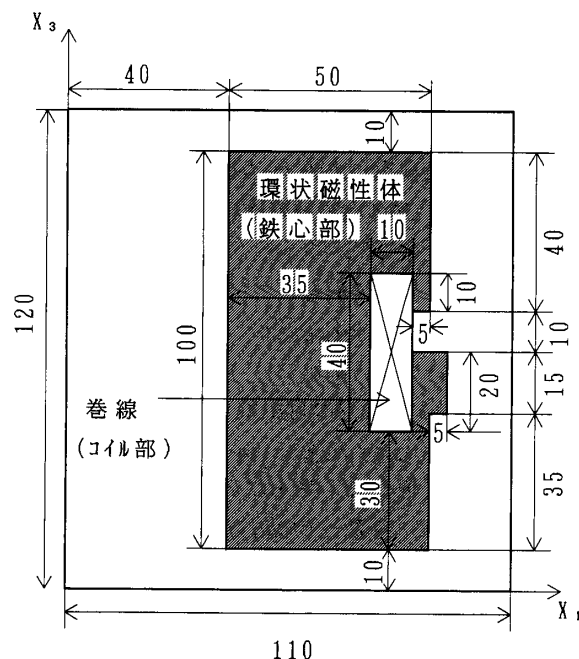


図2 解析モデルの断面図 (単位 mm)

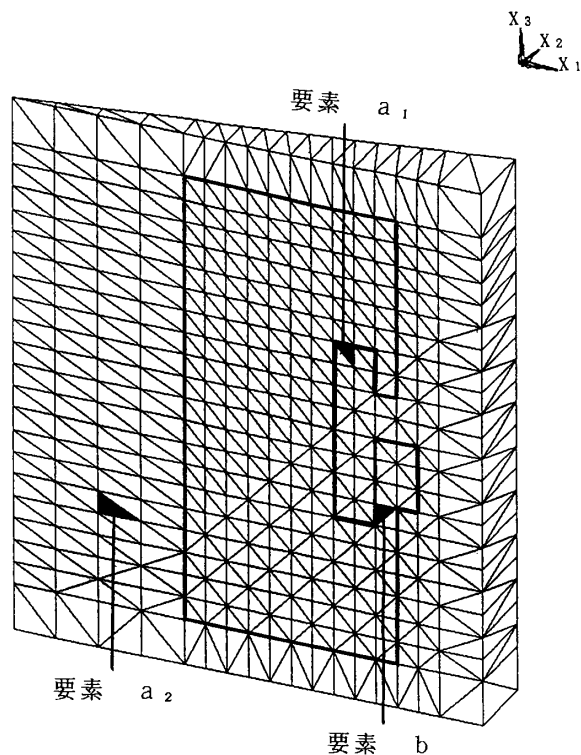


図3 3次元の要素分割図

た. これは, B - H 曲線 (折れ線) の原点から延びた線分の傾きである. Newton 法 [F3_k] をベースにした場合は, 初期値を定常解に十分近づけないと発散し, 上述の初期値では収束しなかった. なお(16), (17)式の $(\partial B_h / \partial H_h)^n$ も上述の $\mu(H_h^n, x)$ で代用した場合のアルゴリズムは Picard の逐次近似法 (ケース 1) に一致することを注意しておく. 図4の磁束線図は, 軸からの距離を乗じた磁気ベクトルポテンシャル成分を未知関数として用いた軸対称計算結果であり, 3次元計算の比較の対象とする. 使用した要素は, 三角形1次要素であり (節点数1000, 要素数1872), 境界条件として, すべての境界で未知関数をゼロとした. Picard の逐次近似法 (ケース 1) で計算した場合の磁束密度ベクトル (4面体要素の重心における磁束密度から回りの要素の体積の逆数の重み付き平均で節点の磁束密度を計算) を図5に示す.

Newton 法をベースに計算した場合もほぼ同様である. 表1に Picard の逐次近似法 (ケース 2) の反復回数と計算時間を示す.

