

《小特集》

経済政策ルールの統計的推論

内 田 幸 夫*

ABSTRACT While the economic simulation has been widely used in the practical application of economic theory, the study of probability evaluation in the economic simulation has been strangely ignored in the literature of economics. This paper gives a new statistical method for the estimation and hypothesis testing of economic policy rules. It is a systematic method for the formulation and evaluation of economic policy rules. The effectiveness of the method is demonstrated by the numerical examples of the optimization using a small macroeconomic model.

1. 序と要約

計量経済モデルを用いた政策シミュレーション分析における政策の評価方法について報告する。従来この分野では、最適制御論や非線形計画法が使用されてきたが^{1),2)}、最適化計算により導出された政策を採用したときの評価に関して、理論的究明があまり行われず、その結果、政策シミュレーションの答が実験者の経済的センスと恣意的な判断に依存していた。計量モデルの推定段階では、十分に統計的推論が活用されているが、推定されたモデルを用いて政策分析を行う段階では、統計的推論は使用されていないのが現状である³⁾。

本稿では、政策の統計的推論の1つの方法を説明する^{4)~7)}。ある目標を達成する政策はどのようなものであるべきかを確率的に判断できる方法である。説明の便宜上、最初は単一の政策目標に限定しているが、後ほど複数目標にも拡張する。2章では、簡単なモデルを例にして、本稿で説明する最適化問題を考察する。ついでこのモデルを参考にして、一般的なモデルの定式化を行う。このようにして考えられたモデルを最適化モデルと呼ぶことにする。また最適化モデルで用いられる変数、関数、データを定義する。3章では、政策ルールの推定や仮説検定に必要な統計的知識をまとめる。4章では、このような最適化モデルを用いた政策の確率的判断の意義について考察する。5章では、実用規模の計量モデルを用いて計算する前の段階として、特徴を把握するために、簡単なモデルを用いて種

々の計算を行う。標本サイズ、政策ルール、政策目標をいろいろと変化させて、最適政策ルールを推定し、推定した政策の有意性検定や、情報量基準 AIC による評価を行う。6章以降では、複数の政策目標に拡張したときの、最適化モデル分析の理論を説明し、また単一目標の時と同じ主旨から簡単な数値例で理論の有効性を検討する。

2. 単一目標の最適化モデル

2.1 簡単なモデル例

次の簡単な離散型乗数加速度モデルを例にして、最適化問題におけるより一般的なモデルの定式化を考察する。

モデル 1:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (1)$$

$$C_t = c_1 + c_2 Y_{t-1} \quad (2)$$

$$I_t = c_3 + c_4 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \quad (3)$$

モデル 2:

$$G_t = B_t + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} \quad (4)$$

モデル 3:

$$a_t = Y_t + u_t, u_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (5)$$

ただし、添え字 t は期を表し、 Y_t は所得、 C_t は消費、 I_t は投資、 G_t は政府支出、 B_t は政府支出の一部で操作不可能な基本的支出である。また、 a_t は政策目標、 u_t は $E(u_t) = 0$, $Var(u_t) = \sigma^2$ の確率変数で独立に同一の分布に従う。以下、これを $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$ と略記する。モデル 1 の係数 $\{c_i; 1 \leq i \leq 4\}$ は既知であるが、モデル 2 の係数 (β_1, β_2) と σ^2 は未知であるとする。ここではモデルのデータ〔初期値 (Y_{-1}, Y_0) 、純外生値 $\{B_t; 1 \leq t \leq n\}$ 、目標値 $\{a_t; 1 \leq t \leq n\}$ 、係数値 $\{c_i; 1 \leq i \leq 4\}$ 〕が与えられたとき、モデルの未知パラメー

Statistical Inference of Economic Policy Rules. By Yukio Uchida
(Faculty of Agriculture, Kobe Univ.).

*神戸大学農学部

タ $\{\beta_1, \beta_2, \sigma^2\}$ の値を決定すること, すなわち統計的推定問題を考察する.

