《論文》

294

時間ステップ近似スキームに基づく2次元非定常 熱伝導方程式の境界要素法解析[†]

田中正隆*·松本敏郎*·楊慶峰*

ABSTRACT This paper is concerned with a boundary element analysis of two-dimensional transient heat conduction problems. The time derivative in the differential equation is approximated by the time-stepping scheme. The reduced differential equation is transformed into a regularized boundary integral equation which involves no integrals to be evaluated in the Cauchy principal value sense. A new computer code is then developed and applied to several sample problems. It is revealed that there is a suitable value of the diffusion number for each problem to be investigated. The solution procedure is then applied to other two-dimensional problems, after the computational conditions are estimated by the properties obtained in the previous example computations. An accurate numerical solution can be obtained through this process.

1. 緒 言

境界要素法による非定常熱伝導問題の解析法は,時 間微分の取扱い方によって次の3種類の解法が考えら れている¹⁾.すなわち,(1)ラプラス変換を用いる変換 解法,(2)時間依存の基本解を用いる直接解法,(3)時間 微分を時間ステップ近似する時間ステップ解法であ る.この中で,直接解法が現在最も多く用いられてい る^{2)~6)}.

一方,時間ステップ解法は直接解法と同様に時間依存の物理量を直接取り扱えるという利点を持っており,非定常熱伝導問題の有効な解析法の1つとなることが期待されている.この解法についてはこれまで,時間微分を差分近似した場合の定式化と解析例が報告されている^{7),8)}.木原らは,直接解法により時間ステップ幅と要素寸法が解の精度に及ぼす影響について考察した^{2),3)}.しかしながら,本研究で取り上げる時間ステップ解法については,まだ検討されていない.

本論文では,時間ステップ解法による非定常熱伝導 問題の高精度な解析法の開発を目的として,有限要素

†1991年12月4日受付 1992年3月4日再受付

法や差分法などで多用されているいくつかの時間ステ ップ近似スキームにより時間微分を近似した場合の境 界要素法の定式化を行う.そして,この定式化に基づ いて2次元問題に対する新しい解析プログラムを開発 し,これを用いて高精度な解を得るために必要な要素 寸法と時間ステップ幅の関係を明らかにする.なお, 境界積分方程式は Cauchy の主値積分を含まない形に 正則化することにより,数値積分の高精度化をはかっ た.

2. 時間ステップ境界要素解析法

2.1 時間ステップ近似スキームと境界積分方程式 の定式化

均質等方な媒質からなる物体中における発熱を有す る場合の非定常熱伝導問題の支配方程式は、物性値の 温度依存性が無視できるとき、次式のように書くこと ができる.

$$a\nabla^2 T(x,t) + Q(x,t) = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \text{ in } \Omega \qquad (1)$$

ただし, T(x,t), Q(x,t) はそれぞれ時刻 t における 物体内の点(x) の温度および内部発熱量である. ま た, a は温度伝導率であり, ρ を密度, λ を熱伝導率, cを比熱とすると, $a=\lambda/(\rho c)$ である.

境界条件は、以下の3種類を考える、境界全体を $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ とするとき、

平成4年12月

NII-Electronic Library Service

Analysis of Two-Dimensional Unsteady Heat Conduction Problems Using Boundary Element Method Based on Time-Stepping Schemes. By Masataka Tanaka, Toshiro Matsumoto and Qing Feng Yang (Dept. of Mechanical Systems Engineering, Faculty of Engineering, Shinshu University). *信州大学工学部生産システム工学科

温度境界条件:

$$T = \overline{T}$$
 on Γ_1 (2)
熱流束境界条件:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \tag{3}$$

対流境界条件:

$$q = h(T - T_h) \quad \text{on} \quad \Gamma_3 \tag{4}$$

ただし、 T_h は外部温度、hは表面の熱伝達係数である.

初期条件は T₀を初期温度とするとき,

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = T_0 \tag{5}$$

のように表すことができる.

いま,時間軸を微小な時間間隔に分割し,時刻 $t = t_n \ge t = t_{n+1}$ における温度を $T_n \ge T_{n+1}$ とすると, $t_n \ge t \le t_{n+1}$ における温度 Tは,パラメータ θ を用いて次式で近似することができる.