図6は, Picard の逐次近似法 (ケース 1) における収束の様子を示すもので, 図3に示す要素 a_1 , a_2 , b における磁場のひとつの辺方向成分の収束状況を示す. 表2は, 図6の十分収束に達した段階での要素の重心における大きさで評価して最大値を与える要素 b (図

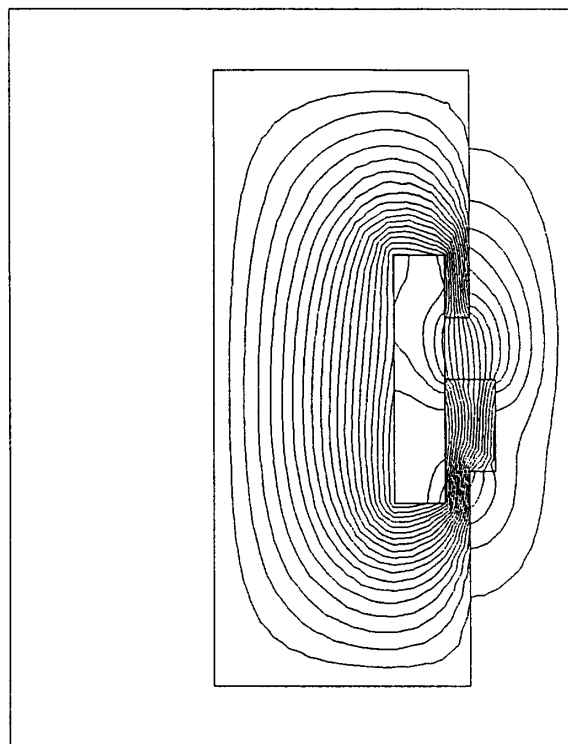


図4 軸対称計算による磁束線図

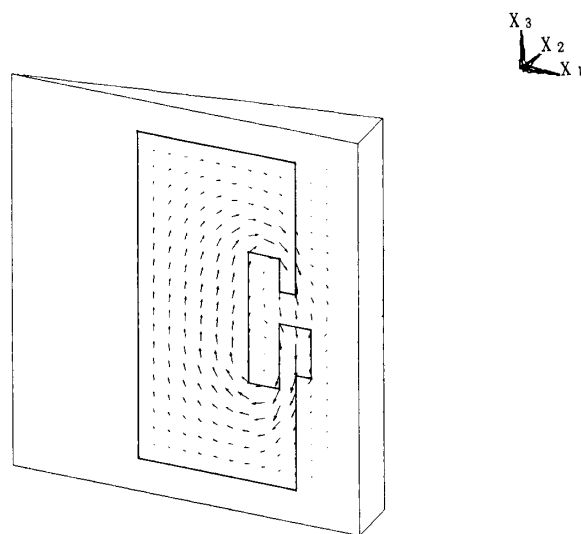


図5 3次元計算 (ケース 1) による磁束密度ベクトル

表1 ケース2の反復回数と計算時間

反復回数	CPU時間	経過時間
15回	8分10秒	60分58秒

3参照) における磁束密度の大きさを軸対称計算結果と比較したものである. 両者は良く一致しており, 磁束密度の大きさが $2.8 \text{ (T=Wb/m}^2\text{)}$ であるので, 鉄心の磁気飽和領域に十分達していることがわかる.