式(1)-(4)より Y_t は(6)式の如く表されるので, それを β の関数 f_t で示す. そうすると式(5)(6)よりモデル3は(7)式のように β の関数として表すことができる.

$$\begin{aligned} Y_t &= (c_1 + c_3) + (\beta_1 + c_2 + c_4) Y_{t-1} \\ &\quad + (\beta_2 - c_4) Y_{t-2} + B_t \\ &= f_t(\beta_1, \beta_2) \end{aligned} \quad (6)$$

モデル4:

$$a_t = f_t(\beta_1, \beta_2) + u_t, u_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (7)$$

2.2 一般的モデルの定式化

上述のモデル例を参考にして, 一般的なモデルの定式化を行う. 手段変数ベクトルを x_t , 内生変数ベクトルを y_t , 純外生変数ベクトルを z_t で表す. さらに, これらの3変数とそれらのラグ付き変数から構成される集合を $\mathcal{S}_t$, 目標変数を a_t , 目標誤差変数を u_t , その分散を σ^2 , 政策手段パラメータベクトルを β で表す. 上述のモデル例(1)-(5)において, これらの定義を具体的に記述すると式(8)(9)(10)となる.

$$\begin{aligned} x_t &= (G_t), z_t = (B_t) \\ y'_t &= (Y_t, C_t, I_t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathcal{S}_t = \{x_t, y_t, z_t, x_{t-1}, y_{t-1}, z_{t-1}, \dots\} \quad (9)$$

$$\beta' = (\beta_1, \beta_2) \quad (10)$$

一般的モデルの定式化は, モデル1が式(11), モデル2が式(12), モデル3が式(13), モデル4が式(14)となる.

$$\text{内生: } y_t = Fy(\mathcal{S}_t) \quad (11)$$

$$\text{手段: } x_t = Fx(\mathcal{S}_t, \beta) \quad (12)$$

$$\text{目標: } a_t = Fa(\mathcal{S}_t) + u_t, u_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (13)$$

式(11)(12)(13)をまとめてモデル(14)で表し, さらに次の2次損失関数(15)を定義する.

モデル:

$$a_t = f_t(\beta) + u_t, u_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (14)$$

残差平方和:

$$J(\beta) = \sum_{t=1}^n (a_t - f_t(\beta))^2 \quad (15)$$

モデルのベクトル関数 Fy , Fx とスカラー関数 Fa が具体的に記述されたとき, モデルのデータ [初期値 $\mathcal{S}_0$, 純外生値 $\{z_t; 1 \leq t \leq n\}$, 目標値 $\{a_t; 1 \leq t \leq n\}$] より, 残差平方和 $J(\beta)$ を最小化するモデルの未知パラメータ β の値を推定することを考察する. ただし, β は $k \times 1$ のベクトルとする. また, モデルの構造パラメータを既知とすることや攪乱項 u の仮定などの問題点については, 本稿で論じることを止めて今後の研究

課題とする.

3. 単一目標の統計的推測

次の $n \times 1$ ベクトル a, f, u を定義する.

$$a' = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$f' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$u' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

さらに, 次の $n \times k$ 行列 $X, \hat{X}$ を定義する.

$$\begin{aligned} X &= X(\beta) = \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta'} \\ \hat{X} &= X(\hat{\beta}) = \frac{\partial f(\hat{\beta})}{\partial \beta'} \end{aligned} \quad (16)$$

式(14)(15)は(17)(18)のように表すことができる.

$$a = f(\beta) + u, u \sim d(0, \sigma^2 I) \quad (17)$$

$$J(\beta) = (a - f(\beta))' (a - f(\beta)) \quad (18)$$

ただし, $d(\mu, \Omega)$ は平均 μ , 分散 Ω の確率分布を表すものとする.

残差平方和(18)を最小化する β の最小2乗推定量を $\hat{\beta}$ とする. 非線形単一回帰モデルの理論の結果を適用することができる. 要約すると以下の如くである^{8),9)}. 積率行列の極限 C が存在するとき,

$$C(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X'X \quad (19)$$

最小2乗推定量 $\hat{\beta}$ は正規分布に収束する.