 $T = \theta T_{n+1} + (1 - \theta) T_n \tag{6}$

また, Tの時間微分は次式のように差分近似する.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t} \tag{7}$$

ただし, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ である.

式(6)と(7)を式(1)に代入すると、次式が得られる.

$$a\theta\nabla^2 T_{n+1} + (1-\theta)a\nabla^2 T_n + Q = \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t} \qquad (8)$$

式(8)は0の値により,

 $\theta = 1/2$: Crank-Nicolson $\forall + \neg \downarrow$

$$\theta = 2/3$$
 : Galerkin スキーム

θ=1 :後退差分スキーム

のような差分近似に対応している.時間ステップ解法 では、従来 $\theta=1$ の場合に対応した定式化のみが示さ れていた^{7),8)}.式(8)を書き改めると、 T_{n+1} に関する 次のような非同次変形 Helmholtz 方程式が得られる.

$$\nabla^2 T_{n+1} - \frac{T_{n+1}}{a\theta\Delta t} = -\frac{(1-\theta)}{\theta} \nabla^2 T_n - \frac{T_n}{a\theta\Delta t} - \frac{Q}{a\theta}$$
(9)

 T_n が既知ならば式(9)の右辺はすべて既知量となる.したがって $T=T_0$ から時間進行により式(9)を 解いていくことにより非定常熱伝導問題の解析が可能 となる.

時間ステップ境界要素法は,式(9)を境界要素法で 解く解法であり,そのためには式(9)に対応する境界 積分方程式を導出しなければならない.式(9)の基本 解 T*は,無限媒体中で次式を満足する.

$$\nabla^2 T^* - \frac{T^*}{a\theta\Delta t} = \frac{1}{\lambda} \delta(x-y) \tag{10}$$

2 次元問題の場合,基本解 T* とそれに対応する熱流 束 g* は次式で与えられる⁸⁾.

$$T^* = \frac{-1}{2\pi\lambda} K_0 \left(\frac{r}{\sqrt{a\theta\Delta t}}\right) \tag{11}$$

$$q^* = \frac{-1}{2\pi \sqrt{a\theta \Delta t}} \frac{\partial r}{\partial n} K_1 \left(\frac{r}{\sqrt{a\theta \Delta t}} \right)$$
(12)

ただし, K₀, K₁はそれぞれ0階および1階の第2種 変形 Besse / 関数であり, rは2点x, y間の距離であ る.

上述の基本解 T^* を式(9)の両辺に掛け、これを領 域全体にわたって積分した恒等式に部分積分を繰り返 し、式(10)を用いると次の積分方程式を導くことがで きる.

$$CT_{n+1}(y) - \int_{\Gamma} T^{*}(x, y) q_{n+1}(x) d\Gamma$$

+
$$\int_{\Gamma} T_{n+1}(x) q^{*}(x, y) d\Gamma$$

=
$$\left\{ -CT_{n}(y) + \int_{\Gamma} T^{*}(x, y) q_{n}(x) d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma} T_{n}(x) q^{*}(x, y) d\Gamma \right\} \frac{(1-\theta)}{\theta}$$

+
$$\int_{\Omega} \frac{\lambda}{a\theta} \left(\frac{T_{n}(x)}{\theta \Delta t} + Q(x) \right) T^{*}(x, y) d\Omega$$

(13)

ただし、Cは点yが領域内部にあるときは1,境界の 滑らかな部分に位置するときは1/2となる定数である. 式(13)の左辺と右辺の第3項はともに Cauchyの主値 の意味で評価しなければならない.

ところで、Cは定常熱伝導問題(Laplace 方程式) の基本解から導出される熱流束 \tilde{q}^* と次の関係がある.

$$C + \int_{\Gamma} \tilde{q}^*(x, y) \, d\Gamma = 0 \tag{14}$$

2次元の場合に、 q^{*} は次式で与えられる.