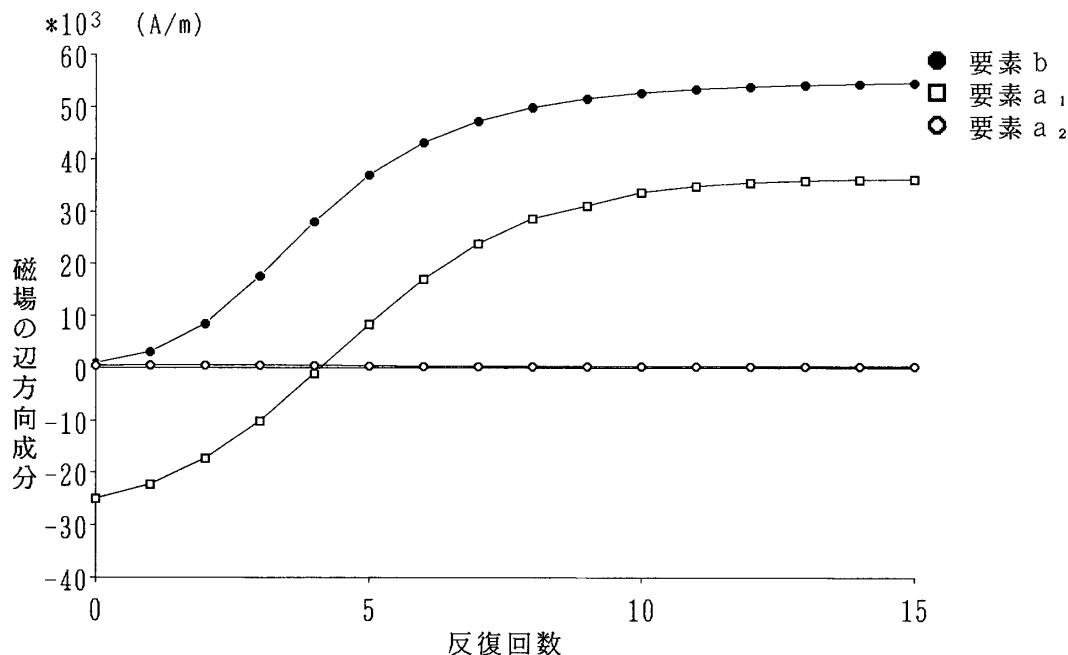


図6 ケース1の反復計算の収束状況

表2 磁束密度の大きさの最大値の比較

磁束密度の 大きさの 最大値 ($T = Wb/m^2$)	軸対称計算	三次元計算(ケース1)
	2.79	2.81

6.2 600 MW 級2極タービン発電機の固定子鉄心 端部の解析

解析は対称性を考慮し、全体の1/4モデルで行った。線形解析⁸⁾と同様に、固定子巻線については考慮せず、無負荷状態の解析を行った。図7に、4面体分割前の要素分割図と境界条件を示す(見えない面は境界 Γ_1)。同図に回転子巻線部分を抽出した分割図も示している。用いた解析モデルは節点数3438、4面体要素数16871、磁場 H の総自由度数21342、Lagrange乗数 p の総自由度数3438である。電流密度の大きさ $|J|$ は、 $1.677(A/mm^2)$ である。固定子と回転子鉄心の材料は珪素鋼板と鍛鋼である。Picard反復の初期値計算において、磁性体の部分の透磁率として $B-H$ 曲線(折れ線)の原点の傾きを用いる。図8に反復11回後の磁束密度ベクトルを示す。図9は回転子鉄心と固定子鉄心の間の空けき部の $x_3=0$ mm平面上における磁束密度成分を線形解析と比較したものである。両者はほとんど差がない結果になっている。

CPU時間と経過時間は反復11回(図7に概略の位置を示す要素 a , b のひとつの辺方向成分の収束状況を図10に示す)に対して7277秒と35076秒であった。

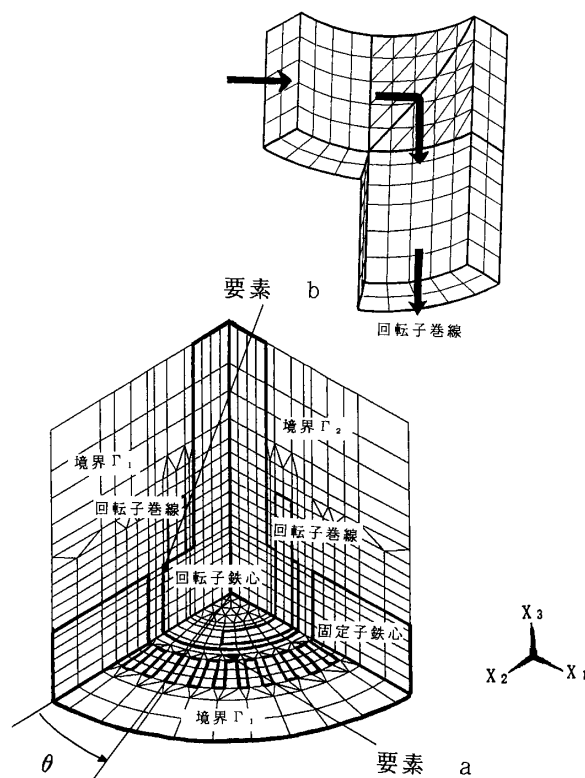


図7 4面体分割前の要素分割図と境界条件

6.3 TEAM ワークショップ Problem 13

TEAMワークショップのベンチマークテスト Problem 13^{9), 11)}において、3000(A)と1000(A)の電流を流した場合の結果について示す。解析は周期境界