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 C(\beta)^{-1}) \quad (20)$$

したがって, 線形回帰モデルの理論結果より, $\hat{\beta}_i$ の標準偏差の推定値 s_i を(21)のように定義すると, (22)が成り立つ.

$$s_i = \sqrt{\frac{J(\hat{\beta})}{n-k}} \times (\hat{X}'\hat{X})^{-1} \text{ の第 } i, i \text{ 要素} \quad (21)$$

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s_i} \overset{a}{\sim} t_{(n-k)} \quad (22)$$

ただし, 近似的分布を $\overset{a}{\sim}$, 自由度 df の t 分布を $t(df)$ と略記する.

推定量 $\hat{\beta}$ は最尤推定量と漸近的に同一の分布になるので, 情報量基準 $AIC^{10),11)}$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} AIC(\hat{\beta}) &\propto -2 \times \text{最大尤度} \\ &\quad + 2 \times \text{未知パラメータ数} \\ &\propto n \times \log J(\hat{\beta}) + 2(k+1) \end{aligned} \quad (23)$$

4. 最適化モデル分布の意義

個別パラメータの仮説検定は式(22)を用いる. すなわち, 対立仮説 $H_1: \beta_i \neq 0$ に対する帰無仮説 $H_0: \beta_i = 0$ を検定する場合には, H_0 のもとで, $\hat{\beta}_i/s_i \overset{a}{\sim}$

$t(n-k)$ であることを用いる。例えば式(4)において、仮説 $\beta_2=0$ の意味は、変数 Y_{t-2} は政策目標に対してフィードバック政策の効果を持っていないということを表している。このような検定方式を適用することにより、意味のある政策ルールを決定することができよう。次章では、政策ルールの選択は上述の t 検定を考慮しつつ、式(23)のAICを最小化するものを最良とする方式で行う。

ある政策目標の実現に、どのような政策が有効であるかを見きわめることは、大変に重要な経済学の課題である。従来の計量経済学のアプローチには、この課題に対して確率的判断を与えるという研究姿勢が欠落していた。計量モデルの推定段階では、様々な統計的手法が確率的に十分に研究されていた。しかし、計量モデルを用いた政策シミュレーションが、実際の経済分析として多用されている現状にも拘らず、確率的判断を可能とする統計手法が用意されていないのは残念なことである。本稿で説明した最適化モデルによる分析方法は、政策ルールに限定したものではあるが、この重要な課題に対する1つの研究方法である。

5. 単一目標の数値計算例

5.1 実験の設定

以下のモデルと政策ルールを用いて計算を行った。

モデル：

$$C_t = c_1 + c_2 Y_{t-1} \quad (24)$$

$$I_t = c_3 + c_4 Y_{t-1} + c_5 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \quad (25)$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (26)$$

政策ルール：

$$G_t = b_0 + b_1 Y_{t-1} \quad (R1)$$

$$G_t = b_0 + b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} \quad (R2)$$

$$G_t = b_0 + b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + b_3 t + b_4 R \quad (R3)$$

目的関数：

$$\text{Mim}_b \left\{ \sum_{t=1}^n \left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}} - a_t \right)^2 \right\} \quad (27)$$

記号と初期値：

C 消費, I 投資, Y 所得, G 政府支出

a 目標値, R 区間 $[-1, 1]$ の一様乱数

$$c_1 = 0.1, c_2 = 0.5, c_3 = -0.2$$

$$c_4 = 0.3, c_5 = 0.7$$

$$b_0 = 0.5, b_1 = 0.1, b_2 = 0.1$$

$$b_3 = 0.01, b_4 = 0.01$$

$$Y_0 = Y_{-1} = 1.0$$

5.2 計算結果

2章のモデルより、関数 f_t は次のように表される。

$$f_t = Y_t / Y_{t-1} = f_t(b_0, b_1, \dots) \quad (28)$$

すなわち、成長率を目標値に近づけるように政策パラメータ b の値を決定することになる。乗数加速度モデルにおいては、 Y のラグは1期と2期のみであるから、政策ルールのラグも2期までのラグのみで成長率を制御できる。またトレンドの t や一様乱数は意味のない変数である。したがって、 t 検定に合格するのは政策ルールの $R1, R2$ であり、政策ルールの $R3$ は不合格になり、さらに最小のAICは政策ルールの $R2$ となることが期待される。政策ルールの選択は t 検定を考慮しつつ、AICを最小化するものを最良とする方式で行う^{注1)}。