- 54 ---

$$\tilde{q}^{*}(x,y) = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}$$
(15)

式(14)のCを式(13)に代入して変形すると、次のよ うな積分方程式が得られる.

$$\left\{ \int_{\Gamma} \left(q^*(x, y) - \tilde{q}^*(x, y) \right) d\Gamma \right\} T_{n+1}(y)$$
$$- \int_{\Gamma} T^*(x, y) q_{n+1}(x) d\Gamma$$
$$+ \int_{\Gamma} q^*(x, y) \left(T_{n+1}(x) - T_{n+1}(y) \right) d\Gamma$$

シミュレーション 第11巻第4号

NII-Electronic Library Service

$$= \frac{(1-\theta)}{\theta} \left\{ -\left[\int_{\Gamma} \left(q^{*}(x,y) - \tilde{q}^{*}(x,y) \right) d\Gamma \right] T_{n}(y) + \int_{\Gamma} T^{*}(x,y) q_{n}(x) \right.$$
$$\left. -\int_{\Gamma} q^{*}(x,y) \left(T_{n}(x) - T_{n}(y) \right) d\Gamma \right\} + \left. \int_{\Omega} \frac{\lambda}{a\theta} \left(\frac{T_{n}(x)}{\theta \Delta t} + Q(x) \right) T^{*}(x,y) d\Omega$$
(16)

式(16) は T_n , T_{n+1} が点yで Hölder 連続ならばy \in Γ においてもそのまま成立し, Cauchy の主値積分を含 まない正則化された境界積分方程式となっている.式 (16) は発熱項の有無に関わらず, T_n に関する領域積 分を含んでいるので,離散化に際しては領域も内部セ ルに分割しなければならない.

時間ステップ解法では、式(16)を境界要素法により 離散化して境界上の諸量を決定し、つぎに式(13)を用 いて内部の温度分布などを求める.時刻 $t=t_1$ を考え ると、 T_0 が初期条件によりすべて分かっているから、 式(16)を解いて境界上の T_1 , q_1 がすべて求められる. 次に T_0 と境界上のすべての点の T_1 , q_1 を式(13)に用 いると、領域内部のすべての点(内部セルの節点)の T_1 が求められる.以上の計算手順をさらに $t=t_2$, t_3 , …と進めていけばよい.

2.2 離散化における注意点

式(16)の境界要素法解析に際し、2次アイソパラメ トリック要素で離散化したときの積分の評価法につい て考える.まず,境界要素積分と領域積分について要 素をソース点を含む要素の集合と,それ以外の要素の 集合とに分けて考える.ソース点を含まない要素の積 分は離散化してから,通常の数値積分法により評価で きる.ソース点を含む要素内の任意の点の座標は次式 で表れる^{10),11)}.

$$x_i = \sum_{k=1}^{3} \phi^k(\xi) x_i^k$$
 (17)

ただし,

$$\phi^{1}(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2}, \ \phi_{2}(\xi) = 1 - \xi^{2}, \ \phi^{3}(\xi) = \frac{\xi(\xi+1)}{2}$$
(18)

である.また、 $x_{1}^{k}(k=1\sim3)$ は要素を構成する節点座 標である.ソース点の位置に対応する局所座標の値を くとすると、ソース点の座標は次式で表される.

$$y_{i} = \sum_{k=1}^{3} \phi^{k}(\zeta) x_{i}^{k}$$
(19)

平成4年12月

$$r_i = x_i - y_i = (\xi - \zeta) \sum_{k=1}^{3} \Phi^k(\xi, \zeta) x_i^k$$
(20)

ただし,

$$\boldsymbol{\Phi}^{1} = \frac{(\xi + \zeta - 1)}{2}, \ \boldsymbol{\Phi}^{2} = -\xi - \zeta, \ \boldsymbol{\Phi}^{3} = \frac{(\xi + \zeta + 1)}{2}$$
(21)

と置いた. このとき, 2 点 x, y 間の距離 r は次のよう に書ける.

$$r = |\xi - \zeta| (R_1^2 + R_2^2)^{1/2} = |\xi - \zeta| R$$
 (22)
ただし, $R_i(i=1,2)$, Rは次式で定義される.

$$R_i = \sum_{k=1}^{3} \Phi^k(\xi, \zeta) x_i^k, R = (R_1^2 + R_2^2)^{1/2}$$
(23)

式(22)において,x→yのときξ-ζ→0であるが, R≠0であることに注意する.