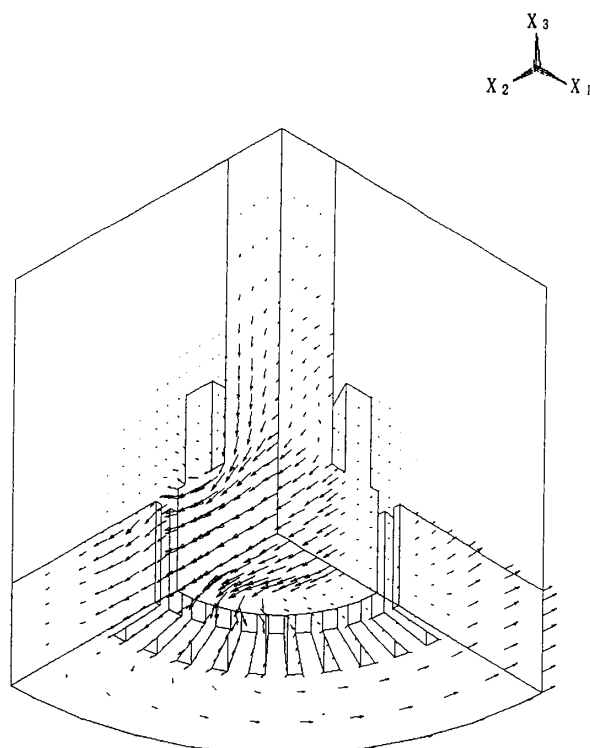


図8 反復11回後の磁束密度ベクトル

条件を課し、全体の1/4モデルで行った。図11に、計算対象領域と境界条件を示す。図11に示す x_2x_3 平面上に課した周期境界条件は次の通りである。座標 x_2 の正負に応じて x_2 軸に平行な磁場 H の辺方向成分の大きさが等しく符号が反対とし、 x_3 軸に平行な磁場 H

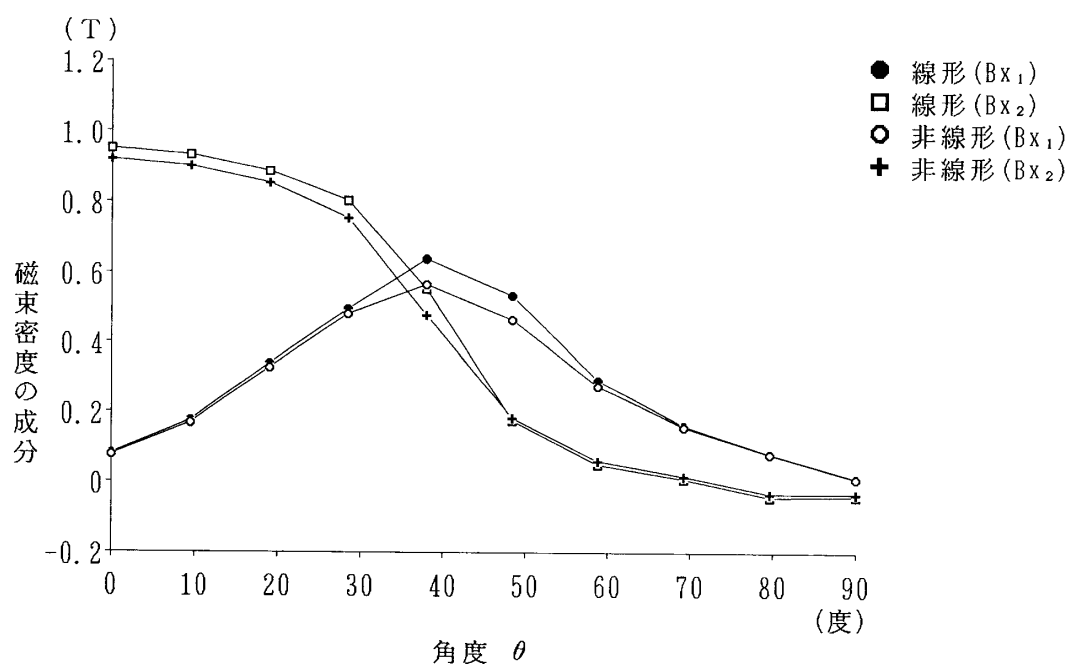
の辺方向成分及び Lagrange 乗数 p の値が等しいとした。用いた解析モデルは、節点数5600、4面体要素数27826、磁場 H の総自由度数35160、Lagrange 乗数 p の総自由度数5600である。図12に中央脚、鋼板、コイル部分を抽出した4面体分割前の要素分割図を示す。Picard 反復の初期値計算における中央脚と鋼板の部分の透磁率は、 $1.3158 \times 10^{-3} (\text{Wb}/(\text{A} \cdot \text{m}))$ である。図13に3000(A)の電流を流した場合の中央脚と鋼板における磁束密度ベクトルを示す。図14は、磁束密度の測定位置を示す¹¹⁾。図15、図16は、3000(A)と1000(A)の電流を流した場合の結果について図14に示す指定の測定ライン ab における磁束密度 B の大きさ $|B|$ を測定値と比較したものであり、両者は比較的良く一致している。