自由度 $\{5, 10, 20\}$ 、目標値 $\{1.02, 1.04, 1.08\}$ 、政策ルール $\{R1, R2, R3\}$ の組み合わせで計算を行った^{注2)}。したがって27回の最適化計算である。表1は係数のNLSE（非線形最小2乗推定値）、表2はNLSEの t 値、表3はAICである。 t 検定とAICから判断すれば、2番の政策ルールが最良となり、これは理論的にも妥当な答である。

5.3 固有値

政策ルール $R2$ を採用したとき、式(24)(25)(26)($R2$)と係数 c の値より、

$$Y_t = (b_0 - 0.1) + (b_1 + 1.5) Y_{t-1} + (b_2 - 0.7) Y_{t-2} \quad (29)$$

この差分方程式を解いて Y_t の軌跡を求める。式(30)の条件の下で、式(31)の2根を λ_1, λ_2 とすると、 Y_t は式(32)で表される。

$$b_1 + b_2 \neq 0.2 \text{ and } (b_1 + 1.5)^2 > 4(0.7 - b_2) \quad (30)$$

$$\lambda^2 - (b_1 + 1.5)\lambda + (0.7 - b_2) = 0 \quad (31)$$

表1 b のNLSE

自由度	目標値	政策ルール 1		政策ルール 2		
		1	Y_{t-1}	1	Y_{t-1}	Y_{t-2}
5	1.02	0.178	0.136	0.100	-0.480	0.700
	1.04	0.177	0.147	0.100	-0.460	0.700
	1.08	0.185	0.165	0.100	-0.420	0.700
10	1.02	0.125	0.184	0.100	-0.481	0.701
	1.04	0.128	0.182	0.100	-0.460	0.700
	1.08	0.134	0.208	0.100	-0.420	0.700
20	1.02	0.108	0.200	0.100	-0.481	0.701
	1.04	0.110	0.207	0.100	-0.460	0.700
	1.08	0.114	0.223	0.100	-0.420	0.700
自由度	目標値	政策ルール 3				
		1	Y_{t-1}	Y_{t-2}	t	Rnd
5	1.02	0.359	-0.613	0.568	0.006	0.000
	1.04	0.463	0.143	0.081	-0.040	0.008
	1.08	0.328	0.343	0.053	-0.124	0.005
10	1.02	0.403	0.223	0.075	-0.077	0.008
	1.04	0.386	0.203	0.083	-0.073	0.007
	1.08	0.304	0.116	0.205	-0.061	0.005
20	1.02	0.389	0.087	0.159	-0.038	0.008
	1.04	0.375	0.064	0.189	-0.035	0.007
	1.08	-0.007	-0.426	0.921	-0.037	-0.013

表2 b の NLSE の t 値

自由度	目標値	政策 $k=1$		政策 $k=2$		
		1	$Y<-1>$	1	$Y<-1>$	$Y<-2>$
5	1.02	11.30	9.56	626	-535	700
	1.04	8.28	7.85	23360	-20620	27600
	1.08	6.73	7.43	2.24e+05	-2.07e+05	2.82e+05
10	1.02	23.68	41.32	1396	-620	848
	1.04	16.39	31.44	5231	-2463	3456
	1.08	12.11	27.42	12790	-6759	10010
20	1.02	59.37	153	7972	-1746	2443
	1.04	37.86	111	13640	-3408	4885
	1.08	24.52	90.41	1.28e+05	-40140	60720
自由度	目標値	政策 $k=3$				
		1	$Y<-1>$	$Y<-2>$	t	Rnd
5	1.02	0.25	-0.40	4.31	0.12	0.01
	1.04	0.03	0.00	0.00	-0.00	0.00
	1.08	0.48	0.09	0.02	-0.14	0.01
10	1.02	0.73	0.07	0.03	-0.09	0.01
	1.04	0.80	0.07	0.05	-0.11	0.01
	1.08	1.06	0.09	0.20	-0.29	0.02
20	1.02	1.48	0.06	0.15	-0.13	0.02
	1.04	1.75	0.06	0.22	-0.20	0.03
	1.08	-0.18	-2.00	4.09	-5.62	-0.61