同様に、T(x) - T(y)も次式に帰着する.

$$T(x) - T(y) = (\xi - \zeta) \sum_{k=1}^{3} \Phi^{k}(\xi, \zeta) T^{k}$$
(24)

ただし、 $T^{k}(k=1\sim3)$ は温度の節点値である.

式(16)の左辺及び右辺の第3項の積分中の基本解の 特異性はO(1/r)であるが,式(22)と(24)から特異性 を示す部分はキャンセルされることがわかる.また, 式(16)の左辺及び右辺の第1項は特異性を示す部分が Laplace 方程式の基本解によってキャンセルされる.

領域内部は、8節点アイソパラメトリック内部セル で離散化する、ソース点を含むセルは6節点の三角形 サブ要素に分け、それらを正方形領域に写像して基本 解の特異性を低減してから数値積分で評価する。

3. 数値計算例と考察

まず,時間ステップ近似スキームおよび境界の要素 分割数と拡散数の関係が解の精度に及ぼす影響を,解 が分かっている次の2つの問題について調べた. 問題1:

境界条件 T=0 (x=0, 1, y=0, 1) (25) 初期条件 $T_0=\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ (26)

問題2:

----- 55 ------

境界条件
$$T=0$$
 ($x=0, 1$), $q=0$ ($y=0, 1$) (27)
初期条件 $T_0=\sin(\pi x)$ (28)

ただし,温度伝導率は a=1 とした.いずれも,境界 と領域をそれぞれ 2 次要素と 8 節点 2 次アイソパラメ トリック内部セルで,各辺が一様な長さになるように 分割して解析した.

非定常熱伝導解析においては境界要素分割数と時間

ステップ幅が連動して解の精度に影響を及ぼすと考え られる.そこで,次のパラメータを導入する.

$$\kappa = \frac{a\Delta t}{\Delta L^2} \tag{29}$$

ただし、Διは時間ステップ幅、ΔLは境界要素の隣接 節点間の平均距離の代表値である.κは無次元数であ り、拡散数とも呼ばれる.また、計算誤差を次式によ って評価する.

$$E_{T}(\%) = \frac{100}{K} \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{|T_{be}^{j} - T_{ee}^{j}|}{|T_{ee}^{j}|} \right)$$
(30)

ただし、Kは全時間ステップ数、Nは全計算点数、 T_{α}^{i} は計算値、 T_{α}^{i} は理論値である.

まず, Fig. 1に, κ =1.28 (Δt =0.02, ΔL =0.125) とし, θ =1/2, 2/3, 1と変えて計算したときの問題 1 の計算結果を示す. κ =1.28 以外の値に変えても θ =1/2, すなわち,時間微分を Crank-Nicolson スキ - ムで近似した場合に最も精度良い結果が得られた. 問題 2 についてもまったく同様の結果が得られた.

次に $\theta = 1/2$ と固定し、境界要素数を16,20,32としたときの拡散数 κ と計算誤差との関係を Fig.2 と Fig.3 に示す、要素数の違いにより、誤差が最小となる κ の値が異なっていることが分かる.

Fig. 4には、このときの誤差が最小となるκと要素数との関係を示す. L は物体の代表長さであり、熱が流れる方向の長さをとることにする. 問題 1,2の場合は正方形領域に関する問題であり、Fig.4の縦軸 L/ΔL は要素数に対応していることが分かる.

次に、内部セル数と計算誤差の関係について検討する. Fig. 5 には、問題1について κ=2.3、要素数を



Fig. 1 Results obtained for problem 1 ($\kappa = 1.28$, $\Delta L = 0.125$, $\Delta t = 0.02$)



Fig. 2 Relation between Er(%) and κ for problem 1 ($\theta = 1/2$)







Fig. 4 Relation between $L/\Delta L$ and κ at minimum error

--- 56 -----

シミュレーション 第11巻第4号



Fig. 5 Relation between Er(%) and number of internal cells

32と固定にして、内部セル数を変化させたときのセル 数 M と計算誤差の関係を示す.境界の要素分割に合 わせた内部セルの数は32であり、それより内部セル数 を増やしても解の精度に及ぼす影響は小さかった.ま た、内部セル数を少なくすると誤差が増すという結果 が得られた.一般には、境界の要素分割に合わせた内 部セルの分割を行えばよいと考えられる.