CPU 時間と経過時間は1000(A)の電流を流した場合反復8回(十分収束していると思われる)に対して14013秒と63203秒であった。3000(A)の場合もほぼ同様である。

7. おわりに

文献1), 2)の内容を中心に、現時点での著者らの3次元静磁場解析技術の状況を紹介した。

本稿では定式化は十分一般的に行われているが、数値例では、異方性の問題を取りあげることができなかった。今後の課題としたい。永久磁石の取り扱い、渦電流問題への拡張も今後の課題である。

図9 空けき部の $x_3=0$ mm 平面上における磁束密度成分の比較

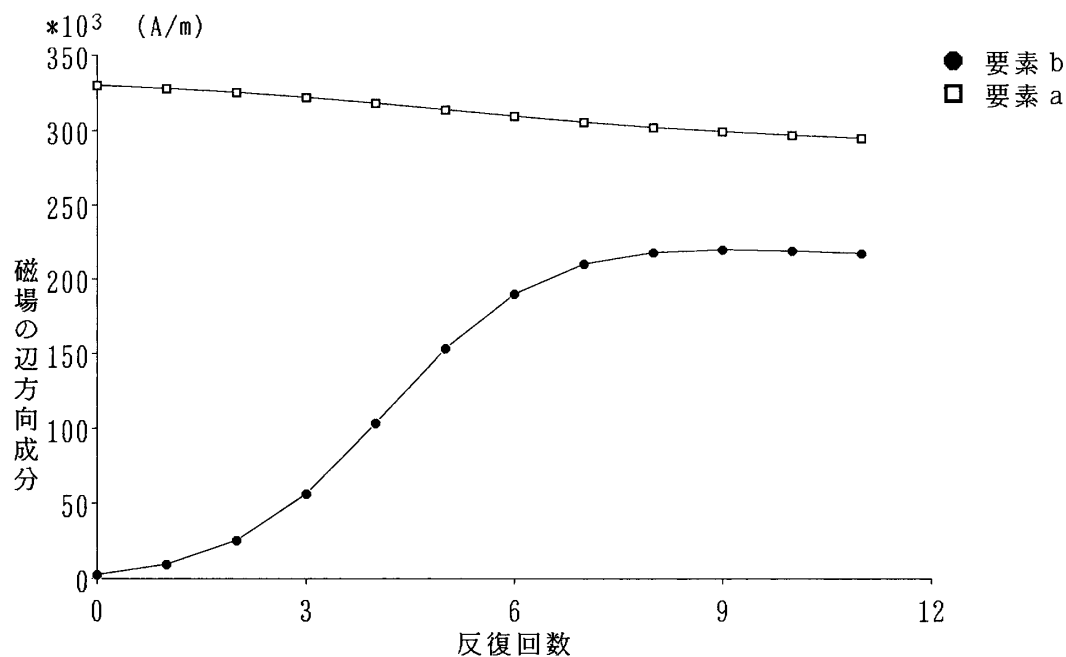


図10 反復計算の収束状況

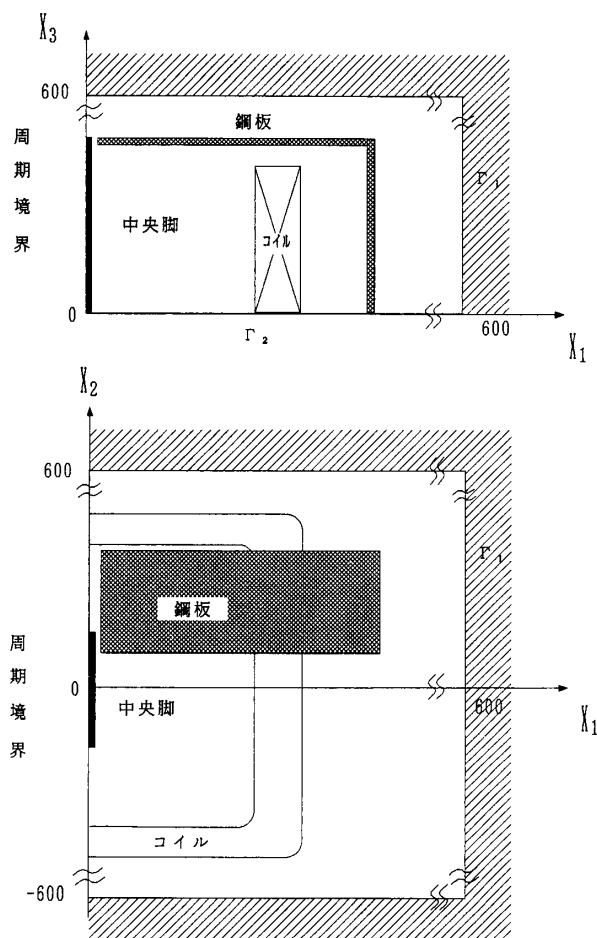


図11 計算対象領域と境界条件 (単位 mm)