表3 情報量基準 AIC

自由度	政策ルール番号	目標値		
		1.02	1.04	1.08
5	1	-58.5	-49.2	-40.3
	2	-150.9	-202.0	-231.3
	3	-85.6	3.8	-4.0
10	1	-98.2	-82.6	-67.8
	2	-243.6	-267.4	-281.5
	3	-0.8	-3.7	-15.4
20	1	-177.8	-149.5	-123.3
	2	-466.3	-476.1	-567.8
	3	-9.8	-16.9	-101.6

$$Y_t = K_1 \lambda_1^t + K_2 \lambda_2^t + \frac{b_0 - 0.1}{0.2 - (b_1 + b_2)} \quad (32)$$

ただし、 K_1, K_2 は初期条件より求められる定数である。表1より目標値 $a \neq 1.00$ のときは、 $\hat{b}_0 = 0.1, \hat{b}_2 = 0.7$ とすると、 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \hat{b}_1 + 1.5$ である。ゆえに、 $Y_t = K_2 \lambda_2^t$ より $f_t = Y_t / Y_{t-1} = \lambda_2 = \hat{b}_1 + 1.5$ であり、したがって、 $\hat{b}_1 = a - 1.5$ となる。

以上の分析から、政策ルール R2 を用いたとき、政策パラメータ b_0, b_1, b_2 の値は、

$$\hat{b}_0 = 0.1, \hat{b}_1 = a - 1.5, \hat{b}_2 = 0.7$$

となるとき、目標値 (=1+成長率) を完璧に達成することになる。そしてこの値は統計的推定によって実現されている。

6. 複数目標の最適化モデル

以下では複数の政策目標を持つ場合の政策ルールの推論について考察する。手段変数ベクトルを x_t 、内生

変数ベクトルを y_t 、純外生変数ベクトルを z_t で表す。

さらに、これらの3変数とそれらのラグ付き変数から構成される集合を $\mathcal{S}_t$ 、目標変数ベクトルを a_t 、目標誤差変数ベクトルを u_t 、その分散行列を Ω 、政策手段パラメータベクトルを θ で表す。

$$\text{内生: } y_t = Fy(\mathcal{S}_t) \quad (33)$$

$$\text{手段: } x_t = Fx(\mathcal{S}_t, \theta) \quad (34)$$

目標:

$$a_t = Fa(\mathcal{S}_t) + u_t, u_t \sim IN(0, \Omega) \quad (35)$$

(33) (34) (35) をまとめてモデル (36) で表す。

モデル:

$$a_t = f_t(\theta) + u_t, u_t \sim IN(0, \Omega) \quad (36)$$

モデルのベクトル関数 Fy, Fx, Fa が具体的に記述されたとき、モデルのデータ $[\mathcal{S}_0, (z_t; 1 \leq t \leq n), (a_t; 1 \leq t \leq n)]$ より、モデルの未知パラメータ θ の値を推定することを考察する。ベクトル θ, a の次元をそれぞれ k, m とする。

次の3つの損失関数を定義する。ただし、 K_t は既知の非負値定符号行列である。

$$J_0 = \sum_{t=1}^n (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t) \quad (37)$$

$$J_1 = \sum_{t=1}^n (a_t - f_t)' \Omega^{-1} (a_t - f_t) \quad (38)$$

$$J_2 = n \log \left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (a_t - f_t) (a_t - f_t)' \right| \quad (39)$$

7. 複数目標の統計的推論

7.1 尤度関数

モデル (36) の対数尤度関数 L_1 は式 (40) になる。

$$L_1 = -\frac{n}{2} \log |\Omega| - \frac{mn}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (a_t - f_t)' \Omega^{-1} (a_t - f_t) \quad (40)$$

Ω の最尤推定量を $\hat{\Omega}$ とする。

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (a_t - f_t) (a_t - f_t)' \quad (41)$$