さて、次に問題1,2と異なる問題について、ある 要素分割、内部セル分割を行った場合に、いかなる Δt の値を用いて計算すれば最も精度良い解析が可能 か考えよう.ここでは、問題1,2とは異なる問題に おいても、熱が流れる方向の分割数 $L/\Delta L$ と誤差が 最小となる κ との間に、Fig.4 で示す関係があるもの と仮定する.境界条件から、おおよそその熱流方向を 予想し、その方向の代表長さと隣接節点間平均距離の 比 $L/\Delta L$ から、Fig.4 により最適な κ の値を得る.次 に、次式により時間ステップ幅を決める.

$$\Delta t = \kappa \frac{\Delta L^2}{a} \tag{31}$$

この方法により以下の3つの問題を解析してみる.

まず,問題3として Fig. 6 に示すような問題を a=1として,全周を24個の2次境界要素(ΔL =0.125) で分割して解析する場合について考える.熱伝導過程 に大きな影響を与える短い辺長を代表長さLとし,2 次元方向の熱流と仮定する.このとき, $L/\Delta L$ =8 で ある.最適な拡散数は Fig. 4 から κ =1.28 となる.し たがって,式(31)より時間ステップ幅は Δt =0.02 と なる.この Δt の値を用い, θ =1/2として計算した結 果を Fig. 7 に示す.本解と理論解⁹⁾は良く一致してい る.Fig. 8 には,代表長さLとして長方形の長辺の 長さ(L=2)を選び,これに対する最適拡散数



Fig. 6 Boundary elements and internal cells for rectangular plate (Problem 3)



 $\kappa = 2.3$ から時間ステップ幅を $\Delta t = 0.036$ として計算した結果を示す. 代表長さをL = 1としたときに比べ誤差が大きくなっており,代表長さに主要な熱流の方向の寸法を選べばよいことがわかる.

— 57 ——

平成4年12月

NII-Electronic Library Service

次に,問題4として,対流境界条件を有する非定常 熱伝導問題を考える (Fig. 9).一辺の長さは1の正 方形板とし,全周を25個の境界要素で分割した.熱伝 達係数をh=10,外部温度を $T_h=0$ とした.代表長さ Lに熱流方向を選ぶとL=1である.このとき, $\Delta L=0.1$ より $\kappa=3.4$, $\Delta t=0.034$ となる.この時間ス テップ幅を用い, $\theta=1/2$ として計算した結果をFig. 10に示す.この問題に対しても,本解と理論解⁹⁾は良 く一致している.

最後に,問題5として,厚肉円筒の問題を考える(Fig. 11). 熱流の方向は半径方向のみであり,代表長さは 円筒の厚さL=1となる.要素分割は,対称性を考え



Fig. 9 Problem 4 with convection boundary condition



Fig. 10 Results obtained for problem 4 ($L=1, \kappa=3.4, \Delta t=0.034, \theta=1/2$)

- 58 -



Fig. 11 Thick-walled circular cylinder with uniform temperature distrbutions on inner and outer surfaces (problem 5)

て1/4領域について行い、半径方向に5要素、内壁と 外壁をそれぞれ4要素に一様に分割した.このとき $L/\Delta L = 10$ であり、Fig.4からa=1として $\kappa=3.4$ と なる.さらに式(31)から、 $\Delta t = 0.034$ となる.この時 間ステップ幅を用い、 $\theta=1/2$ として計算した結果を Fig.12に示す.

この問題は、領域全体での初期温度 T=0の状態から内壁の温度が時刻 t=0 でステップ状に $T_a=1$ へ変化する問題である. Fig. 12の結果は、内壁の近くでの温度の立ち上がりの精度が悪いことを示している. ここで誤差の指標とした式(30)に戻って考えると、この指標は全時間、全空間の平均誤差であることがわかる.したがって、円筒の外壁近くや内壁近くでも、時間を経た場合には精度良い解が得られる.そこで、時





シミュレーション 第11巻第4号

間ステップ幅を Δt =0.034 より小さくとった場合の結 果を見てみる.