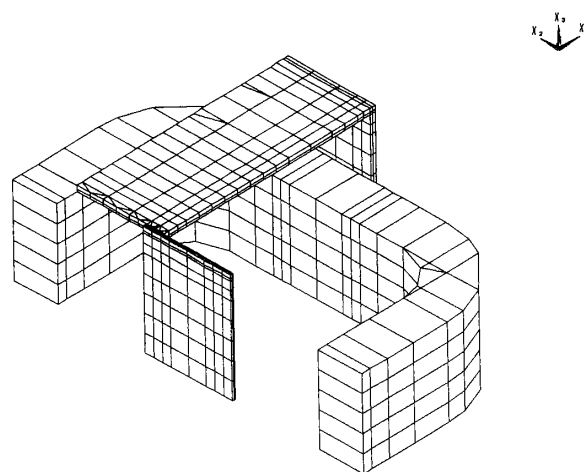


図12 中央脚、鋼板、コイル部分を抽出した4面体分割前の要素分割図

本稿では磁場 H を未知関数とする H 法についてのみ述べたが、磁気ベクトルポテンシャル A を未知関数とする A 法も可能である^{8),9)}。 A 法に対する H 法の利点は工学上有用な磁束密度が微分演算なしに直接求められることである。Lagrange 乗数は今回の数値例ではいずれも十分小さい値となっているが、初めから消去して解く工夫も考案されている³⁾。また辺要素として Nedelec の 4 面体 1 次要素のみを取りあげたが、より高次の要素、さらには 6 面体要素も考慮できる。今回取りあげた 4 面体 1 次要素は、最も単純で、近似解の収束性が保証されており^{3),10)}、自動分割ソフトウ

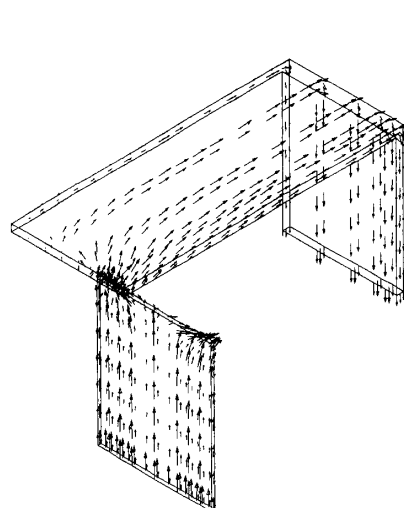


図13 中央脚と鋼板における磁束密度ベクトル (3000(A)の場合)

エアが比較的充実していることなどがその利点としてあげられる。

非線形反復についてはとりあえず Picard の逐次近似法を中心としたが、今後工夫の余地を残している。

謝 辞

岡山大学電気電子工学科の中田研究室から TEAM

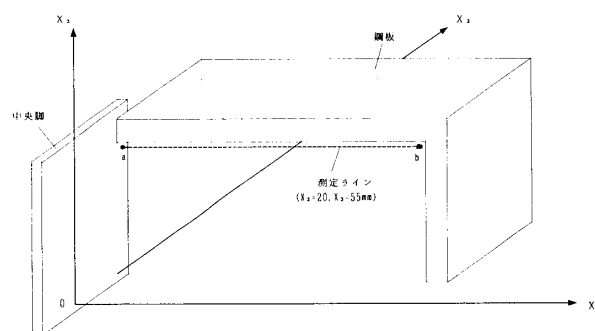


図14 磁束密度の測定位置

ワークショップ Problem 13についていろいろな御教示を受けた。記して謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) 池口修一, 松木直美, 金山 寛, 菊地文雄: 辺要素を用いた3次元非線形静磁場解析, 第13回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, 59/64 (1992)
- 2) 金山 寛, 池口修一, 遠藤研二, 菊地文雄: 辺要素を用いた3次元磁界解析, 第12回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, 123/128 (1991)
- 3) 菊地文雄: 静電場・静磁場の数値解析, 数学, 42-4, 332/345 (1990)
- 4) 中田高義, 高橋則雄, 藤原耕二, 村松和弘: 非線形3次元静磁界解析法検証用モデルの検討, 第11回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, 41/46 (1990)