式 (40) (41) より、対数集中尤度関数 L_2 は式 (42) となる。

$$L_2 = -\frac{mn}{2} \log 2\pi e - \frac{n}{2} \log |\hat{\Omega}| \quad (42)$$

尤度と損失の関係より、 $\{f_t = y_t, K_t = \Omega^{-1}; 1 \leq t \leq n\}$ で Ω が既知のとき (43)、 Ω が既知のとき式 (44)、(39) と (42) より式 (45) が得られる。

$$L_1(\theta) = \text{const.} - \frac{1}{2} J_0(\theta) \quad (43)$$

$$L_1(\theta) = \text{const.} - \frac{1}{2} J_1(\theta) \quad (44)$$

$$L_2(\theta) = \text{const.} - \frac{1}{2} J_2(\theta) \quad (45)$$

損失関数 $J_0(\theta)$ は経済制御論の文献でしばしば利用されてきた *Chow* 型のものである^{註3)}。式(37)(43)の関係と最尤法の視点から損失関数を見ると、*Chow* 型の重み行列は誤差分散が既知のときの逆行列に等しい。

7.2 最尤推定量

パラメータ θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ は式(46)の解として得られる。次に情報行列を $\mathcal{J}(\theta)$ 、 $\hat{\theta}$ の分散行列を $V(\hat{\theta})$ で表す。

$$\max_{\theta} L(\theta) \quad \text{または} \quad \min_{\theta} J(\theta) \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\theta) &= -\frac{1}{n} E \left(\frac{\partial^2 L_1(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \\ &= \frac{1}{2n} E \left(\frac{\partial^2 J_1(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

$$V(\hat{\theta}) = [n \mathcal{J}(\hat{\theta})]^{-1} \quad (48)$$

最尤推定量の性質から標本の大きさ $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ は $N(0, \mathcal{J}^{-1})$ に分布収束する。または $\hat{\theta}$ の確率分布は近似的に $N(\theta, V)$ であると言える。これを $\hat{\theta} \sim N(\theta, V)$ と表すことにする。次に $\hat{\theta}$ の第 i 成分を $\hat{\theta}_i$ で表し、その標準偏差の推定値を s_i とする。

$$s_i = \hat{V}(\hat{\theta}) \text{ の第 } i, i \text{ 要素} = \{n \mathcal{J}(\hat{\theta})\}^{-1} \text{ の第 } i, i \text{ 要素} \quad (49)$$

$$(\hat{\theta}_i - \theta_i) \div s_i \sim t(mn - k) \quad (50)$$

θ の非線形制約が $r \times 1$ ベクトル関数式で表されており、 $r < k$ であるとする。制約付最尤推定量 $\tilde{\theta}$ は、

$$\mathcal{H} = \{\theta; h(\theta) = 0\} \quad (51)$$

$$\max_{\theta \in \mathcal{H}} L(\theta) \quad \text{または} \quad \min_{\theta \in \mathcal{H}} J(\theta) \quad (52)$$

の解として得られたものとする。帰無仮説 $H_0: h(\theta) = 0$ の下で、次の尤度比統計量 ξ_{LR} は $\chi^2(r)$ に分布収束する。

$$\begin{aligned} \xi_{LR} &= -2[L(\tilde{\theta}) - L(\hat{\theta})] \\ &= J(\tilde{\theta}) - J(\hat{\theta}) \end{aligned} \quad (53)$$

Gallant は上述の尤度比検定を以下のように修正して用いることを推奨している^{註4)}。すなわち、帰無仮説 $H_0: h(\theta) = 0$ の検定には次の統計量を用いる。

$$\frac{J(\tilde{\theta}) - J(\hat{\theta})}{J(\hat{\theta})} \div \frac{r}{mn - k} \sim F(r, mn - k) \quad (54)$$

モデル A のパラメータを θ_A 、その最尤推定量を $\hat{\theta}_A$ としたとき、情報量基準 *AIC* を次式で表す。

$$\begin{aligned} AIC(A) &\propto -2 \times \text{最大尤度} \\ &\quad + 2 \times \text{未知パラメータ数} \end{aligned}$$

$$\propto J(\hat{\theta}_A) + 2 \dim \theta_A \quad (55)$$

8. 複数目標の数値計算例

8.1 実験の設定

以下のモデルと政策ルールを用いて計算を行った。

モデル：

$$C_t = c_1 + c_2 Y_{t-1} \quad (56)$$

$$I_t = c_3 + c_4 r_{t-1} + c_5 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \quad (57)$$

$$p_t = c_6 + c_7 p_{t-1} + c_8 Y_t / Y_{t-1} \quad (58)$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (59)$$