Fig. 13, Fig. 14にそれぞれ Δt =0.02, 0.01として 計算したときの結果を示す. Δt が小さくなるにした がって,内壁近くにおける温度の立ち上がりの精度が 向上していることがわかる.しかし,時間が経過した ときの温度の誤差はかえって大きくなっており,全時 間・全空間的な誤差は, Δt =0.034の場合よりも大き くなっている.いま各時間ごとに空間誤差が最小とな る拡散数を求めてプロットすると **Fig. 15**のようにな る. F_0 <0.35では, κ <3.4で空間誤差の最小化がは かられることが,この図からもわかる.そこで, **Fig. 16**には, F_0 <0.15のときに Δt =0.01, F_0 ≥0.15 のときに Δt =0.034として計算したときの結果を示







Fig. 14 Results obtained for thick-walled cylinder ($\kappa = 1.0$, $\Delta t = 0.01$)

300

Fig. 15 Relation between F_0 and κ at minimum average spatial error



Fig. 16 Results for thick-walled cylinder $(F_0 < 0.15, \Delta t = 0.01; F_0 \ge 0.15, \Delta t = 0.034)$

す.時間ごとに Δt の大きさを変えると離散化式の積 分を再計算しなければならなくなり、計算効率が低下 する.しかし、Fig. 16 で示したように温度の立ち上 がりのときだけ小さい Δt の値を用いることで、計算 効率をそれ程落さないで全体の精度向上をはかること ができた.

4. 結 言

- 59 -

本研究では、非定常熱伝導問題の時間ステップ近似 スキームに基づく境界要素法について種々の考察を行 った.まず、従来示されていた時間微分の後退差分近 似に基づく定式化に加えて、Galerkinスキームや Crank-Nicolsonスキームを含む一般的な定式化を示 し、数値実験を行った.その結果、Crank-Nicolsonス

平成4年12月

キームを用いると最も精度良い解が得られることが分 かった.また,要素分割数と計算誤差が最小となる拡 散数の関係を詳細に調べ,熱流方向の要素分割数から このような拡散数を決定する方法を提案した.拡散数 は要素分割数と時間ステップ幅に関係づけられるの で,これにより要素分割がわかれば,時間空間平均誤 差を最小にする時間ステップ幅を決定することができ る.

謝 辞

本研究の一部は文部省科学研究費補助金一般研究(C) (代表 田中正隆)の援助により行われたことを記し, 関係各位に感謝の意を表する.

参考文献

- Brebbia, C. A. 他 2 名(著),田中正隆(訳):境界要 素解析-理論と応用.第4章 拡散問題,丸善,157/ 165,(1984)
- 2) 境界要素法研究会(編):境界要素法の理論と応用.
 第8章 熱移動問題,コロナ社,158/168,(1986)

- 木原諄二,相澤龍彦,種田幸一:非定常熱伝導問題の 境界要素解の精度に関する一考察,境界要素法論文集, 5,97/100,(1988)
- Tanaka, M. and Brebbia, C. A. (Eds.): Boundary Elements VIII, Springer-Verlag, (1986)
- 5) Tanaka, M. and Du. Q. (Eds.): Theory and Applications of Boundary Element Methods, Pergamon Press, (1987)
- Tanaka, M. and Cruse, T. A. (Eds.): Boundary Element Methods in Applied Mechanics, Pergamon Press, (1988)
- Curran, D. A. S. Cross, M. and Lewis, B. A.: Solution of parabolic differential equations by the boundary element method using discretization in time, Applied Mathematical Modelling, 4-5, 398/400, (1980)
- Roures. V. and Alarcon, E.: Transient heat conduction problems using B. I. E. M., Computerts & Structures, 16– 6, 717/730, (1983)
- 9) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C.: Conduction of Heat in Solids, 2nd. ed., Clarendon Press, (1989)
- 10) 松本敏郎,田中正隆:正則化された境界積分方程式の
 離散化手法,JASCOME,BEM・テクノロジー・コンフ ァレンス論文集,1,7/12,(1991)
- 田中正隆,松本敏郎,中村正行:境界要素法,培風館, 45/77,(1991)

シミュレーション 第11巻第4号