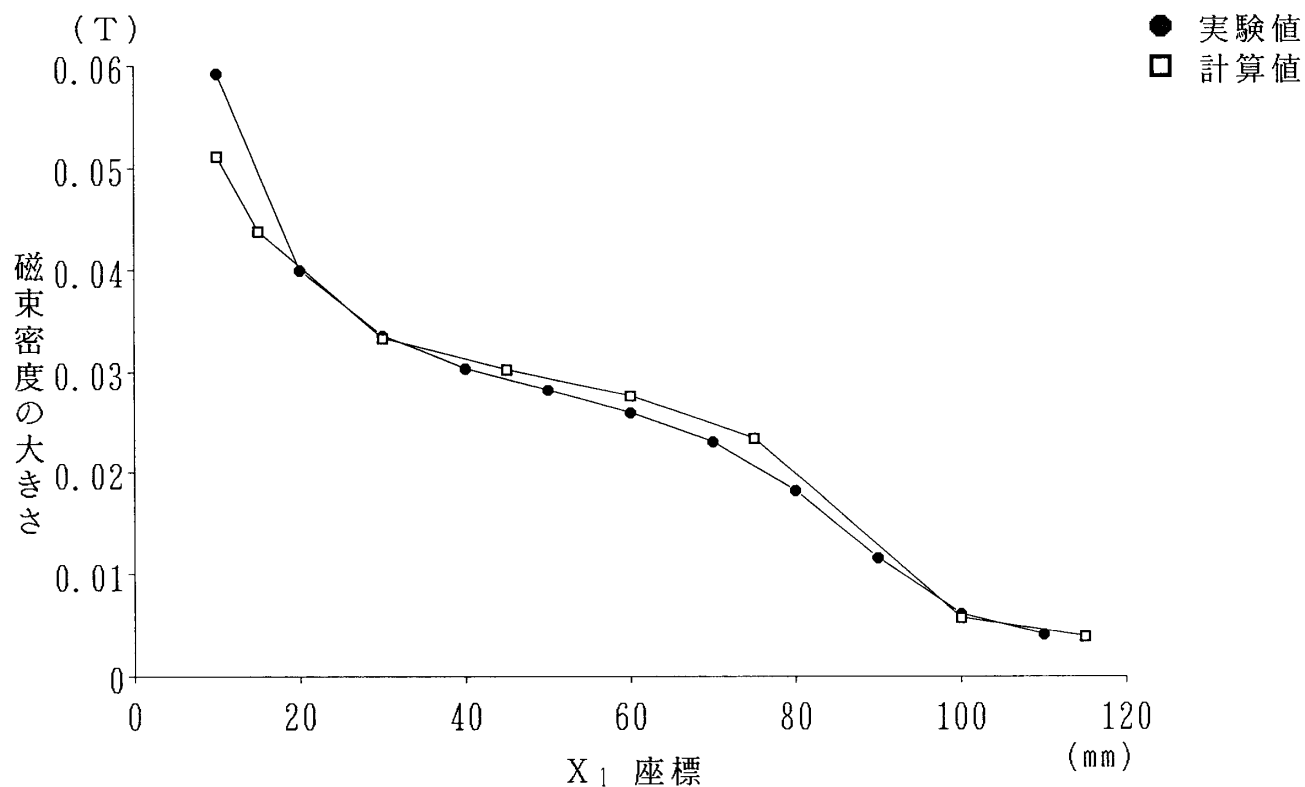


図15 図14のライン ab における磁束密度 B の大きさと測定値との比較 (3000(A) の場合)