政策ルール：

$$G_t = b_0 + b_1 p_{t-1} + b_2 p_{t-2} \quad (R1)$$

$$G_t = b_0 + b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} \quad (R2)$$

$$G_t = b_0 + b_1 p_{t-1} + b_2 Y_{t-1} \quad (R3)$$

$$G_t = b_0 + b_1 p_{t-1} + b_2 Y_{t-1} + b_3 Y_{t-2} \quad (R4)$$

$$G_t = b_0 + b_1 p_{t-1} + b_2 Y_{t-1} + b_3 Y_{t-2} + b_4 t + b_5 R_t \quad (R5)$$

損失関数：

$$f'_t = (Y_t / Y_{t-1}, p_t), m = 2 \quad (60)$$

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n (a_i - f_i(b))' \Omega^{-1} (a_i - f_i(b)) \quad (61)$$

記号と初期値等：

C 消費, I 投資, Y 所得, G 政府支出, r 金利

p インフレ率, a 目標値, R 区間 $[-1, 1]$ の一様乱数

$$c_1 = 0.1, c_2 = 0.7, c_3 = 0.15$$

$$c_4 = -0.2, c_5 = 0.8, c_6 = 0.2$$

$$c_7 = 0.5, c_8 = 0.3$$

$$b_0 = 0.3, b_1 = -0.1, b_2 = 0.1$$

$$b_3 = -0.1, b_4 = 0.05, b_5 = 0.05$$

$$Y_{-1} = Y_0 = p_{-1} = p_0 = 1.0$$

$$\hat{\Omega}_{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{2,t} = 0 \quad \text{インフレ率の目標値}$$

8.2 結果の要約

この最適化モデル分析は、成長率をある値の目標値に、インフレ率を 0 に近づけるように政策パラメータの値を決定することになる。モデルにおいては、 Y のラグは 1 期と 2 期から、 p のラグは 1 期から構成されているので、政策ルールのラグも Y の 2 期までと p の 1 期のみで、成長率とインフレ率を制御できる。またトレンドの t や一様乱数は意味のない変数である。したがって、 t 検定に合格するのは政策ルールの $R2$, $R3$, $R4$ であり、 $R1$, $R5$ は不合格になり、さらに最小の *AIC* は政策ルールの $R4$ となることが期待される。個別パラメータの仮説検定は(50)を用いる。情報量基

準 AIC は(55)を用いる。政策ルールを選択は t 検定を考慮しつつ、 AIC を最小化するものを最良とする方式で行う。

自由度 {20, 80}, 目標値 {1.02, 1.04, 1.08}, 政策ルール {R1, 2, 3, 4, 5}, 金利 {0.03, 0.05, 0.07} の組み合わせで計算を行った。したがって90回の最適化計算である。計算法にはガウス・ニュートン法に誤差分散の推定式を組み込んだゼルナー法を用いた^{(16),(17)}。計算結果の要約の表4は、定数項を除いた推定値についての片側10%の t 検定の可否と、 AIC の大きい順に番号をつけた得点である。 t 検定と AIC から判断すれば、これは政策ルール R4 が最良となる結果を与えている。