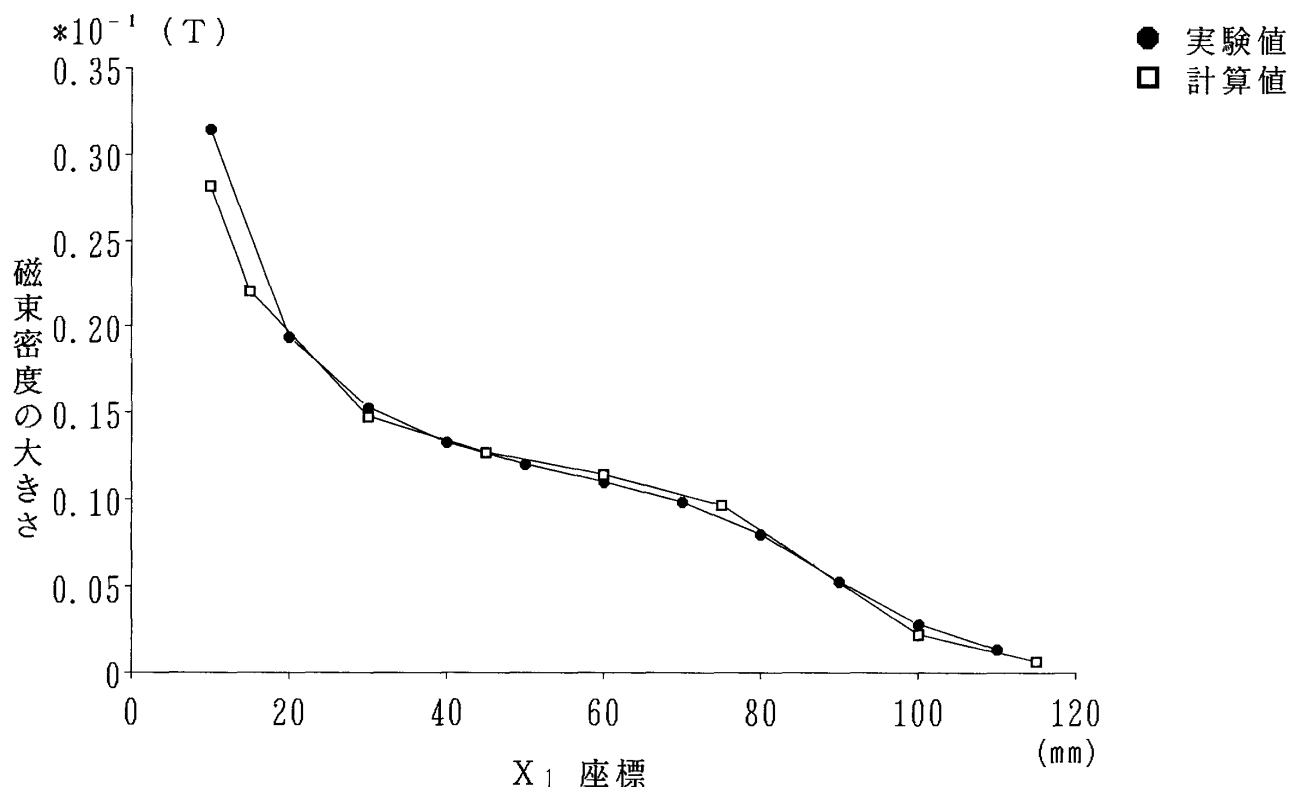


図16 図14のライン ab における磁束密度 B の大きさと測定値との比較 (1000(A) の場合)

- 5) A. Bossavit: Calcul des Courants Induits et des Forces Electromagnetiques dans un System de Conducteurs Mobiles, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 23-2, 235/259 (1989)
- 6) P. Hood: Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices, Int. J. Num. Meth. Engng., 10, 379/399 (1976)
- 7) H. Kanayama, S. Ikeguchi, K. Endo and F. Kikuchi: Three-Dimensional Nonlinear Magnetostatic Analysis Using Edge Elements, to appear in the Proceedings of ISEM-Nagoya
- 8) H. Kanayama, H. Motoyama, K. Endo and F. Kikuchi: Three-Dimensional Magnetostatic Analysis Using Nedelec's Elements, IEEE Transactions on Magnetics, 26-2, 682/685 (1990)
- 9) F. Kikuchi: Mixed Formulations for Finite Element Analysis of Magnetostatic and Electrostatic Problems, Japan J. Appl. Math., 6, 209/221 (1989)
- 10) F. Kikuchi: On a Discrete Compactness Property for the Nedelec Finite Elements, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 36, 479/490 (1989)
- 11) T. Nakata and K. Fujiwara: Summary of Results for Benchmark Problem 13 (3-D Nonlinear Magnetostatic Model), to appear in the Proceedings of the Sorrento Workshop
- 12) J.-C. Nedelec: Mixed Finite Elements in R^3 , Numer. Math., 35, 315/341 (1980)
- 13) J.-C. Nedelec: A New Family of Mixed Finite Elements in R^3 , Numer. Math., 50, 57/81 (1986)