表4 t 値の可否と AIC の順位

利 子 率	自 由 度	目 標 値	政 策 ル ル				
			1	2	3	4	5
3%	20	1.02	○ 1	○ 4	○ 3	○ 2	× 5
		1.04	× 4	○ 1	○ 3	○ 2	× 5
		1.08	× 1	○ 3	○ 2	○ 5	× 4
	80	1.02	× 5	○ 4	○ 1	○ 3	× 2
		1.04	× 5	○ 1	○ 3	○ 4	× 2
		1.08	× 1	○ 3	○ 5	○ 2	× 4
5%	20	1.02	○ 1	○ 4	○ 3	○ 2	× 5
		1.04	× 4	○ 1	○ 3	○ 2	× 5
		1.08	× 1	○ 3	○ 2	○ 5	× 4
	80	1.02	× 5	○ 4	○ 1	○ 3	× 2
		1.04	× 5	○ 1	○ 3	○ 4	× 2
		1.08	× 1	○ 3	○ 5	○ 2	× 4
7%	20	1.02	○ 1	○ 4	○ 3	○ 2	× 5
		1.04	× 4	○ 1	○ 3	○ 2	× 5
		1.08	× 1	○ 3	○ 2	○ 5	× 4
	80	1.02	× 5	○ 4	○ 1	○ 3	× 2
		1.04	× 5	○ 1	○ 3	○ 4	× 2
		1.08	× 1	○ 3	○ 2	○ 5	× 4
計	20	1.02	3	12	9	6	0
		1.04	0	3	9	6	0
		1.08	0	9	6	15	0
	80	1.02	0	12	3	9	0
		1.04	0	3	9	12	0
		1.08	0	9	12	9	0
計	-	1.02	3	24	12	15	0
	-	1.04	0	6	18	18	0
	-	1.08	0	18	18	24	0
計	20	-	3	24	24	27	0
	80	-	0	24	24	30	0
計	-	-	3	48	48	57	0

参 考 文 献

- 1) D. A. Kendrick: Control Theory with Applications to Economics, Handbook of Mathematical Economics, edited by K. Arrow and M. Intriligator, 1, 111/158, North-Holland Pub. (1981)
- 2) H. Myoken: Optimal Stabilization Policies of Dynamic Economic Systems under Decentralized Information and Control-Regulation Structures, Peter Lang (1989)
- 3) 内田：計量経済学における制御理論についての若干の覚書, 国民経済雑誌, 163-2, 59/69 (1991)
- 4) 内田：政策ルールの推測, 第59回日本統計学会講演報告集, 6/7 (1991)
- 5) 小山, 内田：政策ルールの推定と AIC , 理論・計量経済学会1991年度大会報告要旨, 123/124 (1991)
- 6) 内田：政策ルールの推測と Jackknife 法, 論集 (神戸大学教養部), 49, 1/46 (1992)
- 7) 内田：複数目標時の政策ルールの推論, 第60回日本統計学会講演報告集, 3/4 (1992)
- 8) T. Amemiya: Non-Linear Regression Models, Handbook of Econometrics, edited by Z. Griliches and M. D. Intriligator, 1, 333/389, North-Holland Pub. (1983)
- 9) T. Amemiya: Advanced Econometrics, Basil Blackwell (1985)
- 10) H. Akaike: A New Look at the Statistical Model Identification, IEEE Automatic Control, 19, 716/723 (1974)
- 11) 坂本, 石黒, 北川：情報量統計学, 共立出版 (1983)
- 12) R. F. Engle: Wald, Likelihood Ratio and Lagrange Multiplier Tests in Econometrics, Handbook of Econometrics, edited by Z. Griliches and M. D. Intriligator, 2, 775/826, North-Holland Pub. (1984)
- 13) R. E. Quandt: Computational Problems and Methods, Handbook of Econometrics, edited by Z. Griliches and M. D. Intriligator, 1, 699/764, North-Holland Pub. (1983)
- 14) G. C. Chow: Econometrics, McGraw-Hill (1983)
- 15) A. R. Gallant: Nonlinear Statistical Models, John Wiley & Sons (1987)
- 16) A. Zellner: An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias, Journal of the American Statistical Association, 57, 348/368 (1962)
- 17) A. R. Gallant: Seemingly Unrelated Nonlinear Regression, Journal of Econometrics, 3, 35/50 (1975)

脚 注

- 注1) その他に、例えば、 β の非線形制約については尤度比検定 (likelihood ratio test), ワールド検定 (Wald's test), ラグランジュ乗数検定 (lagrange multipliers test) 等がある。これら3統計量についての説明と文献は Engle⁽¹²⁾ を参照せよ。
- 注2) 数値計算法の説明と文献は Quandt⁽¹³⁾ を参照せよ。
- 注3) Chow⁽¹⁴⁾ の p. 377 の(36)式。
- 注4) Gallant⁽¹⁵⁾ の pp. 320-326。